

Rafał KOCISZEWSKI

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA, WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY
ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok

Zastosowanie LMI do syntezy obserwatorów liniowych ciągłych układów niecałkowitego rzędu

Dr inż. Rafał KOCISZEWSKI

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Białostockiej (2001r.). Obecnie adiunkt w Katedrze Automatyki i Elektroniki na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. Główne zainteresowania naukowe autora są skoncentrowane na zagadnieniach analizy i syntezy: liniowych układów dodatnich, układów niecałkowitego rzędu oraz na optymalizacyjnych metodach sterowania.



e-mail: rafko@pb.edu.pl

Streszczenie

W pracy rozpatrzono problem syntezy obserwatorów liniowych układów ciągłych niecałkowitego rzędu. Wykorzystując aparat liniowych nierówności macierzowych (LMI) sformułowano warunki oraz podano procedury do wyznaczania macierzy wzmocnień obserwatorów, dla rzędu α układu: $0 < \alpha < 1$ i $1 < \alpha < 2$. Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym. Obliczenia i symulacje wykonano w środowisku Matlab/Simulink.

Słowa kluczowe: liniowe nierówności macierzowe (LMI), synteza, obserwator, układ, ciągły, rząd niecałkowity.

LMI approach to observer synthesis for linear continuous-time fractional order systems

Abstract

Many sophisticated analytical procedures to control system design are based on the assumption that the full state vector is available for measurement. The example of such control procedure is placement of the unstable system eigenvalues. In many systems of practical importance, however, the entire state vector is not available for measurement. In some systems, for example, measurements may require the use of costly measurement devices and it may be unreasonable to measure all state variables. An auxiliary dynamical system, which reconstructs the state vector, is known as a full-order or an identity observer, and is coupled to the original system through the available system inputs and outputs [14]. The paper presents a problem of synthesis of full-order observers for fractional continuous-time linear systems. It has been shown that this problem can be formulated and solved by the use of linear matrix inequalities (LMI) methods [15]. Two cases of fractional order i.e. $0 < \alpha < 1$ and $1 < \alpha < 2$ of the system (1) have been considered. Necessary and sufficient conditions (Theorem 1 and 2) for solvability of the problem as well as two procedures (Procedure 1 and 2) for computation of a gain matrix L of asymptotic stable observer (2) have been given. The proposed approach is illustrated with a practical example. Numerical calculations have been performed in the Matlab package and accompanied by public domain software: SeDuMi solver and YALMIP parser. The LMI approach to observer synthesis for fractional continuous-time linear systems has not been considered as yet.

Keywords: linear matrix inequalities (LMI), synthesis, observer, system, continuous-time, fractional order.

1. Wprowadzenie

W systemach sterowania istotne znaczenie w kształtowaniu właściwości dynamicznych obiektu sterowania ma dostępność pomiarowa wektora stanu. W praktyce warunek ten nie jest zawsze spełniony. Zwykle wszystkie, bądź część zmiennych stanu nie jest bezpośrednio mierzalna. Układ dynamiczny, który na podstawie znajomości modelu matematycznego obiektu oraz pomiarowo dostępnej informacji o przebiegach wielkości wejściowych (wymuszeń) i wyjściowych (odpowiedzi) odtwarza na bieżąco estymatę wektora stanu obiektu nazywamy obserwatorem.

W ostatnich latach można zaobserwować zainteresowanie rachunkiem całkowym i różniczkowym niecałkowitego rzędu oraz zastosowaniem tej teorii w naukach technicznych. Literatura z tego zakresu liczy obecnie wiele pozycji. Podstawy rachunku niecałkowitego rzędu, problemy stabilności, osiągalności (układów ciągłych jak i dyskretnych) i inne możemy znaleźć w wybranych z tego zakresu pracach [1-8] oraz cytowanej tam literaturze. Problem syntezy obserwatorów dyskretnych układów niecałkowitego rzędu był rozpatrywany w [9,10]. Wykorzystanie LMI w odniesieniu do układów niecałkowitego rzędu było między innymi tematem prac [10-13].

