

**Włodzimierz STANISŁAWSKI, Marek RYDEL**

POLITECHNIKA OPOLSKA, WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI I INFORMATYKI

## Problemy konstruowania modeli hierarchicznych złożonych obiektów sterowania (cz. I)

Dr hab. inż. Włodzimierz STANISŁAWSKI

Studia i doktorat na Wydziale Automatyki, Elektroniki i Informatyki Politechniki Śląskiej. Habilitacja na Uniwersytecie Elektrotechnicznym w Sankt Petersburgu. Od 2003 stanowisko profesora Politechniki Opolskiej. Kieruje Zakładem Informatyki. Zainteresowania naukowe obejmują zagadnienia związane z modelowaniem i symulacją komputerową złożonych obiektów sterowania, a w szczególności bloków energetycznych. Od 1 września 2008 pełni funkcję prodziekana Wydziału ds. naukowych.

e-mail: w.stanislawski@po.opole.pl



Dr inż. Marek RYDEL

Jest pracownikiem Wydziału Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki Politechniki Opolskiej. W 2002 uzyskał stopień mgra inż. na Wydziale Elektroniki Politechniki Wrocławskiej, a w roku 2009 stopień doktora w dyscyplinie Automatyka i Robotyka na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki Politechniki Opolskiej. Jego zainteresowania naukowe obejmują zagadnienia związane z tworzeniem, redukcją oraz badaniami hierarchicznych modeli złożonych obiektów sterowania.

e-mail: m.rydel@po.opole.pl



### Streszczenie

Zagadnienia prezentowane w artykule są związane z budową zregulowanych hierarchicznych modeli dynamicznych obiektów sterowania o wielkiej złożoności. Przedstawiono metodykę tworzenia modeli hierarchicznych z wykorzystaniem procedury agregacji, stosując redukcję modeli na poszczególnych poziomach. W miejsce jednego modelu wysokiego rzędu (model płaski, jednopoziomowy), dzięki zastosowanej metodyce, uzyskuje się zbiór modeli umieszczonych na poszczególnych poziomach hierarchii. Modele te reprezentują procesy dynamiczne typowe dla każdego poziomu hierarchii i pomijają szybkie procesy dynamiczne istotne na niższych poziomach. Im wyższy poziom hierarchii, model opisuje wolniejsze procesy oraz charakteryzuje się niższym rzędem. W części pierwszej artykułu przedstawiono metodologię oraz podstawowe metody tworzenia modeli hierarchicznych. Natomiast wyniki redukcji modeli oraz hierarchiczny model parownika kotła BP-1150 przedstawiono w części drugiej artykułu.

**Słowa kluczowe:** redukcja, agregacja, modele hierarchiczne.

### Hierarchical model construction problems of complex plants (Part I)

#### Abstract

The problems connected with building of aggregated hierarchical models of complex plants are presented in the paper. The hierarchical model building methodology, using aggregation procedure, with model reduction on separate levels is presented. Instead of one high order model (flat, one level model) thanks to presented methodology, we obtain a set of models, placed on separate levels of hierarchy. These models represent dynamical processes typical of each level and omit fast dynamical processes essential for lower levels. The higher level of the hierarchy models describe slower dynamical processes and possess lower order. The main means of aggregation is reduction of models on separate levels of hierarchy. In consequence of reduction, we obtain a lower order model, which approximate properties of original high order model, with a given error. The reduced model do not take into account part of dynamical processes which take place in a real plant, and posses a range of adequacy. The part I of the paper contains description of methods used during hierarchical models building. Concrete results obtained for hierarchical model of a once-through steam boiler BP-1150 are presented in the part II of the paper.

