

Dariusz JANECKI, Jarosław ZWIERZCHOWSKI

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA, WYDZIAŁ MECHATRONIKI I BUDOWY MASZYN,
CENTRUM LASEROWYCH TECHNOLOGII METALI

Podstawy teoretyczne oceny profili walcowości obrotowych części maszyn metodą klatki

Część II: Metoda filtracji wykorzystująca podejście funkcjonalowe

Dr hab. inż. Dariusz JANECKI

Obecnie jest kierownikiem katedry Automatyki i Robotyki i z-cą dyr. Centrum Laserowych Technologii Metali na Wydziale Mechatroniki i Budowy Maszyn. Zainteresowania naukowe: metrologia powierzchni, automatyka i robotyka, cyfrowe przetwarzanie sygnałów, komputerowe systemy pomiarowe.



e-mail: djaneck@tu.kielce.pl

Mgr inż. Jarosław ZWIERZCHOWSKI

Asystent w Centrum Laserowych Technologii Metali. Zainteresowania: Automatyka i Robotyka, Techniki Mikroprocesorowe, Metrologia oraz cyfrowe przetwarzanie sygnałów połączone z metrologią powierzchni.



e-mail: jzwierzchowski@tu.kielce.pl

Streszczenie

W celu rozdzielenia składowych kształtu od składowych falistości i chropowatości stosuje się filtry cyfrowe dolnoprzepustowe. W pracy opracowano metodę filtracji profili walcowości zaobserwowanych metodą „klatki”. Wykorzystuje ona tzw. podejście funkcjonalowe. Pozwala to na eliminację efektu brzegowego oraz zapewnia, że w punktach przecięcia trajektorii skanowania wartości promienia przefiltrowanych profili okrągłości i prostoliniowości są równe.

Słowa kluczowe: walcowość, metoda pomiarowa klatki, filtracja profilu.

Theoretical background of cylindricity profile evaluation of rotary parts by means of bird-cage measuring method

Part 2: A functional approach to profile filtering

Abstract

It is assumed that roughness, waviness and form constitute the geometrical surface structure. The components of form with the longest wavelengths can now be extracted using digital low-pass filters. In the case of cylindrical surfaces, the assessment of form requires that a profile be filtered with the aim of eliminating the waviness and roughness constituents. The filtration process selected for a profile registered with the bird-cage method should provide filtration both roundness and straightness profiles. Additionally, it is logical requiring the values of the radii of the filtered roundness and straightness profiles be equal at the points of intersection of the scanning trajectories. The profiles under study were filtered using the so called functional approach, which was introduced to surface metrology by Krystek [2, 3] and further developed by other researchers [7]. According to the approach, a filtered profile is modeled as a spline, which assumes a required smooth form due to local stresses proportional to the value of a deviation. The major advantage of the functional approach is the elimination of the boundary effect, which occurs during filtration of straightness profiles. Although it is relatively simple to directly generalize the functional approach to the filtration of a cylindricity profile registered with the bird-cage method (26), the problem is very difficult to solve because of its dimension. Therefore, simplified approach has been applied. First, we filtered each profile separately using the pre-determined methods for roundness and straightness profiles. Subsequently, we filtered the profiles by introducing additional equality conditions (33), which assured profile continuity at the points of intersection of the cylinder scanning trajectories. The proposed two-step filtration algorithm can be combined with the procedure of profile matching discussed in Ref. [1].

Keywords: cylindricity, bird-cage method, profile filtering.

1. Wprowadzenie

Przyjmuje się, że chropowatość, falistość i kształt tworzą strukturę geometryczną powierzchni. W celu wyodrębnienia składowych

kształtu o największych długościach fal stosuje się obecnie dolnoprzepustowe filtry cyfrowe. Jest oczywiste, że w celu oceny kształtu powierzchni walcowych zaobserwowany profil również wymaga filtracji w celu odrzucenia składowych falistości i chropowatości. Zastosowana metoda filtracji profilu zaobserwowanego metodą klatki powinna zapewnić filtrację zarówno profili okrągłości jak i prostoliniowości. Dodatkowo logiczne jest wprowadzenie wymagań, by w punktach przecięcia trajektorii skanowania wartości promienia przefiltrowanych profili okrągłości i prostoliniowości były równe.

Istnieje bogata literatura dotycząca filtracji profili okrągłości i prostoliniowości. Brak jest natomiast prac omawiających filtrację profili walcowości, w szczególności profili zmierzonych metodą klatki. Ponieważ metoda pomiarowa klatki jest kombinacją metody przekrojów poprzecznych i wzdluznych na wstępie omówimy metody pomiaru profili okrągłości i prostoliniowości.

W pracy stosujemy oznaczenia wprowadzone w części pierwszej artykułu [1].