W niniejszej pracy zostanie rozpatrzony problem syntezy obserwatorów pełnego rzędu, oparty na klasycznej idei Luenbergera [14], dla układów ciągłych niecałkowitego rzędu.

Zasadniczym celem jest podanie metod wyznaczania macierzy wzmocnień obserwatora w przypadku, gdy rząd układu α zawiera się w przedziale $0 < \alpha < 1$ lub $1 < \alpha < 2$. Proponowane podejście zostanie wyrażone za pomocą liniowych nierówności macierzowych (LMI). Problem syntezy obserwatorów ciągłych układów niecałkowitego rzędu oparty na LMI nie był dotychczas rozpatrywany.

2. Sformułowanie problemu

W pracy będą stosowane następujące oznaczenia: $\mathfrak{R}^{n \times m}$ - zbiór macierzy rozmiaru $n \times m$ o elementach rzeczywistych oraz $\mathfrak{R}^n = \mathfrak{R}^{n \times 1}$; C - zbiór liczb zespolonych; I_n - macierz jednostkowa rozmiaru $n \times n$; \otimes - iloczyn Kroneckera.

Macierz kwadratowa Q jest dodatnio (ujemnie) określona $Q > 0$ ($Q < 0$) jeżeli jej forma kwadratowa jest dodatnia (ujemna), tzn. $x^T Q x > 0$ ($x^T Q x < 0$) dla każdego niezerowego $x \in \mathfrak{R}^n$.

Weźmy pod uwagę liniowy układ ciągły opisany za pomocą równań stanu w poniższej postaci

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie α jest rzędem układu, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $y(t) \in \mathfrak{R}^p$ jest wektorem stanu, wejścia (wymuszenia) i wyjścia (odpowiedzi), zaś $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$.

Załóżmy do dalszych rozważań, że układ (1) jest asymptotycznie stabilny, obserwowalny i sterowalny [3].

Definicja 1. Układ dynamiczny opisany równaniem

$$\frac{d^\alpha \hat{x}(t)}{dt^\alpha} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t)], \quad (2)$$

nazywamy asymptotycznym obserwatorem pełnego rzędu (tożsamościowym) układu (1), jeżeli

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \hat{x}(t)] = 0, \quad (3)$$

dla dowolnych warunków początkowych $x(t_0) = x_0$, $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$, przy czym $\hat{x}(t) \in \mathfrak{R}^n$ jest estymatą wektora $x(t) \in \mathfrak{R}^n$.

Macierze A , B , C występujące w równaniu obserwatora (2) są takie same jak dla układu (1), natomiast $L \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ jest nieznaną macierzą wzmocnień.

Definicja 2. [15] Liniowa nierówność macierzowa (LMI) jest wyrażeniem w kanonicznej postaci

$$F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \succ 0, \quad (4)$$

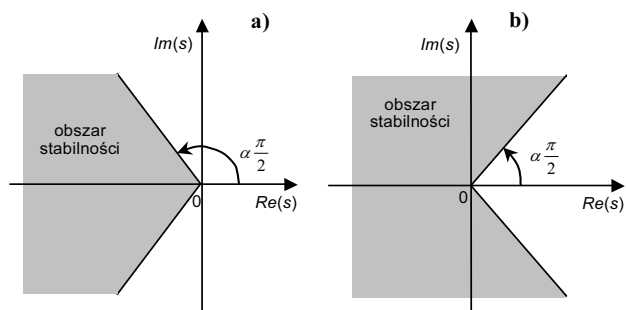
gdzie $x \in \mathfrak{R}^m$ jest zmienna, zaś macierze symetryczne $F_i = F_i^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, \dots, m$ są dane.

Warunek LMI (4) jest spełniony, jeżeli wypukły zbiór rozwiązań $\{x \mid F(x) \succ 0\}$ jest niepusty.

Celem niniejszej pracy jest podanie metod, opartych na nierównościach LMI (4), do wyznaczania macierzy wzmocnień L obserwatora (2) w przypadku, gdy rząd α układu (1) zawiera się w przedziale $0 < \alpha < 1$ lub $1 < \alpha < 2$.

