

METODY WYZNACZANIA GEOMETRII I CHARAKTERYSTYK DYSZY TYPU AEROSPIKE PROGRAM „PM_CONTOUR”

Michał Folusiak
Instytut Lotnictwa

STOSOWANE OZNACZENIA

T, ρ, p – temperatura, gęstość, ciśnienie
 R, B – stała gazowa, uniwersalna stała gazowa
 C_p, H – ciepło właściwe, entalpia
 γ – wykładnik izentropy
 a, M – prędkość dźwięku, liczba Macha
 μ – kąt Macha
 ν – funkcja Prandtla-Meyera
 φ, λ – współrzędne polarne punktów
 x, y – współrzędne kartezjańskie punktów
 A, D – pole przekroju i średnica
 $Depth$ – „głębokość” dyszy liniowej

Indeksy

$_0$ – stagnacja
 $\bullet_{=THROAT}$ – parametry krytyczne
 $_i$ – i-ty punkt konturu dyszy
 $_E$ – wylot z dyszy
 $_B$ – powierzchnia bazowa

Streszczenie

W poniższym artykule przedstawiono i krótko opisano algorytmy służące do wyznaczania geometrii dyszy aerospace. Przedstawiono również i dokładnie opisano jeden z wybranych algorytmów oraz program komputerowy napisany na jego podstawie.

1. WSTĘP

Program komputerowy „P-M contour” napisany został w międzyplatformowym, zintegrowanym środowisku programistycznym Lazarus (Cross platform IDE Lazarus) w języku programowania FreePascal[1][2]. Oprogramowanie, które posłużyło do stworzenia programu „P-M contour” jest niekomercyjnym, otwartym oprogramowaniem rozwijanym przez społeczność użytkowników. Program „P-M contour” skompilowany został na platformę Linux i Windows.

2. METODY WYZNACZANIA KONTURÓW DYSZY

Geometria idealnej dyszy typu aerospike może być wyznaczona na dwa sposoby. Pierwszy z nich bazuje na metodzie Prandtla-Meyera, dlatego w ogólnym przypadku nie może być zastosowany dla dysz osiowosymetrycznych. Drugą metodą jest dobrze znana metoda charakterystyk.

Metoda Prandtla-Meyera

Zastosowanie metody Prandtla-Meyera do wyznaczenia konturów dyszy aerospike zaproponowali niezależnie Angelino i Lee. Zakłada ona, że ekspansja Prandtla-Meyera w dyszy zachodzi wokół zewnętrznej krawędzi przekroju krytycznego (Rys. 1), a przepływ jest jednorodny. W przypadku liniowej dyszy aerospike, wachlarz fal rozrzedzeniowych kształtujących się wokół tego punktu(krawędzi) stanowi grupę prostych charakterystyk. Równania bilansowe wydatku masowego przepływu pozwalają określić na tych charakterystykach punkty opisujące kontur dyszy.

Metoda opisana powyżej nadaje się do wyznaczania konturu dyszy płaskiej(liniowej), ale może zostać rozszerzona na przypadek osiowosymetryczny. Przybliżona metoda wyznaczania konturów osiowosymetrycznych dysz typu aerospike została opisana przez Angelino[3]. Zastosowanie tej metody jest oczywiście ograniczone poprzez założenie, że wyznaczone charakterystyki są liniami prostymi. Takiego przybliżenia nie można według autora stosować w przypadku:

- dużego względnego skrócenia dyszy, niezależnie od liczby Macha w przekroju wylotowym;
- dużych liczb Macha w przekroju wylotowym, niezależnie od względnego skrócenia dyszy.

Metoda charakterystyk

Druga z metod wyznaczania konturu dyszy opiera się na dobrze znanej metodzie charakterystyk. Jest ona właściwa zarówno dla dysz liniowych jak i osiowosymetrycznych. Metoda ta jest trudniejsza w implementacji od opisanej powyżej, ale jest również bardziej uniwersalna i nadaje się do obliczania bardziej wyrafinowanych przypadków w których przepływ w przekroju krytycznym nie jest jednorodny lub przypadków dysz w których zachodzi częściowe wewnętrzne rozprężanie. Szczegółowy opis metody i algorytmów postępowania przy wyznaczeniu konturów opisane zostały m.in. w [4].

3. ALGORYTM OBLICZEŃ

Do dalszych rozważań wybrano metodę Prandtla-Meyera. Metoda ta posłuży do wyznaczania konturów i charakterystyk dysz liniowych i osiowosymetrycznych z użyciem zarówno idealnego jak i pół-idealnego modelu gazu.

