

Wojciech MITKOWSKI

AGH W KRAKOWIE, KATEDRA AUTOMATYKI
Al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków

Chaos w wybranych układach liniowych

Prof. dr hab. inż. Wojciech MITKOWSKI

W roku 1970 uzyskał tytuł magistra inżyniera elektryka w zakresie automatyki i telemekhaniki na Wydziale Elektrotechniki Górniczej i Hutniczej AGH w Krakowie, gdzie w roku 1974 uzyskał stopień doktora nauk technicznych, a w roku 1984 stopień doktora habilitowanego w zakresie automatyki. W roku 1992 Prezydent RP nadał Mu tytuł naukowy profesora nauk technicznych. Główne kierunki badań naukowych to automatyka i robotyka, teoria sterowania, sterowanie optymalne, systemy dynamiczne, teoria obwodów elektrycznych.



e-mail: wojciech.mitkowski@agh.edu.pl

Streszczenie

W pracy przedstawiono wybrane liniowe układy o dynamice chaotycznej. Pokazano możliwość pojawienia się zachowań chaotycznych w symulacjach komputerowych liniowych aproksymacji układów o parametrach rozłożonych. Przeprowadzono oryginalną analizę dynamiki liniowego układu drabinkowego typu LC. Rozważania zilustrowano przykładami obliczeń numerycznych.

Słowa kluczowe: chaos w układach liniowych, równania cząstkowe, elektryczne układy drabinkowe.

Chaos in selected linear systems**Abstract**

In the paper selected linear systems displaying chaotic dynamics are presented. Particular attention is focused on numerical chaos and strange behaviour of the instantaneous voltage across suitable electrical capacitances in ladder networks of type LC. The possibility of arising the chaotic behaviour in numerical simulations of linear approximations of distributed parameters systems, with the so - called Lasota operator is shown. The original analysis of the linear LC ladder network dynamics is performed. Irregular trajectories arise in the systems of type LC as a result of mixing the time courses of incommensurable frequencies. The ladder network of type LC is approximation of an adequate hyperbolic system. The considered problems are illustrated with examples of numerical calculations. The comparative analysis for the LC ladder networks with different n , where n is a number of capacitance, is carried out.

Keywords: chaos in linear systems, distyributed systems, electric ladder networks.

1. Wstęp

W ostatnich kilkunastu latach można zaobserwować pojawianie się nowych pojęć matematycznych dotyczących dziwnych zachowań układów dynamicznych, często nazywanych chaosem [1-4]. Badania nad chaosem zostały właściwie zapoczątkowane przez Poincaré'go na przełomie XIX i XX wieku, i co warto podkreślić bez wspomagania, ze względów oczywistych, techniką komputerową. Następnie były rozwijane w drugiej połowie XX wieku, co było naturalną konsekwencją tworzenia coraz bardziej złożonych modeli matematycznych otaczającej nas rzeczywistości. Analiza takich modeli była wspomagana poprzez burzliwy rozwój technik komputerowych. Czasem wracano do wcześniejszych spostrzeżeń oraz odkrywano nowe dziwne zachowania w układach dynamicznych modelujących zjawiska różnego typu, np. fizyczne, meteorologiczne, biologiczne, medyczne, ekonomiczne, chemiczne, elektryczne, ekologiczne, informatyczne i inne. Również istotny dla badań nad chaosem był rozwój technik pomiarowych, który potwierdzał wcześniejsze eksperymentalne spostrzeżenia badaczy, że pomimo „dokładnego” pomiaru stanu początkowego w układach deterministycznych stany przyszłe nie są przewidywalne. Stosuje się różne podejścia do matematycznej analizy chaosu [3, 4]. Jednym z nich jest teoria ergodyczna. W języku teorii ergodycznej

można zauważyć, że być może w każdym z nas „tkwi” ukryta ergodyczna miara niezmiennicza, której istnienie jest warunkiem wystarczającym generowania dziwnych zachowań w pewnych sytuacjach życiowych.