3. Główny rezultat

Jeżeli rząd α jest $1 < \alpha < 2$ to układ (1) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy A są położone w obszarze pokazanym na rysunku 1a. Natomiast jeżeli $0 < \alpha < 1$ to układ (1) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy A tego układu są położone w obszarze pokazanym na rysunku 1b [12].



Rys. 1. Obszar stabilności układu (1) dla a) $1 < \alpha < 2$, b) $0 < \alpha < 1$
Fig. 1. Stability region of system (1) for a) $1 < \alpha < 2$, b) $0 < \alpha < 1$

Rozmieszczenie wartości własnych macierzy A układu (1) powoduje, że do syntezy obserwatora nie można zastosować jednokowego podejścia opartego na LMI. Wynika to z faktu, że w przypadku $1 < \alpha < 2$ obszar stabilności jest wypukły natomiast dla $0 < \alpha < 1$ nie jest on wypukły [12]. Synteza obserwatora (2) będzie więc inna dla każdego z powyższych przypadków.

3.1. Synteza obserwatora dla $1 < \alpha < 2$

Niech wektor błędu (uchybu) ma postać

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t). \quad (5)$$

Różniczkując obustronnie (5) i korzystając z równania (1) oraz (2) otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha e(t)}{dt^\alpha} &= \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} - \frac{d^\alpha \hat{x}(t)}{dt^\alpha} = \\ &= Ax(t) + Bu(t) - \{A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t)]\} = \\ &= A[x(t) - \hat{x}(t)] - LC[x(t) - \hat{x}(t)] = [A - LC]e(t) = Fe(t), \end{aligned} \quad (6)$$

przy czym

$$F = (A - LC) \in \mathfrak{R}^{n \times n}. \quad (7)$$

Z rysunku 1a wynika, że dla $1 < \alpha < 2$ stabilność układu (1) jest określona podobnie jak dla układu ciągłego naturalnego rzędu ($\alpha = 1$), przy czym obszar stabilności stanowi sektor, położony w lewej półpłaszczyźnie, o kącie rozwarcia $\alpha\pi/2$.

Z równania (6) wynika, że jeżeli wartości własne $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ macierzy F (7) będą spełniały warunek

$$|\arg \lambda_i| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad (8)$$

wówczas błąd estymacji dąży do zera, przez co estymowane zmienne stanu dążą do oryginalnych zmiennych stanu układu (1).

Jest rzeczą dobrze znaną [15,16], że układ ciągły naturalnego rzędu jest asymptotycznie stabilny, jeżeli nierówność (Lapunova) LMI o postaci

$$A^T P + PA \prec 0, \quad (9)$$

jest spełniona względem zmiennej $P = P^T \succ 0$.

Uwzględniając podane wyżej rozważania problem syntezy obserwatora układu (1) dla $1 < \alpha < 2$ możemy sformułować następująco:

Dane są macierze A , C układu (1). Poszukujemy macierzy L obserwatora (2) takiej, że równanie

$$\frac{d^\alpha e(t)}{dt^\alpha} = (A - LC)e(t), \quad (10)$$

ma rozwiązania stabilne (co jest równoważne stwierdzeniu, że obserwator (2) jest asymptotycznie stabilny).

Powyższe zadanie można sprowadzić do standardowego problemu LMI dopuszczalności (istnienia rozwiązania).

Należy znaleźć macierz $P = P^T \succ 0$ oraz macierz L taką, że jest spełniona nierówność LMI o postaci

$$F^T P + PF \prec 0 \Rightarrow (A - LC)^T P + P(A - LC) \prec 0. \quad (11)$$

Po dokonaniu przekształceń w (11) otrzymamy

$$A^T P - C^T L^T P + PA - PLC \prec 0, \quad P = P^T \succ 0. \quad (12)$$

Nierówność (12) nie jest warunkiem LMI. Jest to biliniowa nierówność macierzowa (BMI), gdyż niewiadome P i L występują w iloczynie. Dokonując zamiany zmiennych: $Y = PL$ oraz składając dwa warunki LMI (12) w jeden warunek otrzymamy końcową nierówność LMI o następującej postaci

$$\begin{bmatrix} -(A^T P - C^T Y^T) - (PA - YC) & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \succ 0. \quad (13)$$

Po rozwiązaniu LMI (13) macierz wzmocnień $L \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ obserwatora (2) można obliczyć korzystając z zależności

$$L = YP^{-1}. \quad (14)$$

Podane wyżej rozważania można podsumować następującym twierdzeniem.

