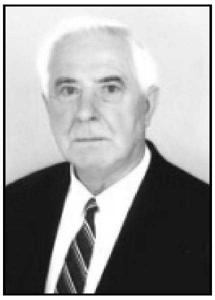
Tadeusz KACZOREK, Robert CIMOCHOWSKI
POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA, WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY

Komputerowy algorytm do stabilizacji dodatnich liniowych układów dyskretnych niecałkowitego rzędu

Prof. dr hab. inż. Tadeusz KACZOREK

Tytuł naukowy profesora zwyczajnego otrzymał w roku 1974. Jest członkiem rzeczywistym PAN i członkiem honorowym Węgierskiej Akademii Nauk. Otrzymał doktoraty honoris causa 7 polskich uczelni. Główne kierunki badań naukowych to analiza i synteza układów wielowymiarowych, układy dodanie i układy niecałkowitego rzędu. Opublikował 22 książki, w tym 6 w języku angielskim oraz około 900 prac naukowych. Wypromował 69 doktorów.



e-mail: kaczorek@isep.pw.edu.pl

Mgr inż. Robert CIMOCHOWSKI

Urodził się 8 maja 1985 roku w Grajewie. Studiował na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej na kierunku Elektrotechnika (specjalność: Automatyka i Technika Mikroprocesorowa). Dyplom magistra inżyniera elektryka uzyskał w dniu 2 lipca 2009 roku. W tym samym roku podjął studia doktoranckie na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. Przygotowuje pracę doktorską z zakresu teorii układów dodatnich.

e-mail: rcimochowski@wp.pl

Streszczenie

Sformułowano i rozwiązano problem stabilizacji dodatnich liniowych układów dyskretnych niecałkowitego rzędu za pomocą macierzy sprzężenia zwrotnego od wektora stanu tak, aby układ zamknięty był dodatni i asymptotycznie stabilny. Podano warunki konieczne i wystarczające istnienia rozwiązania problemu oraz procedurę komputerową wyznaczania tej macierzy sprzężenia zwrotnego. Procedurę tą zilustrowano na przykładzie numerycznym.

Słowa kluczowe: algorytm komputerowy, liniowe układy dyskretne niecałkowitego rzędu, dodatniość, stabilizacja, sprzężenie zwrotne.

Computer algorithm for stabilization of fractional discrete-time linear systems

Abstract

The problem of finding a gain matrix of the state-feedback of fractional discrete-time linear systems such that the closed-loop system is positive and asymptotically stable is formulated and solved. Necessary and sufficient conditions for the solvability of the problem are established. A procedure for computation of the gain matrix is given and illustrated by numerical example.

Keywords: computer algorithm, linear discrete-time fractional systems, positivity, stabilization, state-feedback.

1. Wprowadzenie

W układach dodatnich wymuszenia, zmienne stanu, odpowiedzi i warunki początkowe przyjmują wartości nieujemne. Przykładami takich układów są procesy w reaktorach chemicznych, w wymiennikach ciepła, w kolumnach destylacyjnych, itp. Z układami takimi często spotykamy się w technice, ekonomii, medycynie, itp. Literatura dotycząca układów dodatnich jest dość bogata [3, 4, 6].

Problem stabilności asymptotycznej dodatnich układów niecałkowitego rzędu był rozpatrywany w pracach [1, 2, 5-9]. Metody stabilizacji dodatnich układów niecałkowitego rzędu zostały przedstawione w pracach [7, 8, 9].

W pracy tej zostanie przedstawiony komputerowy algorytm wyznaczania macierzy sprzężenia zwrotnego od wektora stanu liniowych dyskretnych układów niecałkowitego rzędu tak, aby układ zamknięty był dodatni i asymptotycznie stabilny. Proponowany algorytm działający w środowisku MATLAB może znaleźć zastosowanie przy rozwiązywaniu problemów praktycznych w obszarze regulacji, automatyki, robotyki, itp.

