

Marek RYDEL, Włodzimierz STANISŁAWSKI

POLITECHNIKA OPOLSKA, WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI I INFORMATYKI

Problemy redukcji złożonych modeli obiektów sterowania**Dr inż. Marek RYDEL**

Jest pracownikiem Wydziału Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki Politechniki Opolskiej. W 2002 uzyskał stopień mgra inż. na Wydziale Elektroniki Politechniki Wrocławskiej, a w roku 2009 stopień doktora w dyscyplinie Automatyka i Robotyka na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki Politechniki Opolskiej. Jego zainteresowania naukowe obejmują zagadnienia związane z tworzeniem, redukcją oraz badaniami hierarchicznych modeli złożonych obiektów sterowania.



e-mail: m.rydel@po.opole.pl

Dr hab. inż. Włodzimierz STANISŁAWSKI

Studia i doktorat na Wydziale Automatyki, Elektroniki i Informatyki Politechniki Śląskiej. Habilitacja na Uniwersytecie Elektrotechnicznym w Sankt Petersburgu. Od 2003 stanowisko profesora Politechniki Opolskiej. Kieruje Zakładem Informatyki. Zainteresowania naukowe obejmują zagadnienia związane z modelowaniem i symulacją komputerową złożonych obiektów sterowania, a w szczególności bloków energetycznych. Od 1 września 2008 pełni funkcję prodziekana Wydziału ds. naukowych.



e-mail: w.stanislawski@po.opole.pl

Streszczenie

W artykule zaprezentowano zagadnienia związane z redukcją złożonych modeli obiektów sterowania. Przedstawiono podstawowe grupy metod redukcji wraz z omówieniem ich wad i zalet dla celów redukcji złożonych modeli obiektów sterowania. Zaproponowano wprowadzenie nowej miary błędu aproksymacji dla oceny dokładności aproksymacji modelu zredukowanego. Dobór parametrów metod redukcji pod kątem minimalizacji tej miary błędu umożliwił uzyskanie znacznie lepszych rezultatów redukcji niż minimalizacja normy Hankela błędu aproksymacji.

Słowa kluczowe: redukcja modelu, modele złożone.**Problems of a complex plant models reduction****Abstract**

Model order reduction problems of complex control model are presented in this paper. The article presents basic method group of complex control models reduction. Out of the many methods known from the literature, the methods based on balancing a system and then reducing it (SVD method) have become of great significance [1, 2, 5, 6, 10, 11, 13, 17, 23]. Also Krylov-based approximation methods are widely used, which are based on moment matching of the impulse response of the reduced system [1-3, 7, 9, 20]. Most of the MIMO models are characterized by large differences in gain characteristic and gain variability in frequency function (Fig. 1). The Hankel norm of approximation error (4) can't be used to estimate quality of approximation gain characteristic (Fig. 2). Authors propose in the paper new approximation error measure for reduced models of control objects (5). Minimizing this approximation error for selection of method reduction parameters gives better results than minimizing Hankel norm of approximation error (Tab. 1, Fig. 2). The reduction results of a structural model of component 1r (Russian service module) of the International Space Station [4] are also described in the paper [4].

Keywords: model reduction, complex models.**1. Wstęp**

Od wielu lat w praktyce inżynierskiej mamy do czynienia z intensywnym rozwojem oprogramowania służącego do modelowania i symulacji złożonych obiektów sterowania. W wyniku tego w bardzo szybkim tempie rośnie złożoność modeli matematycznych. Szczególnie istotny wpływ na wzrost złożoności modeli matematycznych ma rozwój programów do modelowania układów o parametrach rozłożonych z zastosowaniem metody elementów skończonych. Programy takie automatycznie generują tysiące elementów skończonych, a wymiar uzyskanych modeli matematycznych w przestrzeni stanu często przekracza dziesiątki tysięcy [1, 4, 24]. Tak wysoka złożoność modelu matematycznego pociąga za sobą długie czasy symulacji komputerowej, znaczne zapotrzebowanie na moc obliczeniową komputerów oraz problemy numeryczne występujące szczególnie dla modeli o dużej sztywności.