**Keywords:** reduction, aggregation, hierarchical model.

### 1. Wstęp

Od wielu lat mamy do czynienia z bardzo intensywnym rozwojem oprogramowania służącego do modelowania i symulacji złożonych obiektów sterowania oraz wzrostem mocy obliczeniowych komputerów, w wyniku czego w bardzo szybkim tempie rośnie złożoność modeli matematycznych obiektów sterowania [1, 2, 4, 8, 10, 11]. Szczególnie istotny wpływ na złożoność modeli ma rozwój programów do modelowania układów o czasoprzestrzennej dynamice z zastosowaniem metody elementów skończonych. Programy takie automatycznie generują znaczną liczbę

elementów skończonych, a uzyskane modele matematyczne zawierają tysiące zmiennych stanu. Tak wysoka złożoność modelu matematycznego pociąga za sobą długie czasy symulacji komputerowej, znaczne zapotrzebowanie na moc obliczeniową procesorów oraz problemy numeryczne występujące szczególnie dla modeli o dużej sztywności.

Znaczna złożoność modeli współczesnych obiektów sterowania pociąga za sobą konieczność zastosowania wielopoziomowej (hierarchicznej) struktury oraz dekompozycję na szereg prostszych do zamodelowania podsystemów. Programy symulacyjne (np. MATLAB/Simulink) udostępniają technologię budowy modeli hierarchicznych poprzez mechaniczne łączenie podsystemów o ukierunkowanym działaniu (ang. *Causal*). Hierarchiczna budowa modeli w tym środowisku obliczeniowym związana jest jednak wyłącznie z funkcjonowaniem edytora graficznego (operacje zagnieżdżania oraz maskowania modeli podsystemów). W pamięci komputera model przechowywany jest w postaci jednopoziomowej, jako układ równań różniczkowych zwyczajnych oraz algebraicznych. Taki model jest bardzo złożony i trudny do analizy ze względu na wysoki rząd, a wyciąganie wniosków o właściwościach dynamicznych obiektu na podstawie takiego modelu jest praktycznie niemożliwe.

Wielowarstwowa konstrukcja modelu wraz z dekompozycją modeli na poszczególnych poziomach hierarchicznej struktury daje możliwość analizy właściwości dynamicznych obiektu przez zastosowanie procedury agregacji. Agregacja jest przeciwieństwem dekompozycji. Jest to proces komponowania funkcjonalnej całości z podsystemów składowych. Jednym z zasadniczych środków agregacji jest redukcja modeli na poszczególnych poziomach hierarchicznej struktury. Podejście takie umożliwia stworzenie zredukowanego modelu hierarchicznego. Zawiera on zbiór modeli na każdym z poziomów hierarchii, charakteryzujących się różnymi zakresami adekwatności oraz dokładnościami aproksymacji właściwości dynamicznych obiektu sterowania.

Podczas redukcji, model pierwotny jest aproksymowany przez model niższego rzędu, zapewniający wymaganą dokładność aproksymacji. Operacja redukcji pozwala na wyeliminowanie złożonych zjawisk i procesów dynamicznych nie mających istotnego znaczenia na danym poziomie hierarchii. Model zredukowany nie uwzględnia zatem części zjawisk mających miejsce w obiekcie rzeczywistym. Charakteryzuje się on ograniczonym zakresem adekwatności, który dla modeli liniowych określa się przez przedział częstotliwości, w którym model aproksymuje właściwości obiektu zadaną dokładnością. Dolnym przedziałem zakresu adekwatności modeli obiektów sterowania jest częstotliwość zerowa, co zapewnia zgodność modeli zredukowanych z modelami pierwotnymi dla stanu ustalonego.

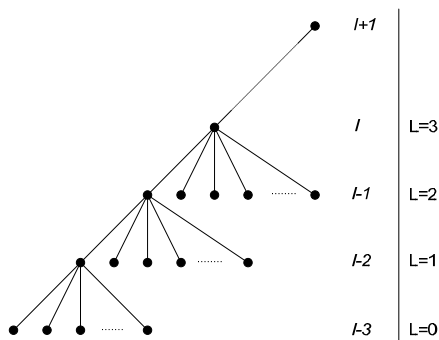
Modele matematyczne zredukowanego rzędu, adekwatne w ograniczonym przedziale częstotliwości są niezbędne ze względu na:

- skrócenie czasu symulacji komputerowej,

- umożliwienie zastosowania modeli w systemach sterowania w czasie rzeczywistym,
- zastosowanie do projektowania układów sterowania.