Zwykle pojawianie się trajektorii chaotycznych jest związane z istnieniem w układzie elementów nieliniowych. W przypadku czasu ciągłego chaos może się pojawić, gdy wymiar przestrzeni stanów $n \geq 3$. Natomiast w przypadku układów dyskretnych w czasie, gdy $n \geq 1$. Cechą wspólną, występującą w różnych matematycznych definicjach chaosu, jest wrażliwość na zmiany danych początkowych [4]. Warto również pamiętać, że chaos obserwowano w różnego typu eksperymentach na obiektach rzeczywistych oraz w symulacjach komputerowych przy analizie numerycznej złożonych modeli matematycznych. Istnienie dziwnego atraktora jest popularnym kryterium chaosu w naukach eksperymentalnych, gdyż można go oglądać po odpowiedniej wizualizacji symulacji numerycznych. Te obserwacje miały duży wpływ na rozwój pojęć matematycznych dotyczących chaosu.

Okazuje się, że chaos może pojawić się również w układach liniowych, ale o wymiarze nieskończonym [4]. Zachowania chaotyczne w układach liniowych o nieskończonym wymiarze są trudne do zaobserwowania w wykonywanych symulacjach komputerowych. Powodem tego jest fakt, że w komputerowych obliczeniach układy nieskończenie wymiarowe są aproksymowane układami skończenie wymiarowymi.

Dynamika skończenie wymiarowych układów liniowych stacjonarnych ciągłych w czasie jest generowana przez odpowiednie kombinacje liniowe funkcji wykładniczych, trygonometrycznych oraz wielomianów stopnia skończonego. Ale i w tym przypadku można zaobserwować ciekawą dynamikę powstającą w wyniku „mieszania” funkcji trygonometrycznych o niewspółmiernych częstościach [5, 6].

Możliwość istnienia chaosu w układach liniowych jest ważnym spostrzeżeniem i wskazaniem dla projektantów systemów regulacji automatycznej. Bowiem podstawowe algorytmy syntezy układów regulacji bazują na metodach linearyzacji.

2. Przykład chaosu w sensie teorii miary

Dobrym modelem matematycznym ewolucji komórek krwi o stopniu dojrzałości x jest następujące liniowe równanie różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego [4, 7, 8, 9]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda u, \quad \lambda \in R, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

z funkcją początkową

$$u(0, x) = v(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (2)$$

Problem początkowy (1), (2) generuje (półgrupę operatorów) układ dynamiczny $\{S^t\}_{t \geq 0}$ dany wzorem

$$u(t, x) = (S^t v)(x) = e^{\lambda t} v(x e^{-t}), \quad t \geq 0, \quad x \in [0, 1] \quad (3)$$

na przestrzeni

$$X_n = \{v \in C^n[0, 1] : v(0) = \dots = v^{(n)}(0) = 0\}, \quad (4)$$

przy czym n jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą.

Dla każdego $v \in X_n$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie problemu (1), (2) dane równością (3). Jeżeli $\lambda \geq 2$, to istnieje ciągła nietrywialna ergodyczna miara niezmiennicza dla $\{S^t\}_{t \geq 0}$ na przestrzeni X_1 [7]. Istnienie ergodycznej miary niezmienniczej jest konsekwencją posiadania przez układ dynamiczny $\{S^t\}_{t \geq 0}$ silnie turbulentnych trajektorii [9].

Równanie (1) było analizowane przez wielu badaczy [4, 7, 8, 9, 10] przy różnych λ . Istnienie odpowiedniej ergodycznej miary niezmienniczej stanowi podstawę do uznania dynamiki układu za dynamikę chaotyczną. Istotne wyniki w tym obszarze zostały uzyskane przez Lasotę i Rudnickiego [7]. Operator występujący w równaniu (1) postaci

$$Au = \lambda u - a(x) \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5)$$

dla $a(x) = x$ określony na X_1 jest nazywany operatorem Lasoty [9].