Model gazu

Zastosowano model gazu wieloskładnikowego. Własności termodynamiczne składników gazu opisane są 9-współczynnиковymi funkcjami temperatury:

$$\frac{Cp_{specie}(T)}{R_{specie}} = a_1 T^{-2} + a_2 T^{-1} + a_3 + a_4 T + a_5 T^2 + a_6 T^3 + a_7 T^4$$

$$\frac{H_{specie}^0(T)}{R_{specie} T} = -a_1 T^{-2} + a_2 T^{-1} \ln(T) + a_3 + a_4 \frac{T}{2} + a_5 \frac{T^2}{3} + a_6 \frac{T^3}{4} + a_7 \frac{T^4}{5} + \frac{b_1}{T}$$

gdzie: $R_{specie} = \frac{B}{M_{specie}}$, $B = 8314.5 \text{ kJ} / (\text{kmol} \cdot \text{K})$

Współczynniki we wzorach określone są dla ponad 2000 substancji w przedziałach temperatur 200-1000, 1000-6000 i 6000-20000 K i podane w 9-współczynnиковym formacie danych termodynamicznych NASA (NASA thermo data file format) [5].

W zależności od wybranego modelu gazu, idealnego lub pół-idealnego, własności termodynamiczne przyjęte mogą być względem pewnej temperatury referencyjnej, lub jako funkcje temperatury. Przyjęcie liniowego przebiegu zmiany entalpii i stałej wartości ciepła właściwego obarczone jest dość dużym błędem[4], dlatego poleca się stosowanie modelu gazu pół-idealnego. Uogólnienie metody Prandtla-Meyera na dysze osiowosymetryczne[3] zostało również poszerzone o model gazu pół-idealnego przez autora tego artykułu.

Funkcje termodynamiczne

Zmiana entalpii względem entalpii spiętrzenia gazu wyraża się następującym wzorem:

$$H(T) = [\gamma(T_0) RT_0 / 2 + H^0(T_0)] - H^0(T), \text{ stąd: } H(T_0) = 0, H(T > T_0) > 0$$

Przy obliczeniach parametrów termodynamicznych wykorzystuje się następujące wzory:

$$M(T) = \frac{\sqrt{2H(T)}}{a(T)}$$

$$\gamma(T) = \frac{Cp(T)}{Cp(T) - R}$$

$$a(T) = \sqrt{\gamma(T) RT}$$

Wybrana metoda wymaga ponadto określenia wartości kąta Macha (μ) oraz funkcji Prandtla-Meyera. Funkcje te oblicza się na podstawie wzorów:

$$\mu(T) = \sin^{-1} \left(\frac{1}{M} \right)$$

$$v(T) = \int_T^{T_0} F_v(T) dT, \text{ gdzie: } F_v(T) = -\frac{Cp(T)}{2H(T)} \sqrt{\frac{2H(T)}{a^2(T)} - 1}$$

Dane wejściowe

Danymi wejściowymi do obliczeń geometrii dyszy aerospace są:

- skład spalin i udział molowy składników (FROZEN);
- T^* – temperatura w przekroju krytycznym dyszy;
- T_E – temperatura w przekroju wylotowym dyszy;
- p_0 – ciśnienie w komorze spalania;
- N – ilość punktów obliczeniowych na konturze dyszy;
- T_{REF} – temperatura referencyjna (w przypadku gazu idealnego);
- A^* – pole powierzchni przekroju krytycznego;

Trzy pierwsze wartości można uzyskać z prostych obliczeń równowagi chemicznej, np. programem CEA[5]. Należy przy tym pamiętać, że opisana metoda zakłada niezmiennosć składu mieszaniny produktów spalania wzdłuż dyszy (FROZEN).