Dla celów sterowania systemami niezbędna jest znajomość ich modeli matematycznych, które są adekwatne w zadanym przedziale amplitud i częstotliwości sygnałów. Wysoka złożoność modelu matematycznego w znacznym stopniu utrudnia bezpośrednie

wykorzystanie metod i środków programowych analizy właściwości dynamicznych oraz syntezy algorytmów sterowania. W wyniku tego, podstawowym staje się problem wyboru odpowiednich metod redukcji tak, aby przy maksymalnym zachowaniu adekwatności ograniczyć złożoność modelu.

Podczas redukcji, model pierwotny jest aproksymowany przez model niższego rzędu, który zapewnia wymaganą dokładność aproksymacji. Model zredukowany nie uwzględnia części zjawisk mających miejsce w obiekcie rzeczywistym. Charakteryzuje się on ograniczonym zakresem adekwatności, który dla modeli liniowych określa się przez przedział częstotliwości w którym aproksymuje właściwości obiektu z daną dokładnością.

Zadanie redukcji modelu liniowego może być przedstawione następująco: na podstawie stabilnego (lub niestabilnego) modelu rzędu n (model pierwotny), przedstawionego w przestrzeni stanu (1), należy wyznaczyć model zredukowany rzędu k (2), gdzie $k < n$, taki, aby określona norma błędu aproksymacji $\|y(t) - y_r(t)\|$ przyjmowała wartość minimalną.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= \mathbf{A}_r x_r(t) + \mathbf{B}_r u(t) \\ y_r(t) &= \mathbf{C}_r x_r(t) + \mathbf{D}_r u(t) \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie: $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A}_r \in \mathfrak{R}^{k \times k}$, $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{n \times p}$, $\mathbf{B}_r \in \mathfrak{R}^{k \times p}$, $\mathbf{C} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $\mathbf{C}_r \in \mathfrak{R}^{m \times k}$, $\mathbf{D} \in \mathfrak{R}^{m \times p}$, $\mathbf{D}_r \in \mathfrak{R}^{m \times p}$.

Redukcja modelu nie jest operacją jednoznaczną, dlatego też istnieje cały szereg technik pozwalających na przeprowadzenie redukcji modelu złożonego [2, 6, 7, 8, 10, 11, 16, 17, 18, 20, 24].

2. Metody redukcji liniowych modeli złożonych obiektów sterowania

Prace nad zaawansowanymi metodami redukcji modeli liniowych rozpoczęły się w końcu lat 60. ubiegłego stulecia. Znaczna większość wczesnych metod redukcji opierała swoje działanie na aproksymacji właściwości modelu za pomocą wielomianów (ang. polynomial approximations) [8]. Większość współcześnie wykorzystywanych metod redukcji modeli liniowych można podzielić na trzy grupy [1, 2]:

- metody bazujące na dekompozycji SVD (rozkładzie względem wartości szczególnych). Wykorzystują one teorię zrównoważonej realizacji modelu (ang. *Balanced Realization*).
- metody momentów, które opierają swoje działanie na możliwości przedstawienia transmitancji modelu w postaci rozwinięcia w szereg Laurenta wokół jednego lub wielu punktów. Ze względów numerycznych największe znaczenie spośród wielu metod momentów uzyskały algorytmy bazujące na wyznaczeniu podprzestrzeni Kryłowa.

- metody łączące zalety obydwu grup – SVD-Kryłowa.