Twierdzenie 1. Dla układu (1) istnieje asymptotyczny obserwator (2) jeżeli nierówność LMI (13) dopuszcza rozwiązanie względem zmiennej $P = P^T \succ 0$ oraz $Y = PL$. W tym przypadku poszukiwana macierz L obserwatora (2) jest dana wzorem (14).

Macierz wzmocnień L obserwatora (2) dla rzędu $1 < \alpha < 2$ układu (1) możemy wyznaczyć korzystając z poniższej procedury.

Procedura 1.

- Krok 1. Zadeklaruj zmienne: $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $P = P^T \succ 0$, $Y \in \mathfrak{R}^{p \times n}$.
 Krok 2. Sprawdź warunek LMI (13).
 Krok 3. Jeżeli warunek (13) jest spełniony, oblicz macierz L ze wzoru (14).

3.2. Synteza obserwatora dla $0 < \alpha < 1$

Obserwator jest układem, którego charakterystyki są określane swobodnie przez projektanta. Dynamika obserwatora w ogólnym przypadku może być więc dowolna. Poniżej pokażemy, że dla $0 < \alpha < 1$ można uzyskać obserwator (2) o zadanej z góry dynamice, wykorzystując znane z teorii liniowych nierówności macierzowych podejście oparte na problemie stabilizacji układu naturalnego rzędu [16].

Układ ciągły rzędu naturalnego jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy A leżą w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s . Jeżeli dodatkowo ograniczymy położenia wartości własnych, zaś ograniczenie to jest zbiorem wypukłym, wówczas można je zapisać w formie warunku LMI.

Ogólna postać warunku LMI opisującego wypukły obszar stabilności położony w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s (zbiór \mathcal{D}_{stab}) jest następująca [16]

$$\mathcal{D}_{stab} = \{s \in \mathbb{C} \mid f(s) \prec 0\} \prec 0, \quad (15)$$

gdzie $f(s) = N + Ms + M^T \bar{s}$ jest funkcją charakterystyczną zbioru, natomiast N i M są macierzami o elementach rzeczywistych, przy czym $N = N^T$. Przykładowo pas pionowy jest opisany za pomocą poniższej zależności

$$\mathcal{D}_{stab} = \{s \in \mathbb{C} \mid p_1 < \operatorname{Re}(s) < p_2\}, \quad (16)$$

$$\mathcal{D}_{stab} = \begin{bmatrix} (s + \bar{s}) - 2p_2 & 0 \\ 0 & -(s + \bar{s}) + 2p_1 \end{bmatrix} \prec 0,$$

gdzie \bar{s} stanowi liczbę sprzężoną do s . Inne przykłady obszarów LMI są podane w [16]. W pracy tej pokazano, że

- przecięcie (w wyniku iloczynu) obszarów LMI \mathcal{D}_{stab} jest także obszarem LMI,
- macierz A jest asymptotycznie stabilna, tzn. ma wszystkie wartości własne w obszarze LMI \mathcal{D}_{stab} wtedy i tylko wtedy, gdy poniższa nierówność

$$N \otimes P + M \otimes W + M^T \otimes W^T \prec 0, \quad (17)$$

jest spełniona względem zmiennej $P = P^T \succ 0$ oraz Y .

Warunek LMI (17) dla zmiennej $N = N^T$ odpowiada klasycznemu twierdzeniu Lapunova dla funkcji charakterystycznej $f(s) = s + \bar{s}$.