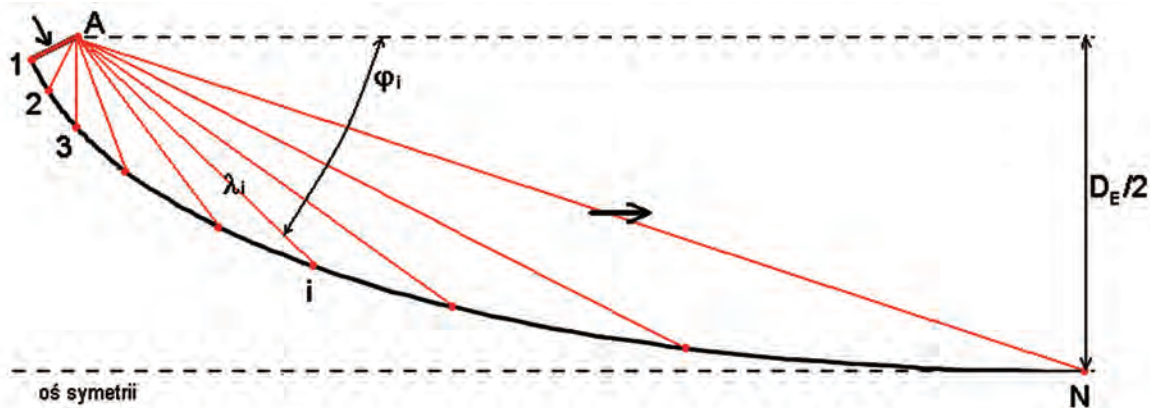
Inicjalizacja obliczeń

Punktem wyjściowym do obliczeń jest wyznaczenie rozkładu temperatur wzdłuż dyszy oraz postawienie warunku początkowego. Dyszę o nieznaną wstępnie geometrii dzieli się w tym celu na N punktów, o stałym spadku temperatury od T^* do T_E . Temperatura w punkcie 1. odpowiada w tym układzie temperaturze w przekroju krytycznym, w punkcie N . – temperaturze w przekroju wylotowym:

$$T_i = T^* - (i-1)\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{T^* - T_E}{N-1}$$

Wyznaczone w ten sposób temperatury dzielą dyszę na $N-1$ paneli. Każdy z N punktów na konturze dyszy i wyznacza linię Macha o stałych wartościach funkcji termodynamicznych. Wyznaczenie wartości tych funkcji pozwoli określić współrzędne punktów konturu (rys. 1).



Rys. 1. Metoda Prandtla-Meyera.

A- krawędź wokół której zachodzi ekspansja Prandtla-Meyera; A-1 - przekrój krytyczny.

Obliczenia

Obliczenia współrzędnych punktów dyszy realizowane są jawnie (nieiteracyjnie) w trzech następujących po sobie pętlach. Przed każdą z pętli następuje obliczenie warunków brzegowych do obliczeń w punkcie początkowym, odpowiadającym $T_1 = T^*$.

$$\mu_1 = \pi / 2$$

$$v_1 = 0.0$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \psi - v_1 + \mu_1$$

Pierwsza pętla ma na celu wyliczenie stosunków przekrojów, stosunków parametrów termodynamicznych, oraz wartości funkcji Prandtla-Meyera we wszystkich punktach konturu dyszy.

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_{i+1} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_i e^{-\left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} F_\rho(T) dT\right)}$$

$$\frac{A_i}{A_*} = e^{\left(\int_{T_i}^{T_i} F_A(T) dT\right)}$$

$$v_{i+1} = v_i + \int_{T_i}^{T_{i+1}} F_v(T) dT$$

,gdzie:

$$F_\rho(T) = \frac{Cp(T)}{a^2(T)}$$

$$F_A(T) = Cp(T) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{2H(T)} \right)$$

$$F_v(T) = -\frac{Cp(T)}{2H(T)} \sqrt{\frac{2H(T)}{a^2(T)} - 1}$$

Stosunki ciśnień w punktach konturu dyszy oblicza się na podstawie równania stanu:

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)_i = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_i \left(\frac{T}{T_0}\right)_i$$

Wielkość przekroju wylotowego, średnicę zewnętrzną oraz szerokość przekroju krytycznego w przypadku dyszy płaskiej oblicza się z następujących wzorów:

$$A_E = \left(\frac{A_E}{A_*}\right) A_*$$

$$D_E = \frac{A_E}{(1-\eta_B) Depth}$$

$$\lambda_{THROAT} = \frac{A_*}{2 \cdot Depth}$$

w przypadku dyszy osiowosymetrycznej:

$$D_E = \sqrt{\frac{4 \cdot A_E}{\pi}}$$

$$\lambda_{THROAT} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi_1}{\frac{A_E}{A_*}}}}{\sin \varphi_1} \cdot \frac{D_E}{2}$$

