

**Dariusz JANECKI, Jarosław ZWIERZCHOWSKI**

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA, WYDZIAŁ MECHATRONIKI I BUDOWY MASZYN,  
CENTRUM LASEROWYCH TECHNOLOGII METALI

## Podstawy teoretyczne oceny profili walcowości obrotowych części maszyn metodą klatki Część III: Wyznaczanie linii środkowej walca zaobserwowanego

Dr hab. inż. Dariusz JANECKI

Obecnie jest kierownikiem katedry Automatyki i Robotyki i z-cą dyr. Centrum Laserowych Technologii Metali na Wydziale Mechatroniki i Budowy Maszyn. Zainteresowania naukowe: metrologia powierzchni, automatyka i robotyka, cyfrowe przetwarzanie sygnałów, komputerowe systemy pomiarowe.



e-mail: djaneck@tu.kielce.pl

Mgr inż. Jarosław ZWIERZCHOWSKI

Asystent w Centrum Laserowych Technologii Metali. Zainteresowania: Automatyka i Robotyka, Techniki Mikroprocesorowe, Metrologia oraz cyfrowe przetwarzanie sygnałów połączone z metrologią powierzchni.



e-mail: jzwierzchowski@tu.kielce.pl

### Streszczenie

W pracy zaproponowano algorytm wyznaczania linii środkowej walca zaobserwowanego metodą przekrojów wzdłużnych i metodą klatki pomiaru walcowości. W celu wyeliminowania wpływu składowych falistości zastosowano filtrację ocen punktów linii środkowej wykorzystującą podejście funkcjonalowe.

**Słowa kluczowe:** walcowość, metoda pomiarowa klatki, linia środkowa.

### Theoretical background of cylindricity profile evaluation of rotary parts by means of the bird-cage measuring method Part III: Calculation of the cylinder median line

#### Abstract

The median line of a cylinder measured with the cross-section method is determined on the basis of the centre points of the mean circles of several subsequent cross-sections roundness profiles. Basically, the same principles could be used in the generatrix method. There may be, however, a large scatter of results due to a small number of measurement points with predetermined height coordinates and the occurrence of a waviness component in the cylindricity profile. The method for determination of the median line discussed in this paper involves filtering the measured points by applying the functional approach, as suggested by Krystek in Refs. [2, 3]. It is assumed that the coordinates of the measured median line points minimise the functional (13). One component of the functional assures appropriate approximation of the centres of the mean circles by means of the median line, and the other, termed the cost of curve bending, assures suitable smoothness of the median line eliminating the effect of the waviness components. A similar concept was employed in the bird-cage method, which is actually the combination of the cross-section and generatrix method. In this method, the median line points defined with the cross-section method are taken into account with appropriately greater weight than the points measured with the generatrix method (17). In the examples provided, the median line of a polished roller with a strong waviness component was determined for different cylindricity measurement methods.

**Keywords:** cylindricity, bird-cage method, median line.

## 1. Wprowadzenie

Jednym z parametrów oceny powierzchni walcowych jest ocena prostoliniowości tzw. linii środkowej zaobserwowanej walca. Dotychczas ocena położenia punktów linii środkowej przeprowadzana była jedynie dla pomiarów wykonanych metodą przekrojów poprzecznych. W tej pracy przedstawiamy metodę wyznaczania linii środkowej dla pomiarów wykonanych metodą przekrojów wzdłużnych i metodą klatki. Do wyznaczenia oceny linii środkowej zastosowano w tych przypadkach metodę filtracji wykorzystującą podejście funkcjonalowe.

W pracy stosujemy oznaczenia wprowadzone w części pierwszej [1].

## 2. Matematyczna definicja linii środkowej walca

Rozważmy profil okrągłości otrzymany przez przecięcie profilu powierzchni walcowej  $r_{\text{cyl}}(\varphi, z)$  płaszczyzną prostopadłą do osi i leżącej na wysokości  $z$ . Oznaczmy współrzędne  $(x, y)$  środka okręgu średniego tego profilu przez  $e_x(z)$ ,  $e_y(z)$ . Linia utworzona przez punkty o współrzędnych  $(e_x(z), e_y(z), z)$ , gdzie  $z \in [0, H]$  nosi nazwę linii środkowej powierzchni walca.