Metody redukcji modelu bazujące na dekompozycji SVD zapoczątkowane zostały pracami Moore'a [17]. Koncepcja zrównoważonej realizacji modelu była przełomem w dziedzinie redukcji liniowych modeli dynamicznych. Umożliwia ona w prosty sposób wydzielenie części dominującej oraz redukcję modelu poprzez „obcięcie” macierzy opisujących dynamikę modelu w przestrzeni stanów (ang. *Balanced Truncation*). Koncepcja zrównoważonej realizacji modelu stała się podstawą opracowania metody redukcji **BTA** (ang. *Balanced Truncation Approximation*) [17]. Do podstawowych zalet tej metody redukcji można zaliczyć zagwarantowanie zachowania stabilności modelu zredukowanego oraz możliwość oszacowania błędu aproksymacji. Metoda ta, pierwotnie opracowana dla liniowych modeli asymptotycznie stabilnych, stała się podstawą do opracowania metod redukcji modeli niestabilnych [5]. Stworzono również wiele modyfikacji metody **BTA** eliminujących jej wady np.: **SPA** (ang. *Singular Perturbation Approximation*) [5, 16]. Metoda ta znacznie poprawia aproksymację charakterystyk częstotliwościowych dla stanu ustalonego oraz niskich częstotliwości.

W 1984 roku K. Glover przedstawił optymalną metodę redukcji względem normy Hankela (ang. *Hankel Norm Approximation*) [2, 11] oraz zależności umożliwiające oszacowanie jej błędu aproksymacji. Metoda **HNA** gwarantuje dwukrotnie mniejszy maksymalny błąd aproksymacji niż **BTA**, jednak okupione jest to większą złożonością obliczeniową algorytmu.

Uogólnieniem metod **BTA** oraz **HNA** są metody **FW** (ang. *Frequency Weighted*), wprowadzające częstotliwościowe funkcje wagowe (**W_i** – wejściową funkcję wagową oraz **W_o** – wyjściową funkcję wagową). Przy odpowiednim dobraniu współczynników wagowych metoda ta umożliwiła znaczne poprawienie wyników aproksymacji modelu dla zadanego przedziału częstotliwości. Pierwszą tego typu metodę zaproponował Enns w 1984 r. [6], jednakże przedstawiony algorytm nie gwarantował zachowania stabilności modelu zredukowanego dla jednoczesnego zastosowania obu funkcji wagowych. Wada ta została usunięta w algorytmach zaproponowanych w pracach Lin i Chiu oraz Wanga [23].

Wprowadzenie wag częstotliwościowych jest możliwe również w sposób pośredni, poprzez modyfikację zależności, z których wyznaczane są gramiany. Wyróżnić można dwie metody: **FD** (ang. *Frequency Domain*) [2, 10], gdy gramiany są wyznaczane w dziedzinie częstotliwościowej oraz **TLBT** (ang. *Time Limited Balanced Truncation*) [10, 13] dla dziedziny czasu.

Osobną grupę metod stanowią metody *Balanced Stochastic Truncation* [2, 18], wyznaczające gramiany z równań Riccatiego. Umożliwiają one wyznaczenie modelu zredukowanego z możliwością oszacowania jego względnego błędu aproksymacji. Zastosowanie metody **BST** możliwe jest jednak wyłącznie dla stabilnych modeli kwadratowych [2].

Wadą metod opartych na dekompozycji SVD jest znaczna złożoność algorytmów redukcji. Pomimo swoich niewątpliwych zalet, do których w pierwszej kolejności można zaliczyć zachowanie stabilności modelu zredukowanego, metody te nie są praktycznie wykorzystywane dla modeli o liczbie współrzędnych stanu większej niż 10^4 . Spowodowane jest to znaczną złożonością obliczeniową oraz niepraktycznością algorytmów wyznaczania gramianów dla tak dużych modeli. W literaturze [1, 2] dla systemów o liczbie zmiennych stanu większej niż 10^4 , proponowane jest wykorzystanie metod momentów. Charakteryzują się one znacznie mniejszą złożonością obliczeniową. Głównymi wadami tych metod redukcji jest jednak brak gwarancji zachowania stabilności modelu zredukowanego (dla znacznej części opracowanych algorytmów). Zazwyczaj charakteryzują się one także mniejszą dokładnością aproksymacji charakterystyki amplitudowo-fazowej w porównaniu z metodami **BT**, a w szczególności z metodami wprowadzającymi wagi częstotliwościowe [12].