Przed drugą pętlą, na podstawie wyznaczonych danych, następuje ponowne określenie warunków brzegowych:

$$\lambda_1 = \lambda_{THROAT}$$

$$M_1 = 1.0$$

$$\mu_1 = \pi / 2$$

W pętli obliczane są kąty Macha dla kolejnych punktów konturu:

$$\mu_i = \sin^{-1} \left(\frac{1}{M(T_i)} \right)$$

oraz współrzędne biegunowe i Kartezjańskie punktów na konturze dyszy. W przypadku dyszy płaskiej korzysta się z następujących wzorów:

$$\varphi_i = \nu_E - \nu_i + \mu_i$$

$$\lambda_{i+1} = \frac{\sin(\pi - \varphi_i + \nu_E - \nu_i)}{\sin(\varphi_{i+1} - \nu_E + \nu_i)} \lambda_i$$

$$x_i = \lambda_i \cos(\varphi_i)$$

$$y_i = \lambda_i \sin(\varphi_i)$$

W przypadku dyszy osiowosymetrycznej:

$$\lambda_i = \frac{1 - \sqrt{\frac{1 - \frac{A_i}{A_*} \cdot M_i \sin \varphi_i}{\frac{A_E}{A_*}}}}{\sin \varphi_i} \cdot \frac{D_E}{2}$$

$$x_i = \lambda_i \cos(\varphi_i)$$

$$y_i = \lambda_i \sin(\varphi_i)$$

W ostatniej, trzeciej pętli współrzędne y transformowane są do układu współrzędnych związanego z osią dyszy.

$$Y_i = y_i - y_E$$

4. PROGRAM „P-M CONTOUR”

Schemat

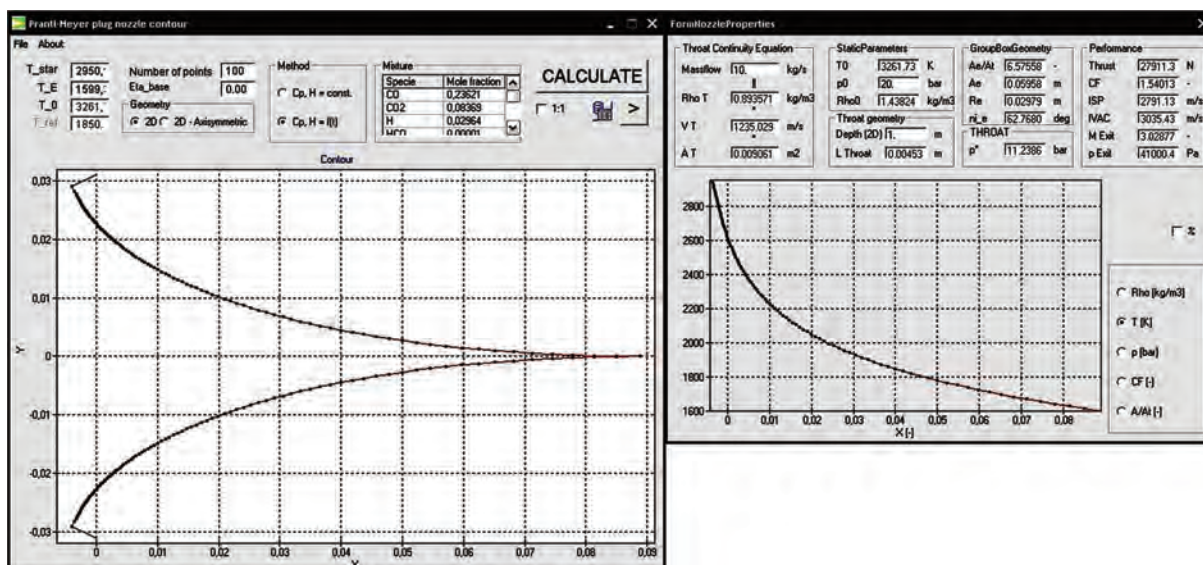
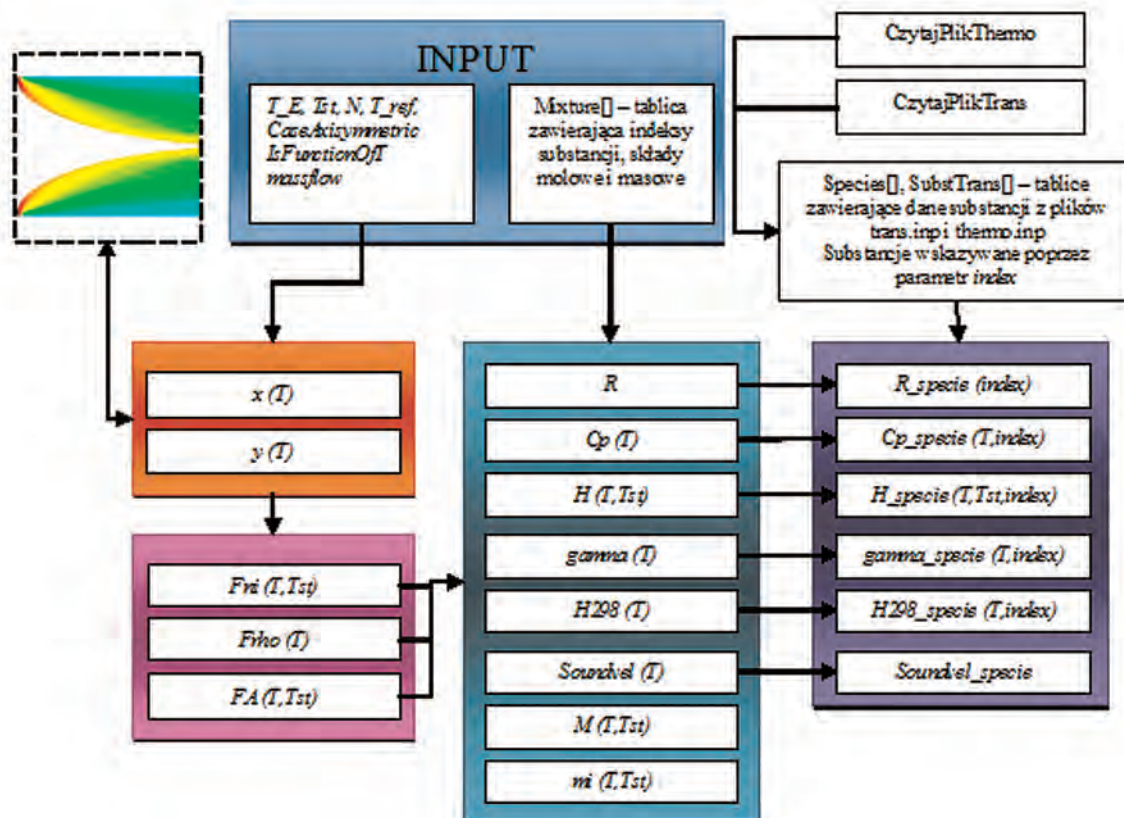
Program „P-M contour” realizuje algorytm opisany w rozdziale powyżej. Relacje pomiędzy najważniejszymi zmiennymi i funkcjami użytymi w programie przedstawione zostały na poniższym schemacie.