## 2. Koncepcja budowy modeli hierarchicznych

Dekompozycja modelu obiektu na szereg prostszych podsystemów jest szeroko stosowaną metodą modelowania złożonych obiektów i układów sterowania. Procedura dekompozycji jest wykonywana tak długo, aż będzie możliwe i celowe wyznaczenie modeli podsystemów najniższego (zerowego) poziomu. Na rys. 1 przedstawiono graf ilustrujący schemat dekompozycji modelu złożonego obiektu sterowania (wielką literą  $L$  oznaczono bezwzględną numerację poziomów modelu, natomiast małą literą  $l$  – względną).



Rys. 1. Struktura połączeń modeli podsystemów złożonego obiektu sterowania  
Fig. 1. The structure of system model connections for complex plant model

Z reguły procedura dekompozycji nie jest złożona, a programy symulacyjne (np. MATLAB/Simulink) udostępniają technologię budowy modeli hierarchicznych przez mechaniczne łączenie podsystemów o ukierunkowanym działaniu. Istotą tak skonstruowanego modelu jest fakt, że jedynie podsystemy najniższego poziomu (liście w drzewie z rys. 1) są opisane zestawem równań różniczkowych oraz algebraicznych. Na wszystkich wyższych poziomach model zawiera podsystemy należące do poziomu niższego, z określoną strukturą powiązań między nimi. Na tej podstawie model na  $l$ -tym poziomie może być przedstawiony jako zbiór modeli podsystemów poziomu  $l-1$  wraz z topologią połączeń między tymi podsystemami:

$$S_l = \langle S_{l-1}^i, P_l \rangle \text{ dla } i=1,2,\dots,n_l, \quad (1)$$

gdzie:  $n_l$  – liczba podsystemów na  $l$  – tym poziomie hierarchii,  $P_l$  – zbiór powiązań między podsystemami na poziomie  $l$ .

Poszczególne podsystemy na poziomie  $l-1$  są układami o ukierunkowanym działaniu, posiadającymi wektor wielkości wejściowych  $U_{l-1}^i = [u_{l-1}^{i,1}, u_{l-1}^{i,2}, \dots, u_{l-1}^{i,m}]$ , wektor wielkości wyjściowych  $Y_{l-1}^i = [y_{l-1}^{i,1}, y_{l-1}^{i,2}, \dots, y_{l-1}^{i,j}]$  oraz wektor stanu  $X_{l-1}^i = [x_{l-1}^{i,1}, x_{l-1}^{i,2}, \dots, x_{l-1}^{i,k}]$ . Każdy z podsystemów jest opisany operatorami przejść i wyjść  $H_{l-1}^i, G_{l-1}^i$ :

$$\begin{aligned} X_{l-1}^i &= H_{l-1}^i(U_{l-1}^i) \\ Y_{l-1}^i &= G_{l-1}^i(U_{l-1}^i, X_{l-1}^i) \end{aligned} \quad (2)$$

Połączenia poszczególnych podsystemów na poziomie  $l$  można opisać różnymi metodami, a w szczególności [11]:

- schemat blokowy (graficzna metoda prezentacji struktury modelu na poziomie  $l$ ),
- zero-jedynkowa macierz połączeń.

Dekompozycję modelu na danym poziomie hierarchii można przeprowadzić w dowolny sposób, biorąc pod uwagę szereg kryteriów:

- konstrukcję technologiczną obiektu sterowania (podział na poszczególne urządzenia technologiczne),
- stan mediów roboczych (np. para, woda, czynnik 2-fazowy itp.)
- zjawiska fizyczne, chemiczne i inne, mające miejsce w obiekcie sterowania.