3. Układy hiperacykliczne

Rozpocniemy od dyskretnych układów dynamicznych $x_{k+1} = Ax_k$. Rozważmy operator A liniowy i ograniczony w nieskończonej wymiarowej przestrzeni Banacha X . Załóżmy, że istnieją podprzestrzenie Y_1, Y_2 gęste w X . Dalej załóżmy, że istnieje operacja $Z: Y_1 \rightarrow Y_1$ taka, że $AZx = x, x \in Y_1$ oraz przy $k \rightarrow \infty$ zachodzą zbieżności $\forall y \in Y_1, Z^k y \rightarrow 0$ oraz $\forall y \in Y_2, A^k y \rightarrow 0$. Wtedy operacja A jest hiperacykliczna [4].

Podstawowym problemem jest identyfikacja podprzestrzeni Y_1, Y_2 . Praktycznie te podprzestrzenie są powiązane odpowiednio z wektorami własnymi operatora A .

W przypadku układów z czasem ciągłym zastosujemy notację stosowaną w teorii półgrup operatorów. Niech $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ będzie silnie ciągłą półgrupą operatorów liniowych ograniczonych w przestrzeni Banacha X z generatorem A . Trajektorja $x(t, p) = T(t)p$ spełnia liniowe równanie różniczkowe

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = p, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Niech

$$X_0 = \{p \in X : T(t)p \rightarrow 0 \text{ gdy } t \rightarrow \infty\} \quad (7)$$

oraz

$$X_\infty = \{p : \forall \varepsilon > 0, \exists w \in X, \exists t > 0 : \|w\| < \varepsilon, \|T(t)w - p\| < \varepsilon\}. \quad (8)$$

Jeżeli X jest ośrodkową przestrzenią Banacha oraz X_0, X_∞ są gęste w X , to $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ jest hiperacykliczna (chaotyczna) [4]. Podprzestrzenie X_0, X_∞ można efektywnie wyznaczyć wykorzystując wektory własne generatora A półgrup $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Przykład. Dla przykładu rozważmy operator (5), w którym $a(x) = -1$. W obliczeniach numerycznych dokonując dyskretyzacji zmiennej przestrzennej x z krokiem $h > 0$ przyjmując $u(ih) = u_i$ oraz stosując iloraz różnicowy przedni otrzymamy

$$\lambda u(x_i) + \frac{\partial u(x_i)}{\partial x} \cong \frac{u_{i+1}}{h} + (\lambda - \frac{1}{h})u_i, \quad (9)$$

gdzie $i = 1, 2, 3, \dots$

Prawa strona równości (9) określa operator ograniczony A zdefiniowany przez nieskończoną macierz współczynników. Zatem

operator ten jest generatorem półgrup $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ działający np. w przestrzeni l^1 z normą

$$\|u\| = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|. \quad (10)$$

Wykonując elementarne rachunki można pokazać, że operator A posiada widmo punktowe

$$\sigma_p(A) = \{\lambda - \frac{1}{h} + \mu \frac{1}{h} : |\mu| < 1\}. \quad (11)$$

oraz wektory własne $w_\mu = [\mu \ \mu^2 \ \mu^3 \ \dots]^T$.

Wykorzystując twierdzenie 4.2 z pracy [4] można pokazać, że jeżeli $1/h > \lambda > 0$, to rozważana w przykładzie półgrupa $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ jest chaotyczna (hipercykliczna). Podobnie sam operator A jest chaotyczny i zatem odpowiedni dynamiczny układ dyskretny generowany przez iteracje A jest chaotyczny.

Jeżeli w aproksymacji (9) zastosujemy iloraz różnicowy wsteczny, to otrzymana w podobny sposób półgrupa nie będzie chaotyczna.