Zakładamy, że oś  $Z$  w niewielkim stopniu odbiega od osi nominalnej walca. W tym przypadku równanie okręgu o promieniu  $R_o$  i środku  $e_x(z)$ ,  $e_y(z)$  możemy zapisać w postaci:

$$R_{\text{circle}}(\varphi) = R_o(z) + e_x(z) \cos \varphi + e_y(z) \sin \varphi. \quad (1)$$

Współrzędne środka okręgu znajdziemy minimalizując funkcjonal

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r_{\text{cyl}}(\varphi, z) - R_o(z) - e_x(z) \cos \varphi - e_y(z) \sin \varphi)^2 d\varphi \quad (2)$$

względem  $R_o(z)$ ,  $e_x(z)$ ,  $e_y(z)$ , co daje:

$$e_x(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} r_{\text{cyl}}(\varphi, z) \cos(\varphi) d\varphi, \quad (3)$$

$$e_y(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} r_{\text{cyl}}(\varphi, z) \sin(\varphi) d\varphi.$$

Linia środkowa pozwala wyznaczyć jeden z parametrów określających odstępstwa powierzchni walcowej od powierzchni walca idealnego nazwany prostoliniowością linii środkowej. Prostoliniowością linii środkowej nazywamy średnicę najmniejszego walca zawierającego linię środkową. Matematyczną definicję tego parametru możemy sformułować następująco. W układzie współrzędnych XYZ równanie parametryczne prostej zapisać możemy w postaci

$$(x, y, z) = (E_x + D_x z, E_y + D_y z, z). \quad (4)$$

Zwróćmy uwagę, że parametry  $E_x, E_y$  są współzrędnymi przecięcia prostej z płaszczyzną  $XY$ , zaś  $D_x, D_y$  określają pochylenie prostej w stosunku do osi  $Z$ . Jeżeli wartości  $D_x, D_y$  są małe to możemy przyjąć, że odległość punktu  $(e_x(z), e_y(z), z)$  od osi (4) jest równa

$$\sqrt{(e_x(z) - E_x - D_x z)^2 + (e_y(z) - E_y - D_y z)^2}. \quad (5)$$

Zatem parametry osi najmniejszego walca opisanego na linii środkowej oraz średnicę tego walca znajdziemy rozwiązując zadanie programowania nieliniowego

$$\Delta D_{MZ} = D_{\max} \rightarrow \min_{(E_x, D_x, E_y, D_y)} \quad (6)$$

$$D_{\max} = \max_{0 \leq z \leq H} 2\sqrt{(e_x(z) - E_x - D_x z)^2 + (e_y(z) - E_y - D_y z)^2} \quad (7)$$

W powyższej definicji indeks MZ podkreśla, że parametr wyznaczony został na podstawie kryterium minimalnej strefy. Alternatywnym sposobem zdefiniowania parametru jest wykorzystanie kryterium najmniejszych kwadratów. Wtedy

$$\Delta D_{LS} = \max_{0 \leq z \leq H} 2\sqrt{(e_x(z) - E_x - D_x z)^2 + (e_y(z) - E_y - D_y z)^2}, \quad (8)$$

gdzie  $E_x, D_x, E_y, D_y$  są parametrami prostej regresji linii środkowej. Można pokazać, że prosta regresji linii środkowej jest jednocześnie osią walca średniego powierzchni.

### 3. Wyznaczanie ocen punktów linii środkowej profilu zaobserwowanego metodą przekrojów poprzecznych

W tym przypadku wyznacza się punkty linii środkowej leżące w przekrojach walca, w których wykonano pomiary. Odpowiednikiem funkcjonału (2) jest obecnie funkcjonał

$$J_j^c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_c} (r_{ij}^c - R_{oj} - e_{xj}^c \cos \varphi_i^c - e_{yj}^c \sin \varphi_i^c)^2 \quad (9)$$