Interfejs programu

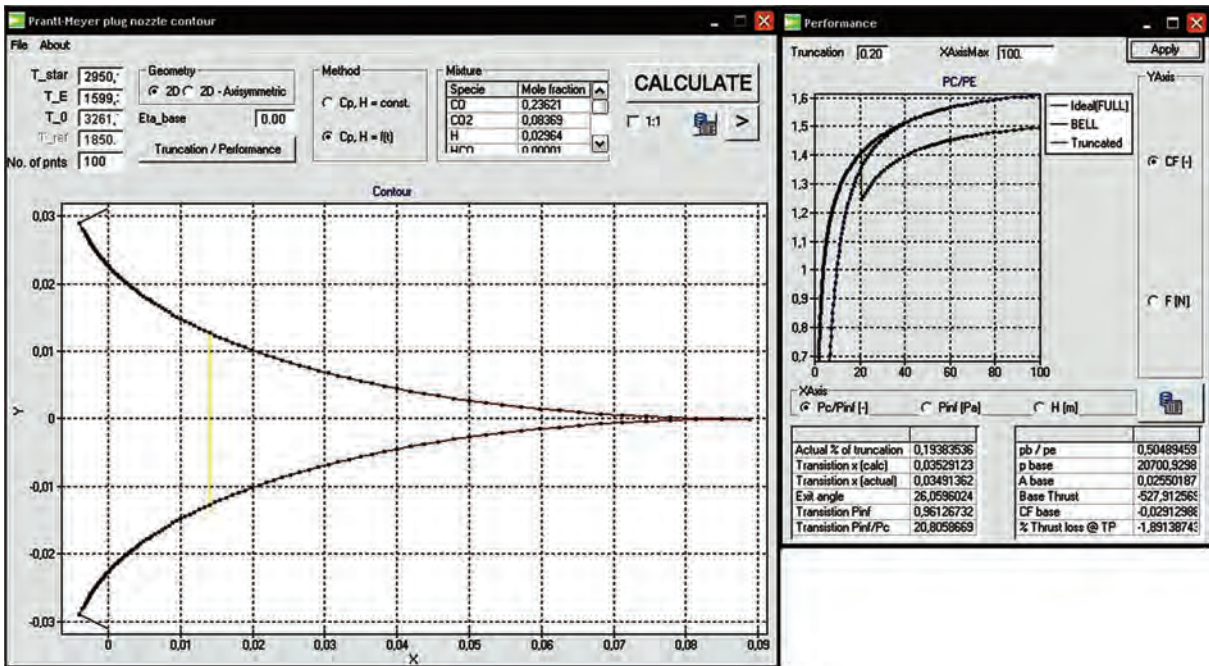
Interfejs programu zaprojektowany został w środowisku Lazarus. Składa się z czterech podstawowych okien:

- okno główne Prandtl-Meyer Plug Nozzle Contour – zawiera najważniejsze dane wejściowe i wyniki, pozwala na wywołanie innych okien i przeprowadzenie obliczeń (Rys. 2, 3, 4);

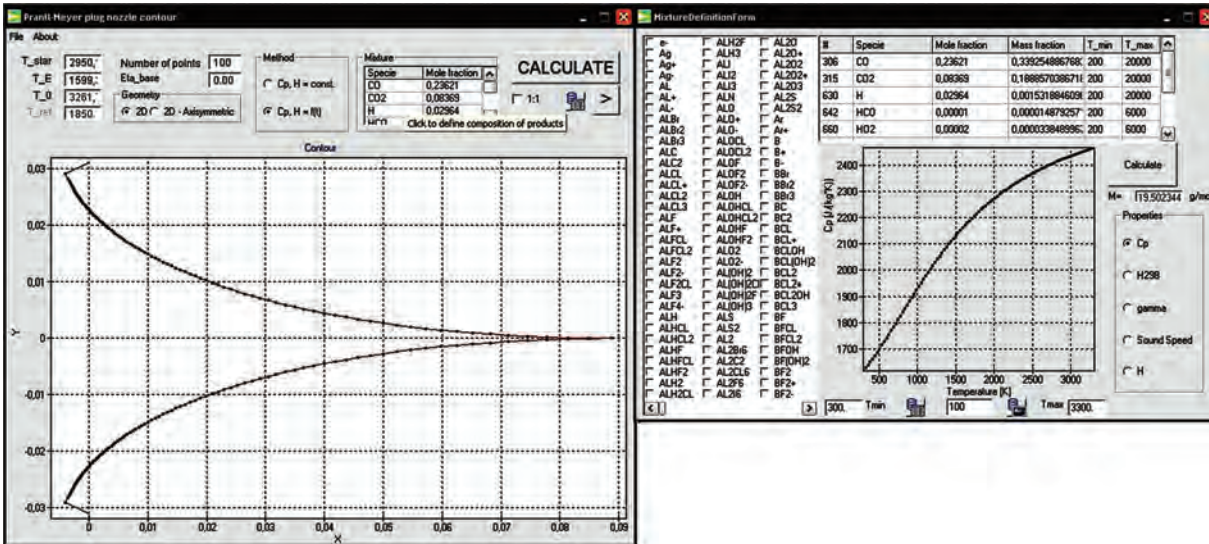
- okno NozzleProperties – zawiera wyniki obliczeń osiągow dyszy i wykresy parametrów termodynamicznych w przekrojach (Rys. 2);
- okno Performance – zawiera wyniki obliczeń osiągow dyszy i wykresy charakterystyki wysokościowej dyszy dzwonowej, dyszy aerospike pełnej długości oraz skróconej o zadanej długości (Rys. 3). Charakterystyki dyszy skróconej określone są przy użyciu modeli zaproponowanych w [6];
- okno Mixture Definition – pozwala zdefiniować skład spalin i odczytać ich uśrednione własności termodynamiczne (Rys. 4, 5);
- okno Species Properties – pozwala na podgląd własności termodynamicznych i transportowych wszystkich substancji w pliku thermo.inp (Rys. 5).