Jeżeli z założenia układ (1) jest obserwowalny i sterowalny, wówczas z zasady dualności mamy, że jeżeli para macierzy (A, C) jest obserwowalna, to para (A^T, C^T) jest sterowalna [17]. Macierz obserwatora L można dobrać więc tak, aby macierz F (7) miała wartości własne w lewej półpłaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy układ (1) jest obserwowalny. Synteza asymptotycznego obserwatora (2) sprowadza się więc do wyznaczenia macierzy wzmocnień L przy wykorzystaniu dowolnej metody przesuwania biegunów.

Problem syntezy obserwatora (2) układu (1) dla $0 < \alpha < 1$ sformułujemy zatem następująco:

Dane są macierze A , C układu (1). Poszukujemy macierzy L obserwatora (2) takiej, że równanie (10) ma rozwiązania stabilne, tj. wartości własne macierzy F (7) lub równoważnie miejsca zerowe wielomianu

$$w_F(sI_n - F) = \det[sI_n - (A - LC)] = \det[sI_n - (A^T - C^T L^T)], \quad (18)$$

są ulokowane w zbiorze \mathcal{D}_{stab} (15).

Na podstawie rezultatów podanych w pracy [16] możemy sformułować poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2. Macierz F (7) ma wartości własne położone w obszarze LMI (15) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $P = P^T \succ 0$ oraz macierz Y , taka, że nierówność LMI (17) jest spełniona, przy czym $W = A^T P - C^T Y$. W tym przypadku macierz L obserwatora (2) jest dana wzorem (14).

Dowód. Dowód przebiega podobnie jak w pracy [16].

Macierz wzmocnień L obserwatora (2) układu (1) dla $0 < \alpha < 1$ możemy wyznaczyć przy wykorzystaniu poniższej procedury.

Procedura 2.

- Krok 1. Wybierz obszar \mathcal{D}_{stab} (15) (np. (16) lub inny [16])
 Krok 2. Zadeklaruj zmienne: $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $P = P^T \succ 0$, $Y \in \mathfrak{R}^{p \times n}$.
 Krok 3. Sprawdź warunek LMI (17).
 Krok 4. Jeżeli warunek (17) jest spełniony, oblicz macierz L ze wzoru (14).

Syntezę obserwatora (2) przy wykorzystaniu procedury 1 lub 2 można przeprowadzić w środowisku obliczeniowym rozwiązującym zagadnienia optymalizacji, w której warunki LMI są zapisane w definicyjnej postaci (4), np. program SeDuMi oraz program preprocesingowy YALMIP, działające integralnie w środowisku Matlab. Deklaracja zmiennych P , Y w proponowanych procedurach polega na podaniu ich rozmiarów, a następnie sprawdzeniu właściwej nierówności LMI. Wartości liczbowe tych zmiennych są uzyskiwane wówczas, gdy warunek LMI jest spełniony, a więc po rozwiązaniu zadania przez program optymalizacyjny.

4. Przykład

Dany jest układ oscylacyjny opisany równaniem Bagleya-Torvika o równaniach stanu (1) przy czym $\alpha = 0.5$. Macierze opisujące ten układ są następujące [2]

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad b_0]. \quad (19)$$

Należy zaprojektować obserwator pełnego rzędu, przyjmując w (19) $a_0 = 0.1$, $a_1 = 0.05$, $b_0 = 2$.

Rząd układu o macierzach (19) jest $\alpha = 0.5$, więc do syntezy obserwatora wykorzystamy procedurę 2.

Postępując zgodnie z procedurą i dokonując obliczeń w środowisku Matlab za użyciem SeDuMi oraz YALMIP uzyskano następujące rezultaty.

Krok 1. Przyjmujemy obszar \mathcal{D}_{stab} w postaci pasa pionowego (16), gdzie $p_1 = -1$, $p_2 = -3$.

Krok 2. Deklarujemy: $P \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, $P = P^T \succ 0$, $Y \in \mathfrak{R}^{1 \times 3}$.