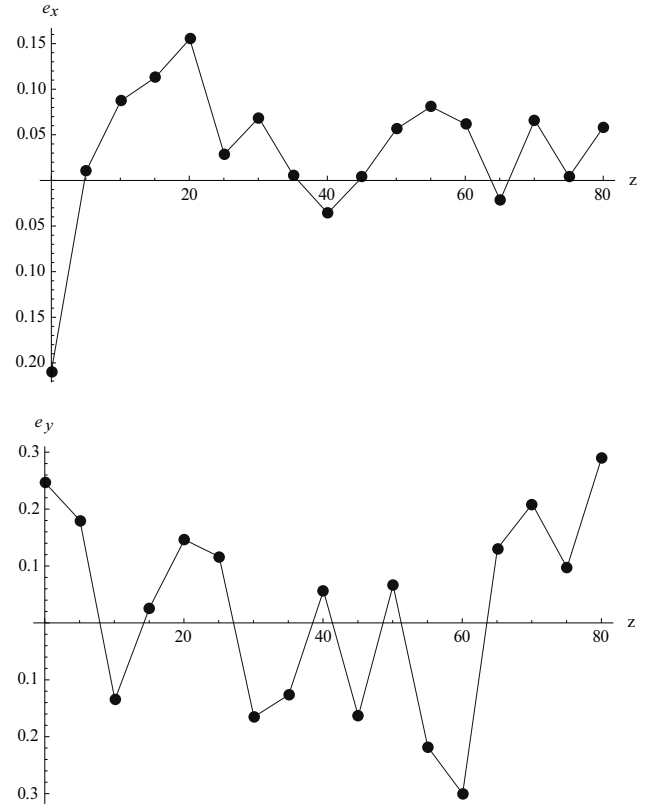
skąd wykorzystując fakt równomiernego próbkowania profilu otrzymujemy

$$e_{xj}^c = \frac{2}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} r_{ij}^c \cos \varphi_i^c, \quad (10)$$

$$e_{yj}^c = \frac{2}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} r_{ij}^c \sin \varphi_i^c, \quad j = 1, \dots, M_c.$$

Wartość parametru prostoliniowości osi wyznaczamy z (6), gdzie obecnie  $D_{\max} = \max_{1 \leq j \leq M_c} 2\sqrt{(e_{xj}^c - E_x - D_x z)^2 + (e_{yj}^c - E_y - D_y z)^2}$ .

Warto zwrócić uwagę, że ze względu na dużą liczbę próbek stosowaną z reguły przy pomiarach okrągłości oraz ze względu na własności uśredniające wzorów (10), które minimalizują błędy wywołane szumem pomiarowym i drganiami przyrządu wyznaczone oceny punktów linii środkowej pokrywają w przybliżeniu z rzeczywistymi punktami linii, czyli  $e_x(z_i) \cong e_{xj}^c, e_y(z_j) = e_{yj}^c$ . Z kolei liczba otrzymanych ocen punktów linii środkowej jest z reguły niewielka ze względu na niewielką liczbę wykorzystywanych przekrojów poprzecznych. Na rysunku 1 pokazano wykresy wyznaczonych ocen współrzędnych punktów linii środkowej dla przykładowych pomiarów walcowości metodą przekrojów poprzecznych.



Rys. 1. Wykresy ocen punktów linii środkowej dla przykładowych pomiarów walcowości metodą przekrojów poprzecznych  
Fig. 1. Estimates of medial line points for exemplary cylindricity measurements obtained by the cross-section method

### 4. Wyznaczanie ocen punktów linii środkowej profilu zaobserwowanego metodą przekrojów wzdłużnych

Obecnie sytuacja jest odmienna. Jesteśmy w stanie wyznaczyć ocenę dla każdej wartości  $z = z_j^\ell$ , gdzie indeks  $j$  przebiega przez wszystkie numery próbek w danym przekroju wzdłużnym  $j = 1, 2, \dots, M_\ell$ . Jednak każda z tych ocen wyznaczana jest na podstawie zaledwie kilku punktów zaobserwowanego profilu, ponieważ z reguły liczba mierzonych przekrojów wzdłużnych jest niewielka. Z tego powodu, na ocenę współrzędnych punktów profilu duży wpływ będą miały szumy pomiarowe, przypadkowe drgania, a przede wszystkim falistość powierzchni mierzonego walca.