Ogólnie można powiedzieć, że to twórca modelu określa poszczególne podsystemy oraz definiuje umowne granice między nimi.

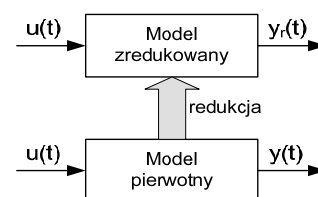
Podstawową cechą modelu hierarchicznego jest fakt, że model ten zawiera cały szereg modeli na poszczególnych poziomach hierarchii. Na każdym poziomie mamy do czynienia z modelami zagregowanymi, otrzymanymi na podstawie zredukowanych modeli podsystemów niższego poziomu. W wyniku agregacji, model danego poziomu uwzględnia właściwości modeli poszczególnych podsystemów oraz połączenia między podsystemami, a w szczególności sprzężenia zwrotne [10]. Ponadto model zagregowany na danym poziomie hierarchii uwzględnia tylko te procesy dynamiczne, które są istotne na tym poziomie i pomija procesy dynamiczne mające znaczenie na niższym poziomie hierarchii (są to najczęściej procesy o większej szybkości). Np. model matematyczny kotła energetycznego nie będzie uwzględniał zjawisk dźwiękowych (przemieszczania się zmian ciśnienia) mających miejsce w ramach ekranowych kotła.

Modele podsystemów na poszczególnych poziomach hierarchii posiadają precyzyjnie określony zakres adekwatności, który dla modeli zlinearyzowanych jest zdefiniowany przez częstotliwość graniczną  $\omega_{max}$ . Zakres adekwatności modelu podsystemu na danym poziomie hierarchii wynika z zakresów adekwatności podsystemów niższego poziomu oraz wymagań związanych np. z projektowaniem układów sterowania. Jeżeli okaże się, że model na danym poziomie posiada zbyt niski zakres adekwatności, niezbędny do właściwego zaprojektowania układów sterowania, to może okazać się niezbędne poszerzenie zakresów adekwatności modeli jego podsystemów.

## 3. Agregacja modeli

Pod pojęciem agregacji można rozumieć wnioskowanie o właściwościach modelu na danym poziomie hierarchii na podstawie modeli podsystemów poziomu bezpośrednio niższego oraz topologii połączeń między nimi [11]. Modele podsystemów wyższych poziomów hierarchii są modelami zagregowanymi, reprezentującymi istotne dla danego poziomu właściwości modelu. Agregację modelu można przeprowadzać z zastosowaniem redukcji lub abstrakcji modeli na poszczególnych poziomach hierarchii. Tak przy pomocy jednej jak i drugiej procedury, na danym poziomie hierarchii uzyskuje się model o uproszczonej strukturze, w stosunku do modelu uzyskanego na podstawie połączenia modeli podsystemów niższego poziomu.

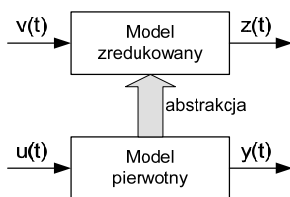
W wyniku redukcji, w modelu zredukowanym zbiór zmiennych wejściowych pozostaje niezmienny w stosunku do modelu pierwotnego. Natomiast zmianie ulegają współrzędne stanu tak, aby z założoną dokładnością wielkości wyjściowe modelu zredukowanego odtwarzały wielkości wyjściowe modelu pierwotnego (rys. 2) [1, 2, 6, 8-10, 12, 13].



Rys. 2. Idea redukcji modelu  
Fig. 2. The idea of model reduction

W wyniku abstrakcji konstruowany jest model niższego rzędu, charakteryzujący się innymi wielkościami wejściowymi, wyjściowymi oraz współzrzednymi wektora stanu [7]. Celem abstrakcji jest wyznaczenie takiego przekształcenia wektora stanu  $x$  w wektor  $g = Px$ , aby nowy model (nazwany abstrakcją) posiadał okre-

ślone właściwości wtedy i tylko wtedy, gdy model pierwotny posiada określone właściwości. Określa się to mianem propagacji określonej właściwości od makro-modelu (abstrakcji) do mikro-modelu (modelu pierwotnego) [7] (rys. 3).