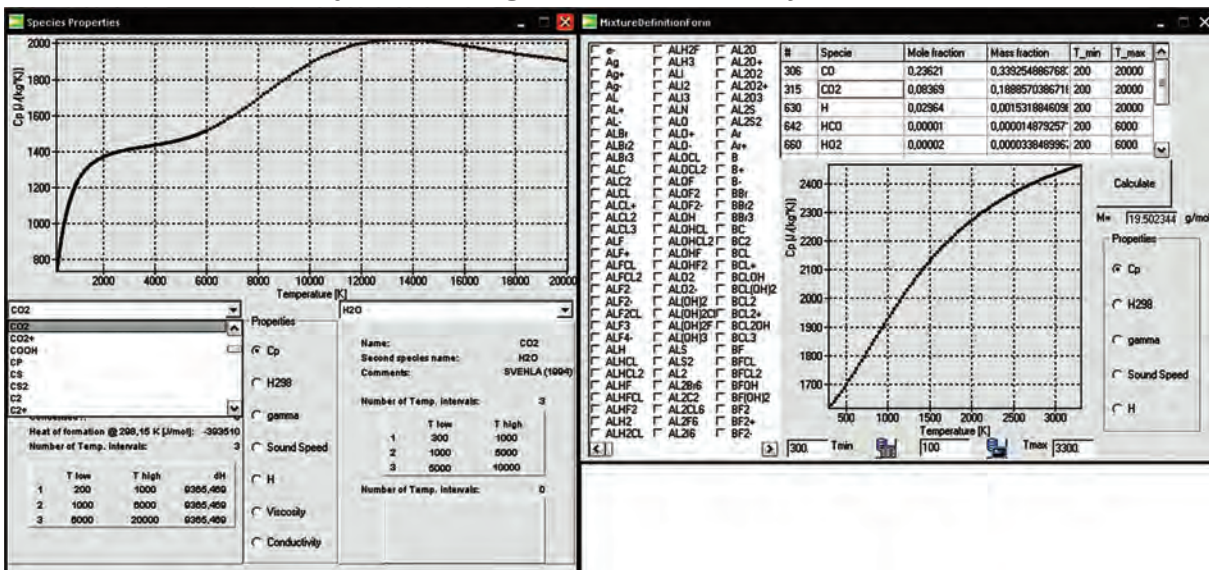
Rys. 2. Okna: główne i Nozzle Properties



Rys. 3. Okna: główne i Performance



Rys. 4. Okna: główne i Mixture Definition



Rys. 5. Okna: Species Properties i Mixture Definition

Przykładowe obliczenia

Możliwości programu zaprezentowane zostaną na przykładzie obliczeń silnika raketowego zasilanego ciekłym metanem i ciekłym tlenem, w stosunku O/F=2,8. Wyniki otrzymane z programu CEA, dla silnika o ciśnieniu w komorze spalania 20 bar, składzie spalin niezmiennym wzdłuż dyszy (FROZEN, n_{fz}=1), przedstawiają się następująco:

	CHAMBER	THROAT	EXIT		
P _{inf} /P	1.0000	1.7796	48.781		
P, BAR	20.000	11.239	0.41000		
T, K	3261.73	2950.10	1599.37		
RHO, KG/CU M	1.4383 0	8.9358-1	6.0129-2		
H, KJ/KG	-1762.63	-2525.28	-5657.85		
U, KJ/KG	-3153.21	-3782.99	-6339.71		
G, KJ/KG	-45343.6	-41942.4	-27027.5		
S, KJ/(KG)(K)	13.3613	13.3613	13.3613		
M, (1/n)	19.503	19.503	19.503		
C _p , KJ/(KG)(K)	2.4632	2.4303	2.1632		
GAMMAS	1.2093	1.2127	1.2455		
SON VEL, M/SEC	1296.8	1235.0	921.5		
MACH NUMBER	0.000	1.000	3.029		
PERFORMANCE PARAMETERS					
A _e /A _t		1.0000	6.5756		
CSTAR, M/SEC		1812.3	1812.3		
CF		0.6815	1.5401		
I _{vac} , M/SEC		2253.4	3035.4		
I _{sp} , M/SEC		1235.0	2791.1		
MOLE FRACTIONS					
*CO	0.23621	*CO2	0.08369	*H	0.02964
HCO	0.00001	HO2	0.00002	*H2	0.15987
H2O	0.44730	*O	0.00364	*OH	0.03565
*O2	0.00397				

Na podstawie uzyskanych danych o składzie molowym spalin, należy w oknie Mixture Definition programu „P-M contour” stworzyć model mieszaniny. Do obliczeń potrzebne są również:

- T* = 2950,10 K – temperatura w przekroju krytycznym dyszy;
- T_E = 1599,37 K – temperatura w przekroju wylotowym dyszy;
- p₀ = 20 bar – ciśnienie w komorze spalania;
- N = 100 – ilość punktów obliczeniowych na konturze dyszy;
- \dot{m} = 10 kg/s – wielkość przykładowa, ale niezbędna do obliczenia osiągow i wymiarów geometrycznych (pole powierzchni przekroju krytycznego, ciąg);

Po kliknięciu przycisku Calculate w głównym oknie, program obliczy i wykreśli kontur dyszy oraz pokaże okno Nozzle Properties wraz z danymi o osiągow dyszy (Rys. 2).