Praca ma następującą strukturę. W punkcie 2 podane są warunki konieczne i wystarczające stabilności asymptotycznej dodatnich układów niecałkowitego rzędu. W punkcie 3 podano warunki konieczne i wystarczające stabilizacji dodatnich układów niecałkowitego rzędu za pomocą sprzężenia zwrotnego od wektora stanu. W punkcie 4 przedstawiono procedurę pozwalającą sprawdzić czy dany układ jest dodatni i stabilny asymptotycznie oraz dobrać macierz sprzężenia zwrotnego tak, aby układ zamknięty był dodatni i asymptotycznie stabilny. Punkt 5 zawiera podsumowanie pracy.

2. Stabilność dodatnich liniowych układów niecałkowitego rzędu

Skorzystajmy z definicji różnicy wstecznej niecałkowitego rzędu w postaci [10]

$$\Delta^{\alpha} x_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j}, \quad k \in Z_+ = \{0, 1, 2, \ldots\} \tag{1}$$

przy czym $\alpha \in \Re$, $n-1 < \alpha < n \in N = \{1, 2, \ldots\}$ jest rzędem różnicy wstecznej oraz

$$\binom{\alpha}{j} = \begin{cases} 1 & dla \quad j = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-j+1)}{j!} & dla \quad j > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Rozpatrzmy liniowy dyskretny układ niecałkowitego rzędu opisany równaniami

$$\Delta^{\alpha} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k \in Z_+ \tag{3a}$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \tag{3b}$$

przy czym $x_k \in \Re^n$, $u_k \in \Re^m$, $y_k \in \Re^p$ są odpowiednio wektorem stanu, wymuszenia i odpowiedzi, a $A \in \Re^{nxn}$, $B \in \Re^{nxm}$, $C \in \Re^{pxn}$, $D \in \Re^{pxm}$.

Korzystając z (1) możemy równania (3) napisać w postaci

$$x_{k+1} = A_{\alpha} x_k + \sum_{j=2}^{k+1} c_j x_{k-j+1} + Bu_k, \quad k \in Z_+ \tag{4a}$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \tag{4b}$$

gdzie:

$$A_{\alpha} = A + I_n \alpha, \qquad c_j = (-1)^{j+1} \binom{\alpha}{j} \tag{4c}$$

Korzystając z (2), można pokazać [8, 10], że $c_k > 0$, dla $k = 1,2,\ldots$

Niech $\Re_+^{nxm}$ będzie zbiorem nxm macierzy o elementach nieujemnych oraz $\Re_+^n = \Re_+^{nx1}$.

Definicja 2.1 [4] Układ opisany równaniami (4) nazywamy (wewnętrznie) dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x_0 \in \Re_+^n$ i dla każdego ciągu wymuszeń $u_k \in \Re_+^m$, $k \in Z_+$, zachodzi $x_k \in \Re_+^n$ oraz $y_k \in \Re_+^p$ dla wszystkich $k \in Z_+$.

Twierdzenie 2.1 [10] Dyskretny układ niecałkowitego rzędu (4) jest dodatni dla $0 < \alpha < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_\alpha \in \Re_+^{nxn}, \quad B \in \Re_+^{nxm}, \quad C \in \Re_+^{pxn}, \quad D \in \Re_+^{pxm} \tag{5}$$

Twierdzenie 2.2 [7, 10] Rozwiązanie równania (4a) dla warunku początkowego x_0 ma postać

$$x_k = \Phi_k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_{k-i-1} B u_i \tag{6}$$

gdzie Φ_k określone jest następującą zależnością rekurencyjną

$$\Phi_{k+1} = (A + I_n \alpha)\Phi_k + \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^{i+1} \binom{\alpha}{i} \Phi_{k-i+1} \tag{7}$$

dla $\Phi_0 = I_n$.

Definicja 2.2 [7] Dodatni układ niecałkowitego rzędu (4) nazywamy asymptotycznie stabilnym wtedy, gdy rozwiązanie

$$x_k = \Phi_k x_0 \tag{8}$$

równania (4a) dla $B = 0$ spełnia warunek $\lim_{k \to 0} x_k = 0$ dla każdego $x_0 \in \Re_+^n$.