Rys. 3. Idea abstrakcji modelu  
Fig. 3. The idea of model abstraction

#### 4. Redukcja modeli

Zadanie redukcji modelu liniowego może być przedstawione następująco: na podstawie stabilnego (lub niestabilnego) modelu rzędu  $n$ , przedstawionego w przestrzeni stanu (3), należy wyznaczyć model zredukowany rzędu  $k$  (4), gdzie  $k < n$  taki, aby określona norma błędu aproksymacji  $\|y(t) - y_r(t)\|$  przyjmowała wartość minimalną.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= \mathbf{A}_r x_r(t) + \mathbf{B}_r u(t) \\ y_r(t) &= \mathbf{C}_r x_r(t) + \mathbf{D}_r u(t) \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}^{k \times p}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{C}_r \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $\mathbf{D}_r \in \mathbb{R}^{m \times p}$ .

Wektor stanu modelu zredukowanego  $x_r$  jest związany z wektorem stanu modelu pierwotnego  $x$  nieosobliwym przekształceniem  $x_r = \mathbf{T}x$ , gdzie macierz  $\mathbf{T}$  jest określona mianem macierzy transformacji. W literaturze można znaleźć wiele algorytmów wyznaczenia tej macierzy [1, 2, 6, 8-10, 12, 13].

Istnieje cały szereg metod pozwalających na przeprowadzenie redukcji modelu złożonego. Większość współcześnie wykorzystywanych metod redukcji modeli liniowych można podzielić na trzy grupy [1, 2]:

- metody bazujące na dekompozycji SVD (rozkład względem wartości szczególnych), które wykorzystują teorię zrównoważonej realizacji modelu,
- metody momentów, które opierają swoje działanie na możliwości przedstawienia transmitancji modelu w postaci rozwinięcia w szereg Laurenta wokół jednego lub wielu punktów. Ze względów numerycznych największe znaczenie spośród metod momentów uzyskały algorytmy bazujące na wyznaczeniu podprzestrzeni Kryłowa,
- metody łączące zalety obydwu grup – SVD-Kryłowa.

Koncepcja zrównoważonej realizacji modelu (ang. *Balanced Realization*) umożliwia w prosty sposób wydzielenie części dominującej modelu oraz redukcję modelu poprzez „obcięcie” macierzy opisujących jego dynamikę (ang. *Balanced Truncation*) [6]. Model można nazwać zrównoważonym, jeśli jego gramiany sterowalności  $\bar{\mathbf{P}}$  i obserwowalności  $\bar{\mathbf{Q}}$  są identyczne oraz równe macierzy diagonalnej (zawierającej na diagonalu wartości szczególne Hankela). Zrównoważenie układu wymaga wyznaczenia odpowiedniego przekształcenia nieosobliwego  $x \rightarrow \mathbf{T}x$ , spełniającego następujące równanie [1, 2]:

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{TPT}' = (\mathbf{T}')^{-1} \mathbf{QT}^{-1} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (5)$$

gdzie:  $\mathbf{P} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'t} dt$ ,  $\mathbf{Q} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}'t} \mathbf{C}' \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} dt$ .

Model zrównoważony uzyskuje się poprzez przekształcenie macierzy modelu pierwotnego według następujących zależności:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{TAT}^{-1} \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{TB} \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{CT}^{-1} \quad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \quad (6)$$

Z modelu zrównoważonego można następnie wydzielić podsystem dominujący. Kryterium podziału stanowią wartości szczególne Hankela, które umożliwiają jednocześnie określenie górnej granicy błędu aproksymacji.