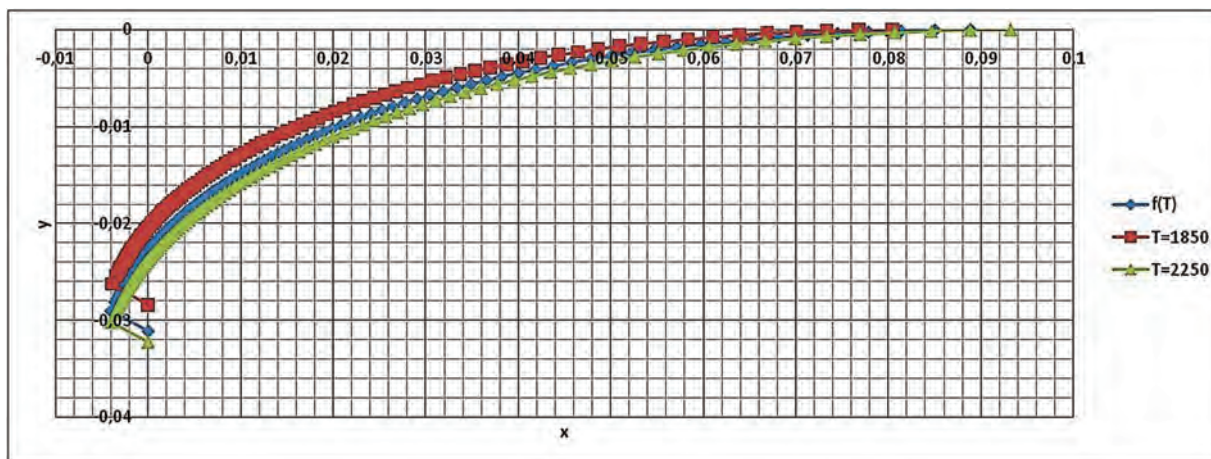
Porównanie danych dyszy z CEA i „P-M contour” przedstawione zostało w poniższej tabeli.

5. WNIOSKI

Wyniki otrzymywane z programu „P-M contour” zgadzają się bardzo dobrze z wynikami z programu CEA. Należy przy tym zwrócić uwagę, na zalety wynikające z zastosowania modelu gazu pół-doskonałego i błędy jakie mogą się pojawić przy modelowaniu dysz silników raketowych. Zaprezentowane powyżej przykładowe obliczenia wykazały, że stosowanie uproszczonego modelu gazu doskonałego wiąże się z popełnieniem dużego błędu zarówno przy przewidywaniu osiągnięć dyszy, jak i obliczaniu jej konturu (Rys. 6).

Stworzony program stanowi bardzo dobre narzędzie do projektowania dysz typu Aerospike. Zaprezentowana metoda, oraz elementy programu będą mogły być w przyszłości podstawą dla stworzenia programu opierającego się np. o metodę charakterystyk. Modele gazu i mieszaniny mogą zostać w łatwy sposób wyodrębnione z programu i stanowić podstawę dla bardziej zaawansowanych prac.

	P-M contour			
	CEA	$C_p, H=f(T)$	$T_{REF}=1850$	$T_{REF}=2275$
P_E , bar	0.41000	0.41000	0.45333	0.39573
T_0 , K	3261.73	3261.73	3261.73	3261.73
M_E	3.029	3.029	3.002	3.064
A_E/A^*	6.5756	6.5756	6.5756	6.5756
CF	1.5401	1.5401	1.5409	1.5652
I_{vac} , m/s	3035.4	3035.4	3034.19	3058.26
I_{sp} , m/s	2791.1	2791.1	2766,6	2823.55
gamma	gamma=f(T)	gamma=f(T)	1,2356	1,2239



Rys. 6. Porównanie konturów dyszy aerospike obliczonych z użyciem różnych modeli gazu

BIBLIOGRAFIA

- [1] Free Pascal Community: **Lazarus WIKI**. ,:.
- [2] Free Pascal community: **Lazarus Project Homepage**. ,:.
- [3] Angelino, G.: **Approximate Method for Plug Nozzle Design**. *AIAA Journal* 1964,2:1834-1835.

- [4] Zebbiche, T. & Youbi, Z.E.: **Supersonic Two-Dimensional Minimum Length Nozzle Design at High Temperature**. *Emirates Journal for Engineering Research* 2006,**11**:91-102.
- [5] McBride, B.J. & Gordon, S.: **Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium Compositions and Applications**. 1996,.,.
- [6] Onofri, M.: **Plug Nozzles: Summary of Flow Features and Engine Performance**. 2002,.,.

Michał Folusiak

**METHODS OF CONTOUR DESIGN AND PERFORMANCE PREDICTION
OF AN AEROSPIKE NOZZLE. PROGRAM „PM_CONTOUR”**

Abstract

In the paper, existing contour design methods of an aerospike nozzle are presented and briefly described. Methods of contour design and performance prediction implemented in the PM_contour program are described in details.