Układ dynamiczny $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ rozważany w przykładzie jest związany z nieskończonym układem równań różniczkowych

$$\dot{u}_i = (\lambda - 1/h)u_i + u_{i+1}/h, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Przyjmując dodatnie warunki początkowe, można zauważyć, że $u_i \geq 0$ dla wszystkich i . Zatem układ (12) jest systemem dodatnim. Sumując stronami równości (12) i wykorzystując normę (10) otrzymamy

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\| = \lambda \|u(t)\| - u_1(t)/h. \quad (13)$$

Dla $\lambda > 0$ układ (13) jest niestabilny. Norma $\|u(t)\|$ rośnie, co oznacza że w układzie mogą pojawiać się lawinowo nowe elementy $u_i \geq 0$. Jeżeli $\lambda < 0$, to układ (13) jest wykładniczo stabilny. Zatem jego wszystkie trajektorie są ograniczone i żadna nie może być gęsta w l^1 co oznacza, że w układzie chaos nie może się pojawić.

4. Turbulencje w układzie LC

Precyzyjne definicje trajektorii silnie turbulentnej można znaleźć np. w pracy [9]. Okazuje się, że jeżeli w układzie dynamicznym istnieje trajektorja silnie turbulentna, to w tym układzie istnieje również nietrywialna ergodyczna miara niezmiennicza. W przypadku układów dyskretnych trajektorja turbulentna jest zdefiniowana jako trajektorja, która nie jest stała ani okresowa [8]. W tej części pracy zajmiemy się drabinkowym układem elektrycznym typu LC, w którym powstają trajektorie nieregularne (nie stałe i nie okresowe) w wyniku mieszania przebiegów czasowych o niewspółmiernych częstościach. Mieszanie w tym przypadku ma inną naturę, niż mieszanie topologiczne rozważane w pracy [11].

Rozważmy równanie liniowe różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu opisujące tak zwana linię długa typu LC

$$LC \frac{\partial^2 x(t, z)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x(t, z)}{\partial z^2}, \quad t \geq 0, \quad z \in [0, 1]. \quad (14)$$

oraz

$$x(t, 0) = 0, \quad x(t, 1) = 0. \quad (15)$$

Dane są również warunki początkowe $x(0, z)$ oraz $\dot{x}(0, z)$. Następnie dokonajmy dyskretyzacji zmiennej przestrzennej z

$$z_i = ih, \quad h = \frac{1}{M}, \quad M = n+1, \quad i = 0, 1, \dots, M. \quad (16)$$

Dalej niech $x(t, ih) = x_i(t)$ oraz

$$\frac{\partial^2 x(t, z)}{\partial z^2} \cong \left(\frac{x(t, z+h) - x(t, z)}{h} - \frac{x(t, z) - x(t, z-h)}{h} \right) / h. \quad (17)$$

Zatem problem (14), (15) może być aproksymowany przez układ drabinkowy typu LC pokazany na rys. 1 i opisany następującym równaniem różniczkowym wektorowo-macierzowym

$$\ddot{x}(t) + Ax(t) = 0, \quad x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T. \quad (18)$$

Dla przykładu, macierz A dla $n = 5$ ma następującą postać

$$A = \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \omega^2 = \frac{h^2}{LC}. \quad (19)$$

Częstości drgań własnych układu (18) dane są następującą równością [5, 6]

$$\omega_i = \frac{1}{(n+1)\sqrt{LC}} \frac{2}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi_i}{2}, \quad \varphi_i = \frac{i\pi}{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (20)$$

Dla przykładu dla $n = 2$ oraz $LC = 1$ mamy

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \sqrt{3}. \quad (21)$$

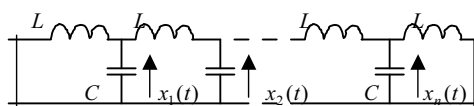
Natomiast dla $n = 5$ oraz $LC = 1$ z równości (20) otrzymujemy

$$\omega_1 = \sqrt{2-\sqrt{3}}, \quad \omega_2 = 1, \quad \omega_3 = \sqrt{2}, \quad \omega_4 = \sqrt{3}, \quad \omega_5 = \sqrt{2+\sqrt{3}}. \quad (22)$$

Z równości (20) oraz (21) i (22) widać, że częstości drgań własnych obwodu elektrycznego (18) są niewspółmierne. Podobna sytuacja powtarza się dla większych n .