Uogólnieniem metody *Balanced Truncation* są metody **FW** (ang. *Frequency Weighted*), wprowadzające częstotliwościowe funkcje wagowe ( $\mathbf{W}_i$  – wejściową funkcję wagową oraz  $\mathbf{W}_o$  – wyjściową funkcję wagową). Przy odpowiednim dobraniu funkcji wagowych, metoda ta umożliwia znaczne poprawienie wyników aproksymacji modelu dla danego przedziału częstotliwości. Pierwszą tego typu metodę zaproponował Enns w 1984 r., jednakże przedstawiony algorytm nie gwarantował zachowania stabilności modelu zredukowanego dla jednoczesnego zastosowania obu funkcji wagowych. Wada ta została usunięta w algorytmach zaproponowanych w pracach Lin i Chiu oraz Wanga [13].

Wadą metod opartych na dekompozycji SVD jest znaczna złożoność algorytmów redukcji, gdyż charakteryzują się one większą niż wielomianowa złożonością obliczeniową. Pomimo swoich niewątpliwych zalet, do których w pierwszej kolejności można zaliczyć zachowanie stabilności modelu zredukowanego, metody te nie są praktycznie wykorzystywane dla modeli o liczbie współrzędnych stanu większej niż  $10^4$ . Spowodowane jest to znaczną złożonością obliczeniową oraz niepraktycznością algorytmów wyznaczania gramianów.

W literaturze [1, 2], dla systemów o liczbie zmiennych stanu większych niż  $10^4$ , proponowane jest wykorzystanie metod momentów. Charakteryzują się one znacznie mniejszą złożonością obliczeniową. Głównymi wadami tych metod redukcji jest jednak brak gwarancji zachowania stabilności modelu zredukowanego (dla znacznej części opracowanych algorytmów).

Redukcja metodą momentów opiera swoje działanie na możliwości przedstawienia transmitancji modelu w postaci rozwinięcia w szereg Laurenta wokół punktu  $s = s_o$  (7) [1-3]. Współczynniki tego rozwinięcia ( $\eta_i$ ) nazywane są momentami modelu w punkcie  $s_o$ . W wyniku operacji redukcji, z modelu pierwotnego wydzielone zostaje pierwszych  $k$  momentów, na podstawie których wyznaczona zostaje transmitancja modelu zredukowanego (8).

$$\mathbf{G}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i (s_o - s)^i \quad (7)$$

$$\mathbf{G}_r(s) = \sum_{i=0}^k \eta_i (s_o - s)^i \quad (8)$$

Metody SVD-Kryłowa umożliwiają natomiast zastąpienie bardzo czasochłonnego obliczania gramianów przez wyznaczenie ich aproksymacji. Algorytmy aproksymujące bazują na wyznaczeniu podprzestrzeni Kryłowa [5], metodach ADI (ang. *alternating direction implicate*) [5, 8], *Smith* [8] lub wyznaczając dekompozycję na bazie funkcji własnych POD (ang. *Proper Orthogonal Decomposition*) [12]. Algorytmy te łączą w sobie zalety metod redukcji SVD oraz Kryłowa, tj. przy zachowaniu porównywalnej z metodami Kryłowa złożoności obliczeniowej, gwarantują zachowanie stabilności modelu zredukowanego.

Ocena zredukowanych modeli matematycznych obiektów sterowania, uzyskanych z zastosowaniem różnych technik redukcji, wymaga wprowadzenia odpowiednich miar błędu aproksymacji. Modele **MIMO** często charakteryzują się znacznymi różnicami wartości modułów transmitancji dla poszczególnych torów oraz znaczną zmiennością modułu transmitancji w funkcji częstotliwości. Z tego względu zastosowanie normy Hankela błędu aproksymacji [1, 2] nie zawsze pozwala poprawnie ocenić jakość aprok-