Z (2) i (4c) wynika, że współczynniki c_j silnie maleją wraz ze wzrostem *j*. W praktyce zakłada się, że *j* jest ograniczone przez pewną liczbę naturalną *h*. W takim przypadku równanie (4a) przyjmuje postać

$$x_{k+1} = A_\alpha x_k + \sum_{j=2}^{h+1} c_j x_{k-j+1} + Bu_k, \quad k \in Z_+ \tag{9}$$

Dodatni układ niecałkowitego rzędu (4a) nazywamy stabilnym praktycznie wtedy i tylko wtedy, gdy układ (9) jest asymptotycznie stabilny.

Definicja 2.2' Dodatni układ niecałkowitego rzędu (4a) nazywamy asymptotycznie stabilnym wtedy, gdy układ jest stabilny praktycznie dla $h \to \infty$.

Łatwo jest wykazać, że definicje 2.2 i 2.2' są równoważne. Zauważmy, że dodatni układ niecałkowitego rzędu (4a) jest układem z rosnąca liczbą opóźnień. Jak wiadomo [2, 5] stabilność asymptotyczna dodatniego układu dyskretnego z opóźnieniami nie zależy od liczby i wielkości opóźnień, a tylko od sumy macierzy stanu.

Twierdzenie 2.3 [7] Dodatni układ dyskretny niecałkowitego rzędu (4a) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dodatni liniowy układ dyskretny

$$x_{k+1} = \overline{A} x_k, \quad \overline{A} = A_\alpha + \sum_{j=2}^{\infty} c_j I_n \tag{10}$$

jest asymptotycznie stabilny.

W pracy [22] udowodniono, że

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j = 0 \tag{11}$$

Biorąc pod uwagę, że $c_0 = -1$, $c_1 = \alpha$ z (11) otrzymamy

$$\sum_{j=2}^{\infty} c_j = 1 - \alpha \tag{12}$$

Podstawiając (12) do (10) otrzymujemy

$$\overline{A} = A + I_n \tag{13}$$

Stosując do układu (10), którego macierz stanu ma postać (13) twierdzenie podane w [2, 5] otrzymujemy:

Twierdzenie 2.4 [7] Dodatni układ dyskretny niecałkowitego rzędu (4a) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z poniższych równoważnych warunków:

1) Wszystkie minory główne macierzy $I_n - \overline{A}$ są dodatnie
2) Wszystkie współczynniki wielomianu charakterystycznego

$$\det[I_n z - A] = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \tag{14}$$

macierzy $A = \overline{A} - I_n$ są dodatnie

3. Stabilizacja dodatnich liniowych układów niecałkowitego rzędu za pomocą sprzężenia zwrotnego od wektora stanu

Rozpatrzmy układ niecałkowitego rzędu (4a) ze sprzężeniem zwrotnym od wektora stanu

$$u_k = K x_k, \quad k \in Z_+ \tag{15}$$

przy czym $K \in \Re^{mxn}$ jest macierzą sprzężenia zwrotnego.

Macierz sprzężenia zwrotnego dobieramy tak, aby układ zamknięty

$$x_{k+1} = (A_\alpha + BK) x_k + \sum_{j=2}^{k+1} c_j x_{k-j+1} \tag{16}$$

był dodatni i asymptotycznie stabilny.

Twierdzenie 3.1 Układ zamknięty niecałkowitego rzędu opisany równaniem (16) jest dodatni i asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz diagonalna

$$\Lambda = diag[\lambda_1 \ldots \lambda_n] \tag{17}$$

o elementach $\lambda_k > 0$, $k = 1,\ldots,n$ i macierz $D \in \Re^{mxn}$ taka, że

$$(A + I_n\alpha)\Lambda + BD \in \Re_+^{nxn} \tag{18a}$$

$$[A\Lambda + BD]1_n < 0 \tag{18b}$$

gdzie $1_n = [1 \ \ldots \ 1]^T \in \Re^n$ (oznacza transpozycję).