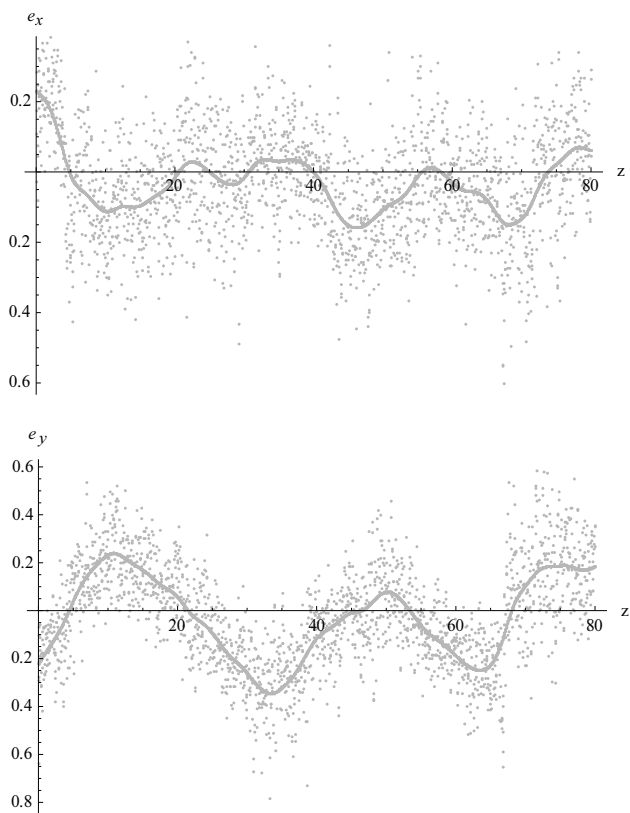
Podobnie jak wcześniej wartości ocen wyznaczamy minimalizując funkcjonał

$$J_j^\ell = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_\ell} (r_{ij}^\ell - R_{oj} - e_{xj}^\ell \cos \varphi_i^\ell - e_{yj}^\ell \sin \varphi_i^\ell)^2 \quad (11)$$

skąd w przypadku ogólnym otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_\ell} \cos^2 \varphi_i^\ell & \sum_{i=1}^{N_\ell} \cos \varphi_i^\ell \sin \varphi_i^\ell & \sum_{i=1}^{N_\ell} \cos \varphi_i^\ell \\ \sum_{i=1}^{N_\ell} \cos \varphi_i^\ell \sin \varphi_i^\ell & \sum_{i=1}^{N_\ell} \sin^2 \varphi_i^\ell & \sum_{i=1}^{N_\ell} \sin \varphi_i^\ell \\ \sum_{i=1}^{N_\ell} \cos \varphi_i^\ell & \sum_{i=1}^{N_\ell} \sin \varphi_i^\ell & N_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xj}^\ell \\ e_{yj}^\ell \\ R_{oj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_\ell} r_{ij}^\ell \cos \varphi_i^\ell \\ \sum_{i=1}^{N_\ell} r_{ij}^\ell \sin \varphi_i^\ell \\ \sum_{i=1}^{N_\ell} r_{ij}^\ell \end{bmatrix} \quad (12)$$

Na rysunku 2 pokazano wykresy punktowe wyznaczonych współrzędnych ocen punktów linii środkowej dla przykładowych pomiarów walцовości wykonanych metodą przekrojów wzdłużnych (wałeczek szlifowany). Widzimy, że istotnie istnieje duży rozrzut otrzymanych punktów będący efektem wysokiej amplitudy składowej falistości. Wydaje się, że dla wyodrębnienia linii środkowej najrozsądniejsze będzie dokonanie filtracji otrzymanych przebiegów. Do filtracji zastosujemy filtr wykorzystujący podejście funkcjonalne opisane bardziej szczegółowo w pracach [2-6]. Podejście to umożliwia wyeliminowanie tzw. efektu brzegowego.