Jedną z najprostszych metod redukcji bazującą na metodzie momentów jest **AWE** (ang. *Asymptotic Waveform Evaluation*). Zaproponowana przez Pillage oraz Rohrer w 1990 roku [20], metoda **AWE** wykorzystuje fakt, że transmitancję modelu pier-

wotnego, przedstawioną w postaci rozwinięcia asymptotycznego wokół dwóch punktów $s = 0$ oraz $s = \infty$ można dobrze aproksymować wielomianem Pade. Bezpośrednie wyznaczenie wartości momentów powoduje jednakże znaczne problemy natury numerycznej. Ogranicza to w znacznym stopniu przydatność tej metody dla celów redukcji [7].

Znacznie większe znaczenie praktyczne osiągnęły algorytmy opierające swoje działanie na wyznaczeniu podprzestrzeni Kryłowa [2, 3]. Metody te wymagają wyznaczenia bazy ortonormalnej. Klasyczna ortogonalizacja Grama-Schmidta jest jednak mało dokładna numerycznie. Dlatego też duże znaczenie osiągnęły dwa algorytmy: algorytm Arnoldiego (zmodyfikowana ortogonalizacja Grama-Schmidta) oraz niesymetryczny algorytm Lanczosa. Większość opracowanych metod opartych na metodach momentów jest zdefiniowana wyłącznie dla modeli o jednym wejściu i wyjściu, gdy wartości momentów są skalarami. Zaledwie kilka metod zostało uogólnionych na modele o wielu wejściach i wyjściach (momenty są macierzami). Do takich metod można zaliczyć m.in.: **MPVL** (ang. *Matrix Pade via Lanczos*) [9] oraz metody blokowe Arnoldiego oraz Lanczosa [2].

Dla celów redukcji wykorzystano również przekształcenia Fouriera. Algorytm **FMR** (ang. *Fourier Model Reduction*) bazuje na iteracyjnym algorytmie wyznaczenia współczynników Fouriera [24], natomiast jej modyfikacja (Rational Krylov-FMR) umożliwia pominięcie bezpośredniego wyznaczenia współczynników Fouriera i wyznaczenie baz ortonormalnych za pomocą algorytmu Arnoldiego [14]. Za transmitancję dyskretnego modelu zredukowanego przyjmuje się pierwszych m dyskretnczasowych współczynników Fouriera modelu pierwotnego. Otrzymany tą metodą model zredukowany dobrze aproksymuje właściwości dynamiczne obiektu zwłaszcza dla niskich częstotliwości. Ze względu na brak możliwości zastosowania filtrów wagowych, jest on jednak zazwyczaj mniej dokładny niż model otrzymany za pomocą metod *frequency weighted*.

Opracowano również metody łączące dotychczas dwie oddzielne grupy metod (metody Krylov-SVD). Umożliwiają one zastąpienie bardzo czasochłonnego obliczania gramianów z równań Lapunowa przez wyznaczenie ich aproksymacji [2, 15, 19]. Dla modeli o dużej złożoności kolejne wartości własne gramianów (σ_i) zazwyczaj bardzo szybko maleją. Gramiany można zatem aproksymować z dużą dokładnością za pomocą dodatnio określonych macierzy niskiego rzędu. Umożliwia to zastosowanie iteracyjnych algorytmów niskiego rzędu, o złożoności obliczeniowej $O(n^2)$ [15]. Algorytmy niskiego rzędu bazują na wyznaczeniu podprzestrzeni Kryłowa [15], metodach **ADI** (ang. *alternating direction implicate*) [15, 19], **Smitha** [19] lub wyznaczając dekompozycję na bazie funkcji własnych **POD** (ang. *Proper Orthogonal Decomposition*) [22]. Algorytmy te łączą w sobie zalety metod redukcji SVD oraz Kryłowa (metody SVD-Kryłowa), tj. przy zachowaniu porównywalnej z metodami Kryłowa złożoności obliczeniowej gwarantują zachowanie stabilności modelu zredukowanego. Dla stabilnych modeli wysokiego rzędu ($n > 500$) oraz małej liczbie wejść i wyjść ($n/p, n/m > 100$), algorytmy niskiego rzędu **ADI** oraz **Smitha** zaimplementowano dla pakietu *MATLAB/Simulink* w przyborniku *LYAPACK*. Algorytmy te są jednak potencjalnie niestabilne, co może powodować znaczne błędy aproksymacji gramianów, i uniemożliwiają uzyskanie zadowalających rezultatów redukcji.