Macierz sprzężenia zwrotnego K dana jest zależnością

$$K = D\Lambda^{-1} \tag{19}$$

Dowód. Wykażemy, że układ zamknięty (16) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki (18). Korzystając z zależności (19) oraz (4c) otrzymujemy

$$A_\alpha + BK = (A + I_n\alpha) + BD\Lambda^{-1} = [(A + I_n\alpha)\Lambda + BD]\Lambda^{-1} \in \Re_+^{nxn} \tag{20}$$

gdyż jest spełniony warunek (18a).

Biorąc pod uwagę, że

$$K\Lambda 1_n = D\Lambda^{-1}\Lambda 1_n = D1_n \ \text{ i } \ \Lambda 1_n = \lambda \tag{21}$$

i korzystając z (18) otrzymujemy

$$(\overline{A} + BK - I_n)\lambda = [(A + I_n)\Lambda + BD - \Lambda]1_n = (A\Lambda + BD)1_n < 0 \tag{22}$$

gdyż jest spełniony warunek (18b).

Zgodnie z twierdzeniem 3.1 układ zamknięty niecałkowitego rzędu (16) jest więc asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (18b).

Uwaga. Jeżeli układ niecałkowitego rzędu (4a) nie jest stabilny oraz istnieją macierz diagonalna (17) i macierz $D \in \Re^{mxn}$, spełniające warunki (18), to można dobrać macierz sprzężenia zwrotnego K tak, aby układ zamknięty był dodatni i asymptotycznie stabilny.

4. Procedura i przykład numeryczny

Stosując poniższą procedurę sprawdzamy najpierw czy rozpatrywany układ jest dodatni i asymptotycznie stabilny.

Procedura

Krok 1. Sprawdzamy warunki dodatniości układu

$$A + I_n\alpha \in \Re_+^{nxn},$$

$$B \in \Re_+^{nxm}$$

Krok 2. Sprawdzamy:
1) czy wszystkie minory główne macierzy A są dodatnie, lub
2) czy wszystkie współczynniki wielomianu charaktery-stycznego

$$\det[I_n z - A] = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \tag{23}$$

macierzy A są dodatnie.

Jeżeli powyższe warunki są spełnione, to układ jest dodatni i asymptotycznie stabilny. Jeżeli warunki te nie są spełnione, to kontynuujemy procedurę i dobieramy macierz sprzężenia zwrotnego tak, aby układ zamknięty był dodatni i asymptotycznie stabilny.

Krok 3. Wybieramy macierz diagonalną $\Lambda = diag[\lambda_1 \ldots \lambda_n]$, $\lambda_k > 0$, $k = 1,\ldots,n$ oraz macierz $D \in \Re^{mxn}$ spełniające warunki

$$A\Lambda + BD \in \Re_+^{nxn}$$

$$(A\Lambda + BD)\mathbf{1}_n < 0$$

Krok 4. Korzystając z zależności (19) wyznaczamy macierz sprzężenia zwrotnego

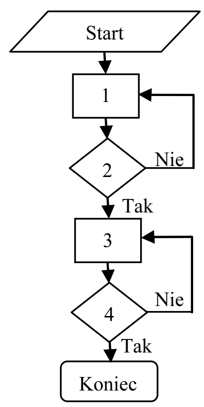
$$K = D\Lambda^{-1}$$

Krok 5. Sprawdzamy czy układ zamknięty jest dodatni

$$A_z = (A_\alpha + BK) \in \Re_+^{nxn}$$

Krok 7. Sprawdzamy czy układ zamknięty jest asymptotycznie stabilny, czyli np. czy wszystkie współczynniki wielomianu charakterystycznego (23) są dodatnie.