Rys. 2. Ocena linii środkowej na podstawie pomiarów wykonanych metodą przekrojów wzdłużnych przy dużej składowej falistości powierzchni walca  
Fig. 2. Evaluation of the median line for cylindricity measurements obtained by the generatrix method

Przyjmujemy, że współrzędne punktów linii środkowej zaobserwowanej minimalizują funkcjonal

$$J = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M_\ell} ((e_{xj}^\ell - e_{xj}^c)^2 + (e_{yj}^\ell - e_{yj}^c)^2) + \frac{\gamma_z}{2} \sum_{i=2}^{M_\ell-1} ((\nabla^2 e_{xi}^\ell)^2 + (\nabla^2 e_{yi}^\ell)^2), \quad (13)$$

gdzie symbol  $\nabla^2 x_i$  oznacza iloraz różnicowy drugiego rzędu ciągu  $x_i$  [7, wzór (13)]. Żądane tłumienie filtra otrzymujemy przyjmując

$$\gamma_z = (\lambda_c / (2\pi \Delta z))^4, \quad (14)$$

gdzie  $\lambda_c$  jest żadaną długością fali odcięcia filtra (ang. *cutoff length*), zaś  $\Delta z$  jest odcinkiem próbkowania profilu prostoliniowości. Z warunku minimalizacji funkcjonalu (13) otrzymujemy

$$(\mathbf{I}_{M_\ell} + \gamma_z \mathbf{\Gamma}^\ell) \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x^c, \quad (\mathbf{I}_{M_\ell} + \gamma_z \mathbf{\Gamma}^\ell) \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y^c, \quad (15)$$

gdzie  $\mathbf{I}_{M_\ell} \in R^{M_\ell \times M_\ell}$  jest macierzą jednostkową, macierz  $\mathbf{\Gamma}^\ell$  jest zdefiniowana przez

$$\mathbf{\Gamma}^\ell = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & & & \\ -2 & 5 & -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & 1 & -4 & 5 & -2 \\ & & & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

i

$$\mathbf{e}_x = [e_{x1} \ e_{x2} \ \dots \ e_{xM_\ell}]^T, \quad \mathbf{e}_y = [e_{y1} \ e_{y2} \ \dots \ e_{yM_\ell}]^T,$$

$$\mathbf{e}_x^c = [e_{x1}^c \ e_{x2}^c \ \dots \ e_{xM_\ell}^c]^T, \quad \mathbf{e}_y^c = [e_{y1}^c \ e_{y2}^c \ \dots \ e_{yM_\ell}^c]^T.$$

Na rysunku 2 przedstawiono również przebiegi przefiltrowane z  $\lambda_c = 8$  mm, które już mogą posłużyć do wyznaczenia parametru prostoliniowości osi.

## 5. Wyznaczanie ocen punktów linii środkowej profilu zaobserwowanego metodą klatki

Do wyznaczenia linii środkowej zaobserwowanej powinny być wykorzystane zarówno pomiary w przekrojach poprzecznych jak i wzdłużnych. Do tego celu wykorzystamy otrzymane oceny współrzędnych punktów linii środkowej przekrojów poprzecznych  $(e_{xj}^c, e_{yj}^c)$ ,  $j = 1, \dots, M_c$  i wzdłużnych  $(e_{xj}^\ell, e_{yj}^\ell)$ ,  $j = 1, \dots, M_\ell$ . Jednak ponieważ oceny  $(e_{xj}^c, e_{yj}^c)$  wyznaczone są na podstawie znacznie większej liczby punktów pomiarowych niż  $(e_{xj}^\ell, e_{yj}^\ell)$  powinny być one uwzględnione z większą wagą. Podobnie jak poprzednio zastosujemy podejście funkcjonalne. Przyjmujemy, że współrzędne punktów linii środkowej zaobserwowanej powinny minimalizować sumę

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M_c} ((e_{xi}^c - e_{xi}^\ell)^2 + (e_{yi}^c - e_{yi}^\ell)^2) + \frac{N_c}{2N_\ell} \sum_{i=1}^{M_c} ((e_{xi}^c - e_{xi}^\ell)^2 + (e_{yi}^c - e_{yi}^\ell)^2) + \frac{\gamma_z}{2} \sum_{i=2}^{M_\ell-1} ((\nabla^2 e_{xi}^\ell)^2 + (\nabla^2 e_{yi}^\ell)^2). \quad (17)$$