3. Miary błędu aproksymacji modeli zredukowanych

Podstawowym zadaniem projektanta przed przystąpieniem do redukcji modelu jest określenie wymagań stawianych modelom zredukowanym, które zależą głównie od przyszłego ich zastosowania. W szczególności, konieczne jest określenie zakresu adekwatności oraz błędu aproksymacji charakteryzującego jakoś adekwatności aproksymacji charakterystyk częstotliwościowych.

Dla modeli matematycznych obiektów sterowania zakres adekwatności definiuje się poprzez podanie maksymalnej częstotliwości, dla której model poprawnie aproksymuje charakterystyki częstotliwościowe obiektu. Dla częstotliwości większych od zakresu adekwatności, błąd aproksymacji modelu zredukowanego może zatem znacznie wzrosnąć, nie wpływając negatywnie na ocenę przydatności modelu dla celów sterowania. Celem redukcji jest więc wyznaczenie modelu zredukowanego o jak najniższym rzędzie, który będzie się charakteryzował określonym błędem aproksymacji dla danego zakresu adekwatności.

Metody redukcji, bazujące na dekompozycji SVD, umożliwiają oszacowanie normy błędu aproksymacji modelu zredukowanego. Model zredukowany metodą **BTA** lub **SPA** charakteryzuje się normą \mathcal{H}_∞ błędu aproksymacji mniejszą niż podwojona suma wartości Hankela, która zostaje odrzucona (dla metody **HNA** błąd ten jest dwukrotnie mniejszy) [2, 11].

$$\|\mathbf{G}(j\omega) - \mathbf{G}_r(j\omega)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=k+1}^n \sigma_i \quad (3)$$

Z literatury znane są również oszacowania błędów aproksymacji dla metod wprowadzających wagi częstotliwościowe. Zależności te wprowadzają dodatkowe współczynniki pochodzące od wartości Hankela funkcji wagowych. Nie istnieje jednak żadna zależność, która umożliwiłaby oszacowanie wartości błędu aproksymacji dla ograniczonego zakresu częstotliwości.

Modele **MIMO** mogą charakteryzować się znacznymi różnicami wartości modułów transmitancji dla poszczególnych torów oraz podlegać znacznej zmienności modułu transmitancji w funkcji częstotliwości. Z tego względu porównanie wartości norm Hankela błędu aproksymacji modeli zredukowanych (4) nie zawsze pozwala poprawnie ocenić jakość aproksymacji charakterystyk częstotliwościowych.

$$\|\mathbf{G}(j\omega) - \mathbf{G}_r(j\omega)\|_\infty = \max_{\omega} \bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega) - \mathbf{G}_r(j\omega)) \quad (4)$$

gdzie: $\bar{\sigma}(\mathbf{A}) = \sigma_1$ dla $\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^*$, $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$,

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r.$$

Znacznie bardziej reprezentatywne wyniki daje porównanie błędów względnych modelu zredukowanego. Jako kryterium oceny jakości aproksymacji modelu zredukowanego można wybrać błąd maksymalny lub średniokwadratowy (5), który dla szerokiego zakresu adekwatności jest bardziej miarodajny niż wartość maksymalna błędu.

$$\Delta_6 = \sqrt{\frac{1}{pmN} \sum_{i=1}^N \sum_{x=1}^p \sum_{y=1}^m \left(\frac{|\mathbf{G}_{(x,y)}(j\omega_i) - \mathbf{G}_{r(x,y)}(j\omega_i)|}{|\mathbf{G}_{(x,y)}(j\omega_i)|} \right)^2} \quad (5)$$

gdzie: p, m – liczba wejść/wyjść modelu, N – liczba punktów aproksymacji, $G_{(x,y)}$ – transmitancja modelu pomiędzy wejściem x a wyjściem y modelu