Sieć działań algorytmu przedstawiono na rys. 1, gdzie poszczególne bloki oznaczają:
1 – wprowadzenie macierzy A, B i rzędu układu α
2 – sprawdzenie dodatniości układu
3 – wyznaczenie macierzy sprzężenia zwrotnego K
4 – sprawdzenie stabilności asymptotycznej układu zamkniętego



Rys. 1. Schemat algorytmu
Fig. 1. Algorithm diagram

Na podstawie przedstawionych w rozdziale 2 i 3 rozważań, został opracowany program komputerowy działający w środowisku programowym MATLAB. Kod źródłowy programu w formie m-pliku dostępy jest pod adresem e-mail autorów.

Program przeznaczony jest do badania stabilności asymptotycznej oraz stabilizacji za pomocą sprzężenia zwrotnego od wektora stanu dodatnich układów dyskretnych niecałkowitego rzędu. Po uruchomieniu programu zostaje wyświetlony jego opis. Następnie użytkownik wprowadza dane w postaci macierzy stanu oraz rzędu układu (1). W kolejnym kroku program sprawdza czy rozpatrywany układ jest dodatni (2). Jeżeli warunki dodatniości nie są spełnione program wraca do momentu, gdzie użytkownik wprowadza dane. Dalej program bada czy układ jest stabilny asymptotycznie. Użytkownik ma do wyboru dwa kryteria badania stabilności asymptotycznej. Jeżeli rozpatrywany układ spełnia jedno z kryteriów, pojawia się odpowiedni komunikat i praca programu jest przerywana. Jeżeli układ nie spełnia żadnego z kryteriów to program wykonuje kolejne polecenia. Użytkownik wprowadza zakres, w jakim będą szukane wartości macierzy spełniających warunki (18). Następnie program dobiera odpowiednie macierze i wyznacza macierz sprzężenia zwrotnego K. Dalej program sprawdza dodatniość i stabilność asymptotyczną układu zamkniętego.

Przykład numeryczny

Weźmy układ dany równaniem:

$$\Delta^{0.5} x_{k+1} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.5 \\ 0.6 & -0.4 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1.4 \end{bmatrix} u_k$$

Układ jest dodatni, gdyż

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.1 \end{bmatrix} \in \Re_+^{2x2},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1.4 \end{bmatrix} \in \Re_+^{2x1}$$

ale nie jest asymptotycznie stabilny, ponieważ wielomian charakterystyczny układu

$$\det[I_n z - A] = \begin{bmatrix} z+0.4 & -0.5 \\ -0.6 & z+0.4 \end{bmatrix} = z^2 + 0.8z - 0.14$$

ma jeden współczynnik ujemny.

Program dobiera odpowiednie wartości macierzy:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1.7 & -0.2 \end{bmatrix}$$

Wynikiem działania programu komputerowego jest następująca macierz sprzężenia zwrotnego:

$$K = \begin{bmatrix} -0.425 & -0.0667 \end{bmatrix}$$

Układ zamknięty jest dodatni, gdyż macierz

$$A_z = (A_\alpha + BK) = \begin{bmatrix} 0.0575 & 0.4933 \\ 0.005 & 0.0067 \end{bmatrix} \in \Re_+^{2x2}.$$

Jest również stabilny asymptotycznie, ponieważ wielomian charakterystyczny układu zamkniętego

$$\det[I_n z - A_z] = \begin{bmatrix} z-0.0575 & -0.4933 \\ -0.005 & z-0.0067 \end{bmatrix} = z^2 + 0.9358z + 0.2158$$

ma wszystkie współczynniki dodatnie.

5. Podsumowanie

Został sformułowany i rozwiązany problem stabilizacji dodatnich liniowych układów dyskretnych niecałkowitego rzędu za pomocą macierzy sprzężenia zwrotnego od wektora stanu tak, aby układ zamknięty był dodatni i asymptotycznie stabilny. Na podstawie rozważań został opracowany program komputerowy umożliwiający rozwiązanie tego problemu przy użyciu środowiska programowego MATLAB. Przydatność programu wzrasta wraz ze wzrostem wymiaru macierzy *A* badanego układu. Umożliwia on szybkie wyznaczenie macierzy sprzężenia zwrotnego *K*, dla układów o dowolnym wymiarze macierzy *A*.