Ogólne rozwiązanie równania (18) ma postać

$$x(t) = \cos(\sqrt{A}t)x(0) + (\sqrt{A})^{-1} \sin(\sqrt{A}t)\dot{x}(0). \quad (23)$$



Rys. 1. Układ drabinkowy typu LC
Fig. 1. LC - electric ladder network

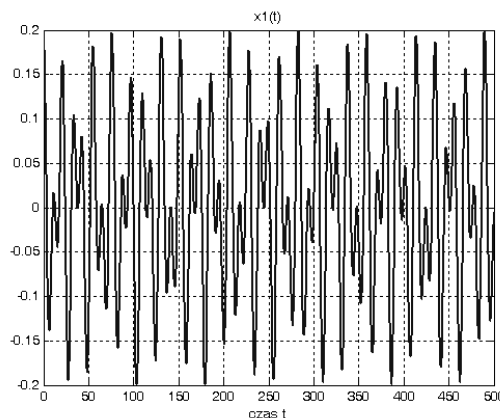
Symulacje komputerowe. Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla $LC = 1$ oraz przy różnych $M = n+1$. Przy rysowaniu portretów fazowych przyjęto oznaczenia

$$x1 = x, \quad x2 = \dot{x}. \quad (24)$$

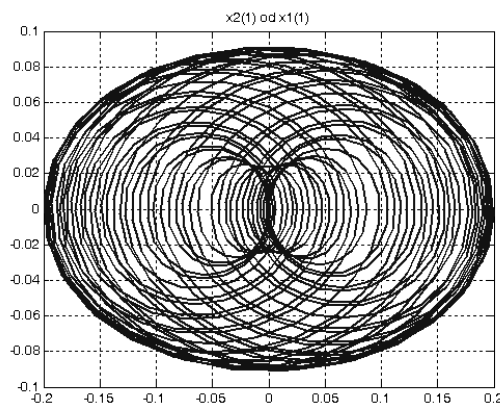
Np. symbol $x1(1)$ występujący na rys. 2 (zobacz tytuł na górze rys.2) oznacza napięcie $x_1(t)$ na odpowiedniej pojemności pokazanej na rys. 1.

Na rys. 2 pokazano przebieg czasowy napięcia $x_1(t)$ w układzie pokazanym na rys. 1 dla $n = 2$. Na rys. 3 przedstawiono trajektorie fazową $x_1 \times \dot{x}_1$ elektrycznego układu drabinkowego z rys. 1.

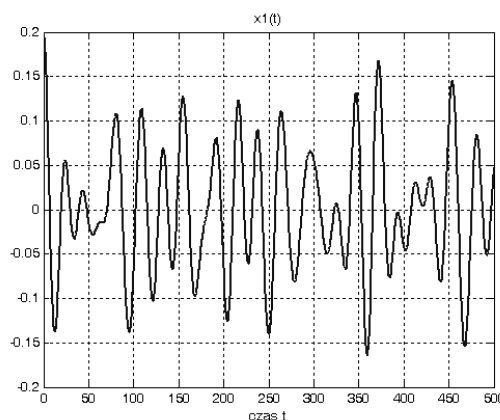
Następnie stopniowo zwiększano n . Na kolejnych rysunkach przedstawiono analogiczne wykresy jak na rys. 2 i 3, ale odpowiednio dla $n = 5, 10$ i 20 , przy czym dla $n = 20$ zwiększono znacznie czas symulacji.