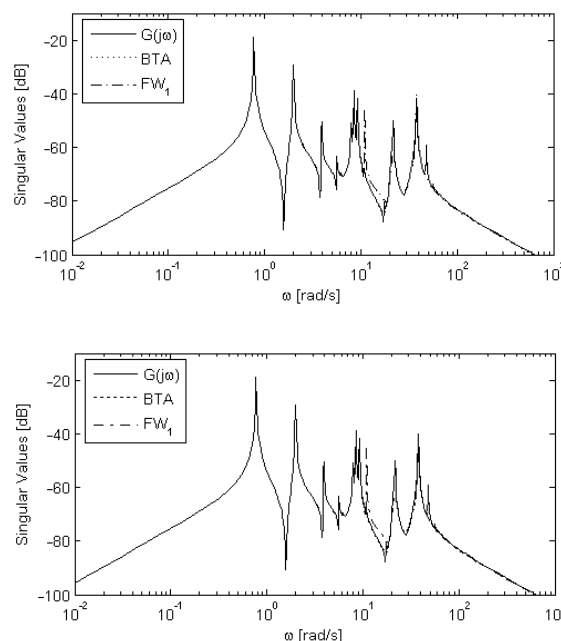
4. Zastosowanie redukcji na przykładzie modelu modułu 1R Międzynarodowej Stacji Kosmicznej

Międzynarodowa Stacja Kosmiczna jest złożonym obiektem sterowania. Pierwotne modele matematyczne każdego z modułów mogą zawierać do kilkuset zmiennych stanu. Modele poszczególnych podsystemów są wykorzystywane przez układy sterowania, a w szczególności przez system nawigacji oraz kontroli położenia stacji. Ze względu na małą wydajność obliczeniową zainstalowanych na stacji systemów komputerowych, wymagane jest zasto-

sowanie modeli oraz układów sterowania o małej złożoności. Konieczna jest zatem operacja redukcji modeli poszczególnych podsystemów.

W rozdziale przedstawiono wyniki redukcji dla modułu 1R (zawierającego elementy *Zarja*, *Unity* oraz *Zwieszda*), który jest szeroko wykorzystywany w celach porównawczych dla różnych metod oraz algorytmów redukcji [2, 12]. Opracowany model **MIMO** stacji kosmicznej zawiera 3 wejścia, 3 wyjścia oraz $n=270$ zmiennych stanu [4]. Wszystkie przedstawione modele zredukowane zawierają $k=30$ zmiennych stanu i opracowane zostały pod kątem minimalizacji błędu aproksymacji dla zakresu adekwatności $\omega < 10$ rad/s.

Na rys. 1 przedstawiono największe wartości szczególne modułu transmitancji oraz błędu aproksymacji w funkcji częstotliwości dla modeli zredukowanych uzyskanych metodą **BTA** oraz metody **FW** (oznaczenie FW_1) dla której filtry wagowe dobrano tak, aby zminimalizować normę \mathcal{H}_∞ błędu aproksymacji (4) w zakresie adekwatności modelu. W Tab. 1 podano wartości błędów aproksymacji dla modeli uzyskanych za pomocą różnych technik redukcji dla całej dziedziny częstotliwości oraz zakresu adekwatności modelu zredukowanego.



Rys. 1. Największe wartości szczególne modułu transmitancji oraz błędu aproksymacji modelu zredukowanego

Fig. 1. The largest singular value of the frequency response, (a) of the reduced systems, (b) of the error systems of the structural model

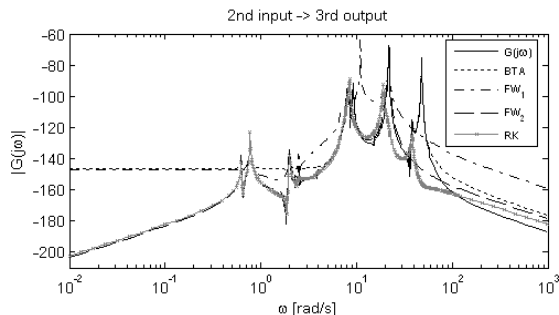
Tab. 1. Względne normy Hankela oraz średniokwadratowy błąd względny modeli zredukowanych