2. Podstawy filtracji profili okrągłości i prostoliniowości

Na wstępie rozważymy profil okresowy $r(\varphi)$ określony na przedziale $[0, 2\pi]$. Niech $r_i = r(\varphi_i)$, $i = 1, \dots, N$ będzie dyskretnym profilem okrągłości zarejestrowanym ze stałym odstępem próbkowania $\Delta\varphi = 2\pi/N$. *Filtrem dyskretnym liniowym stacjonarnym* nazywamy odwzorowanie $r_i \rightarrow r_i^f$ opisane za pomocą równania

$$r_i^f = \sum_{j=1}^N r_j h_{i-j}, \quad (1)$$

gdzie h_i jest pewnym ciągiem okresowym o okresie N . Ciąg h_i nazywamy *funkcją wagi* lub *odpowiedzą impulsową* filtru. Równanie filtru można również zapisać w dziedzinie częstotliwości wyznaczając dyskretną transformatę Fouriera ciągów r_i , r_i^f , h_i ,

$$(z\ definicji\ R(k) = \sum_{i=1}^N r_i e^{-j\Delta\varphi ik})$$

$$R^f(k) = H_f(k)R(k), \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (2)$$

Funkcję $H_f(k)$ nazywamy *funkcją przejścia filtru* lub *transmisyjnością*. Jeśli funkcja wagi jest funkcją parzystą $h_{-i} = h_{N-i} = h_i$, to funkcja $H_f(k)$ przyjmuje wartości rzeczywiste i filtr nie wprowadza przesunięcia fazowego profilu. Filtr taki nazywamy *filtrem*

z korekcją fazy. Dla profili okresowych, sposób implementacji filtru wykorzystujący równanie (2) jest zdecydowanie najprostszy.

Własności filtru zdeterminowane są przez transmitancję filtru $H_f(k)$. Obecnie najczęściej stosowany jest filtr Gaussa, dla którego

$$H_f(k) = e^{-\ln 2 \left(\frac{k}{k_c}\right)^2}, \quad k = 0, \dots, N/2$$

$$H_f(k) = H_f(N-k) \text{ dla pozostałych } k. \quad (3)$$

Zwróćmy uwagę, że $H_f(k_c) = 1/2$. Składowa widma o numerze k , dla której tłumienie filtru jest równe $1/2$ nosi nazwę *składowej odcięcia filtru* (ang. *cutoff component*). Można również stosować filtry, dla których

$$H_f(k) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k \in [0, k_c] \cup [N - k_c, N - 1] \\ 0 & \text{dla pozostałych } k \leq N/2. \end{cases} \quad (4)$$

Filtr ten nie zmienia składowych profilu o numerach $k \leq k_c$, natomiast całkowicie tłumi składowe $k > k_c$. Filtr taki nazywamy *filtrem odcinającym* (w literaturze stosowana jest również nazwa *filtru Fouriera*).

Zagadnienie filtracji profili nieokresowych określonych na odcinku $z \in [0, H]$ jest znacznie bardziej złożone. Dlatego na wstępie rozważmy przypadek, gdy $z \in [-\infty, \infty]$. Przyjmijmy, że $r_i = r(z_i)$, $i = -\infty, \dots, \infty$ będzie dyskretnym profilem prostoliniowości otrzymanym w wyniku próbkowania profilu ciągłego ze stałym odstępem próbkowania Δz . W tym przypadku odpowiednikami równań filtru (1), (2) są równania

$$r_i^f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k h_{i-k}, \quad (5)$$

$$R^f(\Omega) = H(\Omega)R(\Omega), \quad \Omega \in [0, 2\pi], \quad (6)$$

gdzie Ω jest unormowaną pulsacją kątową, $R^f(\Omega)$, $R(\Omega)$, $H_f(\Omega)$ są transformacjami Fouriera ciągów r_i , r_i^f , h_i , (z definicji

$$R(\Omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r_i e^{-j\Omega i}.$$

Rozważmy obecnie przypadek profilu prostoliniowości określonego na odcinku $z \in [0, H]$. Niech $r_i = r(z_i)$, $i = 1, \dots, N$ będzie ciągiem dyskretnych próbek profilu, gdzie $z_i = H(i-1)/(N-1)$. W przypadku filtrów profili prostoliniowości najczęściej stosowana implementacja filtru wykorzystuje definicję (5). Pierwszym możliwym uproszczeniem jest przyjęcie, że operacja sumowania (5) przeprowadzana jest w skończonym zakresie, czyli

$$r_i^f = \sum_{k=i-K}^{i+K} r_k h_{i-k}. \quad (7)$$

dla odpowiednio dobranej wartości K . Z reguły liczba K jest tak dobrana, by $h_i \approx 0$ dla $|i| \geq K$. Np. dla filtru Gaussa, dla którego

$$h_i = h(i\Delta z) = \frac{1}{\lambda_c} \sqrt{\frac{\pi}{\log 2}} e^{-\frac{\pi^2 (i\Delta z)^2}{\lambda_c^2 \log 2}}, \quad (8)$$

gdzie λ_c jest długością fali odcięcia filtru (ang. *cutoff length*) przyjmuje się $K = \lambda_c / \Delta z$ ponieważ $h(z)$ szybko zanika dla $|z| \geq \lambda_c / 2$ i np.