Rys. 2. Trajektoria w układzie LC dla $n = 2$
Fig. 2. Trajectory in electric ladder network for $n = 2$

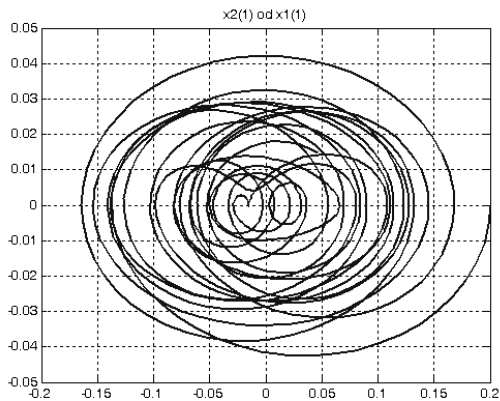


Rys. 3. Trajektoria fazowa w układzie LC dla $n = 2$
Fig. 3. Phase trajectory in electric ladder network for $n = 2$

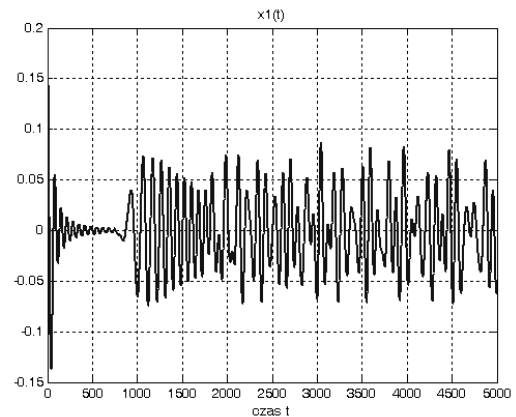


Rys. 4. Trajektoria fazowa w układzie LC dla $n = 5$
Fig. 4. Phase trajectory in electric ladder network for $n = 5$

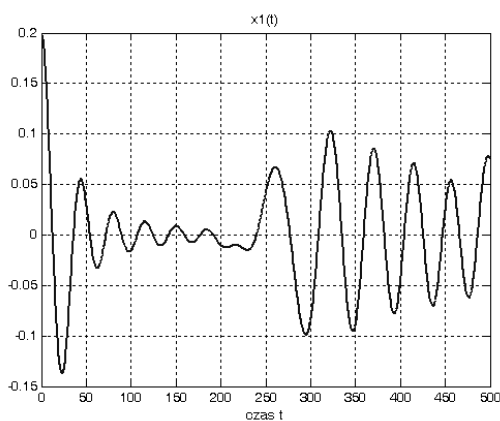
W wyniku mieszania funkcji o częstościach niewspółmiernych powstają nie regularne przebiegi czasowe, zauważone już w roku 1932 i nazwane funkcjami prawie okresowymi w sensie Besicovitcha. Praktycznie zewnętrzny obserwator, nie znający mechanizmu powstawania takich drgań turbulentnych odbiera je jako drgania chaotyczne. Dobrze przeprowadzona analiza częstotliwościowa pozwala wykryć w takim sygnale widmo złożone z izolowanych przeliczalnych częstości drgań własnych.



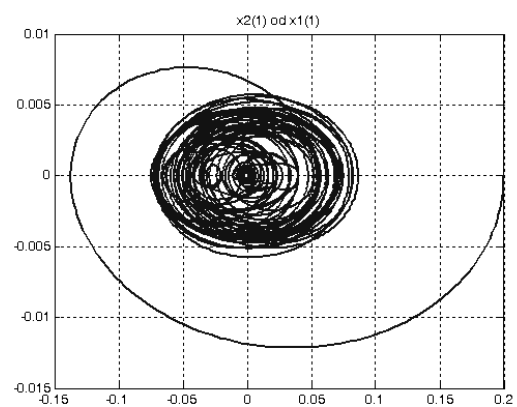
Rys. 5. Trajektoria fazowa w układzie LC dla $n = 5$
Fig. 5. Phase trajectory in electric ladder network for $n = 5$