symacji. Z tego względu w pracy [10] wprowadzono maksymalną (9) oraz średniokwadratową (10) miarę błędu aproksymacji dla zakresu adekwatności modelu, które w znacznie lepszym stopniu umożliwiają ocenę jakości aproksymacji charakterystyk częstotliwościowych przez modele zredukowane. Miary te można przedstawić następującymi zależnościami:

$$\Delta_3 = 100 \max_{\omega_i \in (0-\omega_{\max})} \left( \max_{(x,y)} \frac{|\mathbf{G}_{(x,y)}(j\omega_i) - \mathbf{G}_{r(x,y)}(j\omega_i)|}{|\mathbf{G}_{(x,y)}(j\omega_i)|} \right) \quad (9)$$

$$\Delta_6 = \sqrt{\frac{1}{pmN} \sum_{i=1}^N \sum_{x=1}^p \sum_{y=1}^m \left( \frac{|\mathbf{G}_{(x,y)}(j\omega_i) - \mathbf{G}_{r(x,y)}(j\omega_i)|}{|\mathbf{G}_{(x,y)}(j\omega_i)|} \right)^2} \quad (10)$$

W wyniku właściwie przeprowadzonej operacji redukcji modelu uzyskuje się model niższego rzędu (przedstawiony także w przestrzeni stanu), poprawnie aproksymujący charakterystyki częstotliwościowe modelu pierwotnego dla poszczególnych wejść i wyjść, w zadanym przedziale częstotliwości. Model taki nie zawiera opóźnień, a otrzymane macierze  $\mathbf{A}_r$ ,  $\mathbf{B}_r$ ,  $\mathbf{C}_r$ ,  $\mathbf{D}_r$  nie pozwalają na fizykalną interpretację właściwości dynamicznych obiektu.

Innym podejściem do redukcji modeli jest zastosowanie aproksymacji charakterystyk częstotliwościowych dla poszczególnych wielkości wejściowych i wyjściowych (układy SISO), w zadanym przedziale częstotliwości przy pomocy transmitancji wymiernych niskiego rzędu z uwzględnieniem ewentualnych opóźnień. W ogólnym przypadku model zredukowany ma następującą postać:

$$\mathbf{G}_r(s) = \sum_{i=1}^k \frac{L_i(s)}{M_i(s)} e^{-\tau_i s} \quad (11)$$

gdzie:  $L_i(s) = b_m^i s^m + \dots + b_1^i s + b_0^i$ ,  $M_i(s) = a_n^i s^n + \dots + a_1^i s + a_0^i$ .

Stopnie wielomianów oraz opóźnienia dobierane są indywidualnie dla każdego sygnału wejściowego i wyjściowego modelu, biorąc pod uwagę dokładność aproksymacji oraz przesłanki fizykalne.

Zadanie redukcji modelu złożonego można sprowadzić w takim przypadku do wyznaczenia współczynników wielomianów transmitancji modelu zredukowanego oraz czasów opóźnienia  $b_m^1, \dots, b_0^1, \dots, b_m^k, \dots, b_0^k, a_n^1, \dots, a_0^1, \dots, a_n^k, \dots, a_0^k, \tau_1, \dots, \tau_k$ , na podstawie minimalizacji błędu aproksymacji:

$$f(W) = \sum_{i=1}^N |\mathbf{G}(j\omega_i) - \mathbf{G}_r(j\omega_i)| \quad (12)$$

gdzie:  $N$  - liczba punktów na osi częstotliwości, dla których wyznaczono wartości transmitancji widmowej modelu złożonego oraz modelu zredukowanego (punkty te powinny być rozmieszczone równomiernie na logarytmicznej osi częstotliwości).

W konkretnych przypadkach może okazać się niezbędne wprowadzenie wagowych funkcji częstotliwościowych w celu zapewnienia właściwej aproksymacji charakterystyk częstotliwościowych w określonych przedziałach częstotliwości, np.:  $\phi(\omega) = \omega^{-1}$ .