Tab. 1. Relative error norms and relative mean square for the structural model [12]

	BTA	FW ₁	FW ₂	RK	FMR
\mathcal{H}_∞ [$\cdot 10^{-3}$]	3,89	84,9	66,1	133,8	856,3
\mathcal{H}_∞ [$\cdot 10^{-3}$] dla $\omega < 10$ rad/s	1,25	0,678	3,68	133,8	856,3
Δ_6	575,8	487,1	1,15	0,566	12,67

Porównanie wartości norm \mathcal{H}_∞ błędów aproksymacji nie umożliwia jednak oceny dokładności aproksymacji charakterystyk częstotliwościowych, zwłaszcza dla torów 2nd \rightarrow 3th (rys. 2) oraz 3th \rightarrow 2nd, o znacznie mniejszej wartości modułu transmitancji w porównaniu do pozostałych torów modelu. Mała wartość modułu transmitancji tych torów powoduje, że jakość ich aproksymacji ma minimalny wpływ na dobór parametrów funkcji wagowych dla

metody **FW** (model FW_1) lub na wybór zmiennych stanu części dominującej modelu dla metody **BTA**.



Rys. 2. Moduł transmitancji modelu pierwotnego oraz modeli zredukowanych dla toru 2nd input -> 3rd output

Fig. 2. Comparison of the gain characteristic (2nd input -> 3rd output) of the original system and reduced order system

Znacznie lepsze rezultaty redukcji można uzyskać dobierając parametry redukcji pod kątem minimalizacji zaproponowanej przez autorów względnej miary błędu aproksymacji. Na rys. 2 przedstawiono również charakterystykę częstotliwościową modelu zredukowanego uzyskanego w wyniku zastosowania metody **FW** (FW_2) oraz **RK** (ang. Rational Krylov) z funkcjami wagowymi dobranymi pod kątem minimalizacji średniokwadratowego błędu aproksymacji.

5. Podsumowanie

Intensywny rozwój oprogramowania służącego do modelowania i symulacji złożonych obiektów sterowania powoduje wzrost złożoności modeli matematycznych. Duża złożoność modeli w znacznym stopniu utrudnia bezpośrednio wykorzystanie metod i środków programowych analizy obiektów oraz syntezy algorytmów sterowania. Z tego powodu konieczne jest zastosowanie redukcji tworzonych modeli matematycznych.

Najlepsze rezultaty redukcji modeli matematycznych obiektów sterowania o określonym zakresie adekwatności można uzyskać poprzez odpowiedni dobór parametrów metod redukcji.

Ocena zredukowanych modeli matematycznych obiektów sterowania, uzyskanych z zastosowaniem różnych technik redukcji oraz różnych wartości parametrów redukcji, wymaga wprowadzenia odpowiednich miar błędu aproksymacji. Ze względu na ograniczony zakres adekwatności modelu zredukowanego, miary te powinny określać wartość błędu aproksymacji dla zakresu adekwatności uwzględniając różnicę wartości modułu transmitancji dla poszczególnych torów modelu. Dobre rezultaty redukcji można uzyskać dobierając parametry redukcji pod kątem minimalizacji średniokwadratowego względnego błędu aproksymacji.

Poważnym problemem praktycznym jest wybór algorytmu optymalizacji parametrów dla metod redukcji, który umożliwi minimalizację błędu aproksymacji modelu zredukowanego w zadanym zakresie adekwatności. Występowanie wielu ekstremów lokalnych błędu aproksymacji w funkcji parametrów poszczególnych metod redukcji powoduje, że algorytmy bazujące na lokalnych właściwościach funkcji są mało przydatne do wyznaczenia minimum funkcji. Konieczne jest użycie metod optymalizacji globalnej np. algorytmów ewolucyjnych [21].

6. Literatura

[1] Antoulas A., Sorensen D.: Approximation of Large-Scale Dynamical System: An overview. *Int. J. Appl. Comput. Sci.*, vol. 11, no. 5, 2001, pp. 1093-1121.
 [2] Antoulas A.: Approximation of Large-Scale Dynamical System, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 2005.