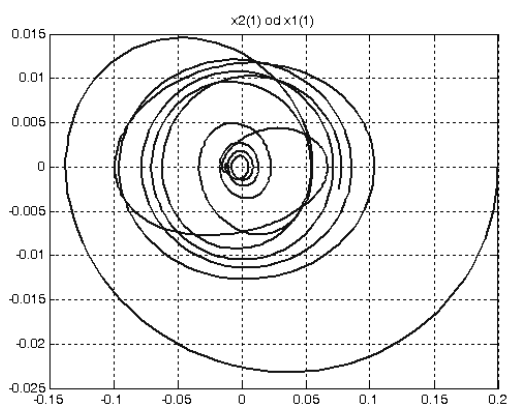
Rys. 8. Trajektoria fazowa w układzie LC dla $n = 20$
Fig. 8. Phase trajectory in electric ladder network for $n = 20$



Rys. 6. Trajektoria fazowa w układzie LC dla $n = 10$
Fig. 6. Phase trajectory in electric ladder network for $n = 10$



Rys. 9. Trajektoria fazowa w układzie LC dla $n = 20$
Fig. 9. Phase trajectory in electric ladder network for $n = 20$



Rys. 7. Trajektoria fazowa w układzie LC dla $n = 10$
Fig. 7. Phase trajectory in electric ladder network for $n = 10$

5. Wnioski

W pracy rozważano chaotyczne liniowe układy dynamiczne, zwracając szczególną uwagę na chaos numeryczny oraz pokazując istnienie dziwnych zachowań w elektrycznym układzie drabinkowym typu LC. Zwykle chaos potocznie rozumiany jest wiązany z dynamiką nieliniową. Liczne przykłady liniowej nieskończonej wymiarowej dynamiki chaotycznej można znaleźć w pracy [4]. Przystępnie ogólną teorię chaosu przedstawiono w pracach [12, 3, 7, 11].

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2008-2011 jako projekt badawczy nr N N514 414034.

6. Literatura

- [1] Devaney R.L.: An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., California 1987.
- [2] Chen G. (ed): Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems. CRC Press, London 2000.
- [3] Hirsch M.W., Smale S., Devaney R.L.: Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos. Elsevier (USA), Amsterdam 2004.
- [4] Banasiak J.: Chaotyczne liniowe układy dynamiczne: teoria i zastosowania. Wiadomości Matematyczne, PTM, XLI, 2005, 51-79.
- [5] Mitkowski W.: Dynamic Feedback in LC Ladder Network. Bul. Pol. Ac. Sci., Tech. Sci., Vol. 51, No.2, 2003, 173-180.
- [6] Mitkowski W.: Stabilisation of LC ladder network. Bul. Pol. Ac. Sci., Tech. Sci., Vol. 52, No.2, 2004, 109-114.
- [7] Rudnicki R.: Chaos for some infinite-dimensional dynamical systems. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 27, 2004, 723-738.
- [8] Dawidowicz A.L.: Metoda Aweza i jej uogólnienia. Matematyka Stosowana. Nr 8 (49), 2007, 46-55.
- [9] Dawidowicz A.L., Twardowska K.: Twierdzenie aproksymacyjne typu Wonga-Zakai dla operatora Lasoty. Matematyka Stosowana. Nr 8 (49), 2007, 56-65.
- [10] Pelczar A., Szarski J.: Wstęp do teorii równań różniczkowych. Część I. Wstęp do teorii równań zwyczajnych i równań cząstkowych pierwszego rzędu. PWN, Warszawa 1987.
- [11] Oprocha P.: Mieszanie topologiczne w dyskretnych układach dynamicznych - krótkie wprowadzenie. Automatyka, t. 12, z. 1, 2008, 77-88.
- [12] Kwietniak D., Oprocha P.: „Teoria chaosu” w ujęciu matematycznym. Matematyka Stosowana. Nr 9 (50), 2008, 1-45.