Krok 3. Macierze P i Y mają postać

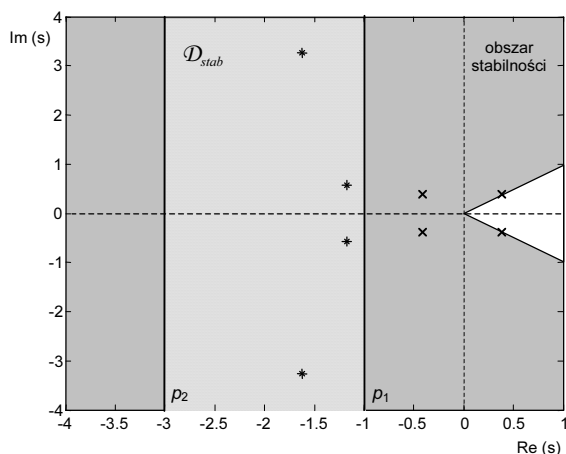
$$P = \begin{bmatrix} 0.16 & -0.16 & 0.12 & -0.01 \\ -0.16 & 0.22 & -0.24 & 0.11 \\ 0.12 & -0.24 & 0.41 & -0.46 \\ -0.01 & 0.11 & -0.46 & 1.61 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0.04 \\ -0.11 \\ 0.25 \\ 1.23 \end{bmatrix}^T. \quad (20)$$

Warunek LMI (17) przy macierzach (20) jest spełniony.

Krok 4. Poszukiwana macierz obserwatora obliczona ze wzoru (14) ma postać

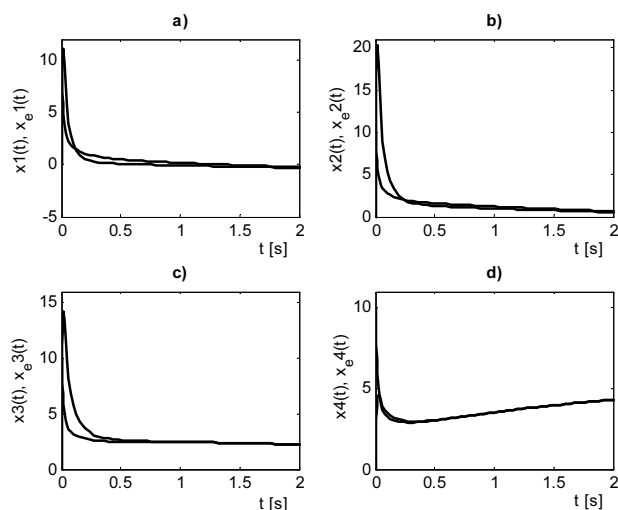
$$L = YP^{-1} = [10.24 \quad 17.66 \quad 11.11 \quad 2.77]^T. \quad (21)$$

Położenie wartości własnych macierzy A (19) rozpatrywanego układu oraz macierzy F (7) z obliczoną macierzą L (21) jest pokazane na rysunku 2, na którym zaznaczono obszar stabilności rozpatrywanego układu oraz przyjęty obszar D_{stab} .



Rys. 2. Położenie wartości własnych macierzy A (19) ('+') i macierzy F (7) ('*')

Fig. 2. Location of eigenvalues of matrix A (19) ('+') and matrix F (7) ('*')



Rys. 3. Zmienne stanu $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ (linia ciągła) oraz ich estymaty $x_{e1}(t)$, $x_{e2}(t)$, $x_{e3}(t)$, $x_{e4}(t)$ (linia przerywana)

Fig. 3. State variables $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ (solid line) and their estimates $x_{e1}(t)$, $x_{e2}(t)$, $x_{e3}(t)$, $x_{e4}(t)$ (dashed line)

Wyniki symulacyjne w postaci estymat $x_{e1}(t), \dots, x_{e4}(t)$ zmiennych stanu $x_1(t), \dots, x_4(t)$ układu o macierzach (19) są pokazane na rysunku 3a-d. Przyjęto zerowe warunki początkowe obserwatora, natomiast warunek początkowy układu dla każdej zmiennej stanu przyjęto równy 1. Z otrzymanych rezultatów wynika, że macierz wzmacnień L (21) obserwatora została obliczona poprawnie. Łatwo można sprawdzić, że w przypadku estymacji każdej zmiennej stanu błąd (5) jest równy zero.