6. Literatura

[1] Busłowicz M.: Stability of linear continuous-time fractional order systems with delays of the retarded type. Bull. Pol. Acad. Sci. Techn., vol. 56, no. 4, pp. 319-324, 2008.
[2] Busłowicz M.: Simple stability conditions for linear positive discrete-time systems with delays. Bull. Pol. Acad. Sci. Techn., vol. 56, no. 4, pp. 325-328, 2008.
[3] Farina L., Rinaldi S.: Positive Linear Systems; Theory and Applications, J. Wiley, New York 2000.
[4] Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems, Springer-Verlag, London 2002.
[5] Kaczorek T.: Asymptotic stability of positive 1D and 2D linear systems, recent Advances in Control and Automation, Acad. Publ. House EXIT, 41-52, 2008.
[6] Kaczorek T.: Practical stability of positive fractional discrete-time systems, Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Vol. 56, no. 4, 313-318, 2008.
[7] Kaczorek T.: Stabilization of fractional discrete-time linear systems using state-feedback. Proc. Conf. LOGITRANS, April 15-17, Szczyrk 2009.
[8] Kaczorek T.: Positivity and stabilization of 2D linear systems. Discussiones Mathematicae (w druku), 2009.
[9] Kaczorek T.: Positivity and stabilization of 2D linear systems with delays, Materiały Konf. MMAR w Międzyzdrojach, 2009.
[10] Kaczorek T.: Reachability and controllability to zero of positive fractional discrete-time systems, Machine Intelligence and Robotic Control, vol. 6, no. 4, 2007.
[11] Oldham K. B., Spanier J.: The Fractional Calculus. New York: Academmic Press, 1974.
[12] Ortigueira M. D.: Fractional discrete-time linear systems. Proc. of the IEE-ICASSP 97, Munich, Germany, IEEE, New York, vol. 3, pp. 2241-2244.
[13] Ostalczyk P.: The non-integer difference of the discrete-time function and its application to the control system synthesis. Int. J. Syst. Sci. vol. 31, no. 12, 1551-1561, 2000.
[14] Ostalczyk P.: Fractional-Order Backward Difference Equivalent Forms Part I – Horner's Form. Proc. 1-st IFAC Workshop Fractional Differentation and its Applications, FDA'04, Enseirb, Bordeaux, France, 342-347, 2004.
[15] Ostalczyk P.:P Fractional-Order Backward Difference Equivalent Forms Part II – Polynomial Form. Proc. 1st IFAC Workshop Fractional Differentation and its Applications, FDA'04, Enseirb, Bordeaux, France, 348-353, 2004.
[16] Ostalczyk P.: Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowego rzędu. Oficyna Wydawnicza Politechnika Łódzka, 2008.
[17] Oustaloup A.: Commande CRONE. Paris, Hermés, 1993.
[18] Oustaloup A.: La dérivation non entiére. Paris: Hermés, 1995.
[19] Podlubny I.: Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1999.
[20] Podlubny I.: Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. Fract. Calc. Appl. Anal. Vol. 5, no. 4, 367-386, 2000.
[21] Podlubny I., Dorcak L., Kostial I.: On fractional derivatives, fractional order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$-controllers. Proc. 36th IEEE Conf. Decision and Control, San Diego, CA, 4985-4990, 1999.
[22] Sierociuk D.: Estymacja i sterowanie układów dyskretnych ułamkowego rzędu opisanych równaniami stanu. Praca dokt., Pol. W., 2007.
[23] Serociuk D., Dzieliński A.: Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation. Int. J. Appl. Math. Comp. Sci., vol. 16, no. 1, 129-140, 2006.
[24] Vinagre B. M., Monje C. A.,Calderon A.J.: Fractional order systems and fractional order control actions. Lecture 3 IEEE CDC'02 TW#2: Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics.

otrzymano / received: 02.11.2009
przyjęto do druku / accepted: 04.01.2010 *artykuł recenzowany*