Uzyskane transmitancje modelu zredukowanego (11) można interpretować, określając stałe czasowe, częstotliwości własne, czasy opóźnień, itp. Pozwala to na lepsze zrozumienie właściwości dynamicznych obiektu. Uwzględnienie opóźnień w modelu zredukowanym pozwala w wielu przypadkach na znaczne ograniczenie rzędu modelu zredukowanego.

Ze względu na zalety i wady obydwu metod redukcji, prawdopodobnie jest niezbędne zastosowanie obydwu podejść.

## 5. Podsumowanie

Dla celów sterowania obiektami złożonymi niezbędna jest znajomość ich modeli matematycznych, które są tworzone przez modelowanie zjawisk zachodzących w obiekcie. Złożoność tworzonych modeli stale rośnie, co w znacznym stopniu utrudnia bezpośrednie wykorzystanie metod i środków programowych analizy obiektów oraz syntezy algorytmów sterowania. Łatwość uzyskiwania złożonych modeli opisujących właściwości obiektów sterowania pociąga za sobą konieczność zastosowania hierarchicznej struktury oraz dekompozycję na szereg prostszych do zamodelowania podsystemów. Na wszystkich wyższych poziomach model hierarchiczny zawiera podsystemy należące do poziomu niższego wraz z określoną topologią powiązań między nimi.

Wielopoziomowa konstrukcja modelu daje możliwość analizy przez zastosowanie procedury agregacji. Jednym z zasadniczych jej środków jest redukcja modelu na poszczególnych poziomach hierarchicznej struktury. Podejście takie umożliwia stworzenie zredukowanego modelu hierarchicznego, zawierającego zbiór modeli na każdym z poziomów hierarchii, charakteryzujących się różnymi zakresami adekwatności oraz dokładnością aproksymacji właściwości obiektu sterowania.

## 6. Literatura

- [1] Antoulas A., Sorensen D.: Approximation of Large-Scale Dynamical System: An overview. Int. J. Appl. Comput. Sci., vol. 11, no. 5, 2001, pp. 1093-1121.
- [2] Antoulas A.: Approximation of Large-Scale Dynamical System, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 2005.
- [3] Boley D.: Krylov space methods on state-space control models, Circuits Syst. Signal Process, vol. 13, no. 6, 1994, pp. 733-758.
- [4] Imaev D., Rydel M., Stanisławski W.: Redukcja modeli parowników przepływowych jako obiektów sterowania, XVI KKA, 2008, s.198-207.
- [5] Li J. R., White J.: Low-Rank Solution of Lyapunov Equations, SIAM Review, vol. 46, no. 4, 2004, pp. 693-713.
- [6] Moore B.: Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-26, no. 1, 1981, pp. 17-32.
- [7] Pappas G.: Hierarchically Consistent Control Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 45, no. 6, 2000, pp. 1144-1160.
- [8] Penzl T.: Algorithms for Model Reduction of Large Dynamical Systems, Linear Algebra and its Appl., vol. 415, 2006, pp. 322-343.
- [9] Rydel M.: Analiza algorytmów redukcji liniowych modeli złożonych obiektów dynamicznych.. Zesz. Nauk. PO, z.302, Opole 2005, s.69-90.
- [10] Rydel M.: Zredukowane hierarchiczne modele złożonych obiektów sterowania na przykładzie kotła energetycznego, Rozprawa doktorska, Opole 2009.
- [11] Stanisławski W.: Modelowanie i symulacja komputerowa parowników przepływowych kotłów energetycznych, Studia i monografie z.124, Opole, 2001.
- [12] Willcox K., Peraire J.: Balanced Model Reduction via the Proper Orthogonal Decomposition, AIAA Journal, vol. 40, no. 11, 2002, pp. 2323-2330.
- [13] Wang G., Sreeram V., Liu W. Q.: A New Frequency-Weighted Balanced Truncation Method and an Error Bound, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 44, no. 9, 1999, pp. 1734-1737.