[3] Boley D.: Krylov space methods on state-space control models, *Circuits Syst. Signal Process*, vol. 13, no. 6, 1994, pp. 733-758.
 [4] Chahlaoui Y., Van Dooren P.: A collection of benchmark examples for model reduction of linear time invariant dynamical systems, *SLICOT Working Note 2002-2*, 2002.
 [5] Chiu T. Y.: Model Reduction by the Low-Frequency Approximation Balancing Method for Unstable Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 7, 1996, pp. 995-997.
 [6] Enns D.: Model reduction with balanced realizations: An error bound and frequency weighted generalization, *Proc 23rd IEEE Conf. Decision and Control*, 1984, pp. 127-132.
 [7] Feldmann P., Freund R.W.: Efficient linear circuit analysis by Pade approximation via the Lanczos process, *IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol. 14 no. 5, 1995, pp. 639-649.
 [8] Fortuna L., Nunnari G., Gallo A.: Model order reduction techniques with Applications in electrical engineering, Springer-Verlag, London 1992.
 [9] Freund R.W.: Model reduction methods based on Krylov subspaces, *Acta Numerica* vol.12, 2003, pp. 267-319.
 [10] Gawroński W., Juang J.: Model reduction in limited time and frequency intervals, *Int. J. System Sci.*, vol. 21, no.2, 1990, pp. 349-376.
 [11] Glover K.: All optimal Hankel-norm approximations of linear multi-variable systems and their Linf error bounds, *Int. J. Contr.*, vol. 39, no. 6, 1984, pp. 1115-1193.
 [12] Gugercin S., Antoulas A.: A Comparative Study of 7 Algorithms for Model Reduction. *Proc. of the 39th IEEE Conf. Decision and Control*, vol. 3, 2000, pp. 2367-2372.
 [13] Gugercin S., Antoulas A.: A survey of model reduction by balanced truncation and some new results, *Int. J. of Control*, vol. 77, no. 8, 2004, pp. 748-766.
 [14] Gugercin S., Willcox K.: Krylov Projection Framework for Fourier Model Reduction. *Automatica*, vol. 44, no. 1, 2008, pp. 209-215.
 [15] Li J. R., White J.: Low-Rank Solution of Lyapunov Equations, *SIAM Review*, vol. 46, no. 4, 2004, pp. 693-713.
 [16] Liu Y., Anderson B.: Singular perturbation approximation of balanced system, *Proc. of 28th IEEE Conf. Decision and Control*, vol. 2, 1989, pp. 1355-1360.
 [17] Moore B.: Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-26, no. 1, 1981, pp. 17-32.
 [18] Obinata G., Anderson B.: Model Reduction for Control System Design, Springer-Verlag London 2001.
 [19] Penzl T.: Algorithms for Model Reduction of Large Dynamical Systems, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 415, 2006, pp. 322-343.
 [20] Pillage L.T., Rohrer R.A.: Asymptotic Waveform Evaluation for Timing Analysis, *IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol.9 no.4, 1990, pp. 352-366.
 [21] Rydel M.: Zredukowane hierarchiczne modele złożonych obiektów sterowania na przykładzie kotła energetycznego, *Rozprawa doktorska*, Opole 2009.
 [22] Singler J.: Approximate low rank solutions of Lapunov equations via Proper Orthogonal Decomposition, *American Control Conference*, 2008, pp. 267-272.
 [23] Wang G., Sreeram V., Liu W. Q.: A New Frequency-Weighted Balanced Truncation Method and an Error Bound, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, no. 9, 1999, pp. 1734-1737.
 [24] Willcox K., Magretski A.: Fourier Series for Accurate, Stable, Reduced-Order Models in Large-Scale Applications, *SIAM Journal for Scientific Computing*, vol. 26, no. 3, 2005, pp. 944-962.

otrzymano / received: 03.11.2009

przyjęto do druku / accepted: 04.01.2010

artykuł recenzowany