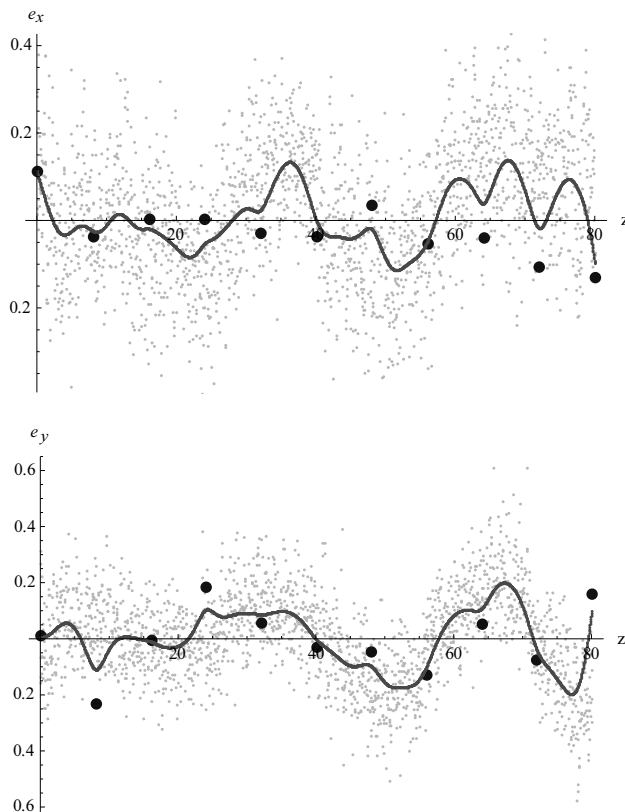
Stąd otrzymujemy

$$\left( \mathbf{I}_{M_\ell} + \frac{N_c}{N_\ell} \mathbf{P}^T \mathbf{P} + \gamma_z \mathbf{\Gamma}^\ell \right) \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x^\ell + \mathbf{P}^T \mathbf{e}_x^c, \quad (18)$$

$$\left( \mathbf{I}_{M_\ell} + \frac{N_c}{N_\ell} \mathbf{P}^T \mathbf{P} + \gamma_z \mathbf{\Gamma}^\ell \right) \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y^\ell + \mathbf{P}^T \mathbf{e}_y^c,$$

gdzie  $\mathbf{P} \in R^{M_c \times M_\ell}$  jest macierzą, w której elementy o indeksach  $(m, j_m)$ ,  $m = 1, \dots, M_c$  są równe 1, a pozostałe elementy są równe zeru i  $\mathbf{e}_x^c = [e_{x1}^c \ e_{x2}^c \ \dots \ e_{xM_c}^c]^T$ ,  $\mathbf{e}_y^c = [e_{y1}^c \ e_{y2}^c \ \dots \ e_{yM_c}^c]^T$ .

Na rysunku 3 przedstawiono otrzymaną w ten sposób zaobserwowaną linię środkową walca otrzymaną na podstawie pomiarów metodą klatki. Na rysunku dodatkowo zaznaczono położenie ocen punktów linii środkowej otrzymanej za pomocą pomiarów metodą przekrojów poprzecznych i przekrojów wzdłużnych. Widzimy, że otrzymana linia środkowa aproksymuje otrzymane oceny punktów.



Rys. 3. Zaobserwowana linia środkowa walca otrzymana na podstawie pomiarów metodą klatki.

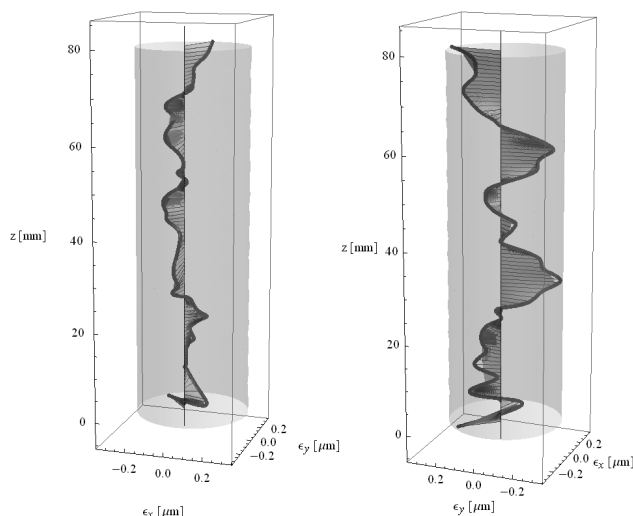
Fig. 3. The observed median line for cylindricity measurements obtained by the bird-cage method