5. Uwagi końcowe

W pracy rozpatrzono problem syntezy obserwatora pełnego rzędu dla liniowych ciągłych układów niecałkowitego rzędu,

opisanych za pomocą równań stanu (1). Rozważono dwa przypadki, w których rząd α układu (1) zawiera się w przedziale $1 < \alpha < 2$ lub $0 < \alpha < 1$. Pokazano, że jest możliwe sformułowanie problemu wyznaczania nieznanej macierzy wzmacnień L obserwatora (2) za pomocą nierówności LMI. Problem ten można natomiast efektywnie rozwiązać korzystając z jednej z proponowanych procedur.

Przedstawione w pracy rozważania można uogólnić na klasę dodatnich układów niecałkowitego rzędu. Możliwe jest także wykorzystanie prezentowanego podejścia do syntezy obserwatorów pełnego lub zredukowanego rzędu układów ciągłych jak i dyskretnych niecałkowitego rzędu z opóźnieniami.

Pracę wykonano w ramach grantu NN 514 1939 33 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

6. Literatura

- [1] Miller K. S., Ross B.: An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley, New York 1993.
- [2] Ostalczyk P.: Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowania w automatyce. Wyd. Politechniki Łódzkiej, 2008.
- [3] Kaczorek T.: Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu. Wyd. Politechniki Białostockiej, 2009.
- [4] Busłowicz M.: Komputerowe metody badania stabilności liniowych ciągłych układów dynamicznych niecałkowitego rzędu. Mat. V Ogólnopolskiej Konf. Naukowo-Technicznej „Modelowanie i Symulacja” (MIS'08), Kościelisko, 2008, s. 201-204.
- [5] Busłowicz M.: Stability analysis of linear continuous-time fractional systems of commensurate order. Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems, vol. 3, no. 1, 2009, pp. 16-21.
- [6] Kaczorek T.: Reachability of fractional positive continuous-time linear systems. Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems, vol. 3, no. 1, 2009, pp. 3-7.
- [7] Kaczorek T.: Realization problem for fractional continuous-time systems. Proc. 16th Mediterranean Conf. on Control and Automation, Palermo, 2008, vol. 2, pp. 226-235.
- [8] Dzieliński A., Sierociuk D.: Controllability and observability of fractional order discrete state-space systems. Proc. 13th IEEE IFAC Intrn. Conf. Methods and Models in Automation and Robotics, 27-30 Aug. 2007, Szczecin, Poland, IEEE Conf. No. 12459.
- [9] Dzieliński A., Sierociuk D.: Observer for discrete fractional order state-space systems. 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, IFAC FDA'06, pp. 524-529, Porto, Portugal, 19-21 July, 2006.
- [10] Kociszewski R.: Obserwatory dodatnich liniowych układów dyskretnych ułamkowego rzędu, Pomiary Automatyka Robotyka, no. 2, 2009 (CD-ROM).
- [11] Momanni S., El-Khazali R.: Stability analysis of composite fractional systems. Proc. Intelligent Systems and Control, Tampa, Florida, November 19-22, 2001.
- [12] Moze M., Sabatier J., Oustaloup A.: LMI characterization of fractional systems stability. Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering. Pp. 419-434, Springer 2007.
- [13] Xing S. Y., Lu J. G.: Robust stability and stabilization of fractional-order linear systems with nonlinear uncertain parameters: LMI approach. Chaos, Solitons and Fractals, 2009 (w druku).
- [14] Luenberger D. G.: An introduction to observers. IEEE Trans. on Autom. Control, vol. 16, no. 6, 1971, pp. 596-602.
- [15] Boyd S., ElGhaoui L., Feron E., Balakrishnan V.: Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM 1994.
- [16] Chilali M., Gahinet P.: H_∞ design with pole placement constraint: An LMI approach. IEEE Trans. Autom. Contr. No. 41, 1996, pp. 358-367.
- [17] Kaczorek T.: Teoria sterowania i systemów. PWN, Warszawa 1996.