Na rys. 4 przedstawiono przestrzenną wizualizację otrzymanej linii środkowej wraz z powierzchnią najmniejszego walca zawierającego linię środkową. Średnica walca wyniosła

$$\Delta D_{MZ} = 0,453 \mu\text{m}.$$

Z kolei podwojona maksymalna odległość od osi średniej walca wynosi

$$\Delta D_{LS} = 0,483 \mu\text{m}.$$



Rys. 4. Przestrzenna wizualizacja linii środkowej walca wraz powierzchnią najmniejszego walca zawierającego linię środkową

Fig. 4. Three-dimensional visualization of the cylindricity median line together with the minimum circumscribed cylinder

Widzimy, że w rozważanym przypadku różnice są stosunkowo niewielkie. Jednak w szczególnych przypadkach różnice te mogą być znaczne [8].

## 6. Podsumowanie

W metodzie przekrojów poprzecznych pomiaru walцовości ocenę linii środkowej walca zaobserwowanego dokonuje się na podstawie środków okręgów średnich profili okrągłości kolejnych przekrojów walca. W zasadzie analogiczną metodę można by zastosować w metodzie przekrojów wzdłużnych. Jednak ze względu na niewielką liczbę punktów pomiarowych o zadanej współrzędnej wysokości otrzymany zbiór punktów może charakteryzować się dużym rozrzutem ze względu na występującą składową falistości profilu walцовości. W pracy zaproponowano metodę wyznaczania linii środkowej polegającą na filtracji otrzymanych punktów wykorzystującą podejście funkcjonalowi zaproponowane w pracach Krystka [2, 3]. Podobną ideę zastosowano w metodzie klatki będącą kombinacją przekrojów poprzecznych i wzdłużnych. W tym przypadku oceny punktów linii środkowej otrzymanych na podstawie przekrojów poprzecznych uwzględniane są z odpowiednio dużą wagą w stosunku do ocen punktów otrzymanych na podstawie przekrojów poprzecznych. Podano przykłady wyznaczonej linii środkowej otrzymanej na podstawie różnych metod pomiaru walцовości wałeczka polerowanego charakteryzującego się dużą składową falistości powierzchni.

Praca została wykonana w ramach projektu badawczego KBN nr 4 T07D 021 27. Oprogramowanie komputerowe, w którym zaimplementowano przedstawione algorytmy dostępne są na stronie <http://cltm.tu.kielce.pl/~math/cage>.

## 7. Literatura

- [1] Janecki D., Zwierzchowski J.: Podstawy teoretyczne oceny profili walцовości obrotowych części maszyn metodą klatki – część pierwsza: zagadnienie optymalnego dopasowania profili, *Pomiary Automatyka Kontrola*, nr 9, str. 715-722, 2009.
- [2] Krystek M.: Form filtering by splines. *Measurement Vol. 18*, No 1/1996, pp 9 – 15.
- [3] Krystek M.: Discrete L-spline filtering in roundness measurements. *Measurement Vol. 18*, No. 2/1996, pp. 129 – 138.
- [4] Üstüner K.F., Ferrari L.A., Discrete splines and spline filters, *IEEE Trans. Circuit and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 39, 1992, pp. 417-422.
- [5] Unser M., Aldroubi A., Eden M., B-spline signal processing: Part I – Theory, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, 1993, pp. 821-833.
- [6] Feng G., Data smoothing by cubic spline filters, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, 1998, pp. 2790-2796.
- [7] Janecki D., Zwierzchowski J.: Podstawy teoretyczne oceny profili walцовości obrotowych części maszyn metodą klatki – część druga: metoda filtracji wykorzystująca podejście funkcjonalowi, *Pomiary Automatyka Kontrola*, nr 12, str. 1017-1022, 2009.
- [8] Janecki D., Adamczak S.: Least-Squares versus minimum-zone deviations, *XVI IMEKO World Congress*, Wiedeń, Austria 2000, pp. 133-138.

otrzymano / received: 20.06.2009

przyjęto do druku / accepted: 04.01.2010

artykuł recenzowany