$$h(\lambda_c) \cong 1.39417 \cdot 10^{-6} h(0). \quad (9)$$

Zwróćmy uwagę, że suma (7) nie może być wyznaczona dla każdej próbki o współrzędnej z leżącej w przedziale $[0, H]$, a jedynie dla próbek, których indeksy należą do przedziału $[K+1, N-K]$. Dlatego np. w pomiarach chropowatości powierzchni normy zalecają zarejestrowanie profilu dłuższego o dwa odcinki elementarne niż wymagane do analizy pięć odcinków elementarnych. Dodatkowe odcinki służą do rozbiegu filtrów i nie są wykorzystywane w dalszej analizie profilu. Często jednak zarejestrowany profil jest zbyt krótki, aby można było zrezygnować ze skrajnych odcinków. Ten sam problem pojawia się przy próbach opracowania algorytmów filtracji profili powierzchni obrotowych.

W literaturze istnieje kilka rozwiązań pozwalających wyeliminować efekt brzegowy. Najwcześniejsze rozwiązania należą do Krystka [2, 3], który zaproponował zastosowanie do filtracji profilu tzw. podejście funkcjonalowe. Profil przefiltrowany modelowany jest w postaci giętkiej listwy (ang. *spline*), która pod wpływem lokalnych naprężeń proporcjonalnych do wartości odchyłki profilu zaobserwowanego przyjmuje właściwy gładki kształt. Podstawy matematyczne metod filtracji wykorzystujących krzywe typu spline zawarte są w pracach [4-6]. Wadą tego podejścia jest złe uwarunkowanie zadania optymalizacji (i związane z nim równania liniowe) w przypadku, gdy odstęp próbkowania profilu jest dużo mniejszy od długości odcięcia filtru. W pracy [7] zaproponowano modyfikację polegającą zastosowaniu do aproksymacji profilu przefiltrowanego ciągłych funkcji sklepanych trzeciego rzędu (ang. *cubic splines*), w których odległości pomiędzy węzłami funkcji jest dużo większa od odstepu próbkowania profilu. Dzięki temu współczynnik uwarunkowania problemu staje się niezależny od odstepu próbkowania.

W pracy [8] do eliminacji efektu brzegowego wykorzystano filtry regresyjne. W filtrze regresyjnym wartość profilu przefiltrowanego w każdym punkcie powierzchni wyznaczana jest w wyniku lokalnej aproksymacji profilu za pomocą wielomianu odpowiedniego rzędu (zwykle pierwszego lub drugiego). Kryterium wykorzystywanym przy aproksymacji profilu jest suma ważona kwadratów różnic pomiędzy wartościami profilu obserwowanego od wielomianu aproksymującego. Odpowiednie własności filtru otrzymuje się przez odpowiedni dobór funkcji wagi.

Obecnie zarówno filtr typu spline jak i filtr regresyjny są opisane w dokumentach normalizacyjnych [9, 10]. W tym opracowaniu do filtracji profili walcowości zarejestrowanych metodą klatki zastosujemy pewne uogólnienie podejścia zaproponowanego przez Krystka.

3. Funkcjonalowe podejście do zagadnienia filtracji

Wyobraźmy sobie cienką giętką listwę (ang. *spline*), na którą działają siły proporcjonalne do lokalnego odchylenia profilu $r(z)$, $z \in [0, H]$. Wówczas listwa przyjmie kształt $r_f(z)$, dla którego funkcjonal

$$J = \frac{1}{2} \int_0^H (r(z) - r_f(z))^2 dz + \frac{\gamma'_z}{2} \int_0^H \left(\frac{d^2 r_f(z)}{dz^2} \right)^2 dz \quad (10)$$

osiąga minimum, gdzie γ'_z jest pewnym współczynnikiem zależnym od współczynnika sprężystości listwy. Pierwszy składnik funkcjonalu (10) ma gwarantować, by profil przefiltrowany $r_f(z)$ odpowiednio dobrze aproksymował profil zaobserwowany $r(z)$. Drugi składnik nazywany *energiją zgięcia krzywej* jest kosztem gwarantującym odpowiednią „wolnoziemność” sygnału przefiltrowanego. Parametr γ'_z dobiera się tak, aby uzyskać żądane pasmo przenoszenia filtru. W dalszej części rozdziału składnik

$$\tilde{r}_{nm}^{\text{df}} = r_{i_n m}^{\text{cf}}, \quad \tilde{r}_{nm}^{\text{df}} = r_{n j_m}^{\text{cf}}. \quad (28)$$

Zagadnienie minimalizacji (26) względem $r_{ij}^{\text{cf}}, r_{ij}^{\text{cf}}$ z ograniczeniami (27) rozwiązujemy definiując funkcję Lagrange'a

$$L = J + l_{nm} \sum_{n=1}^{N_\ell} \sum_{m=1}^{M_c} (\tilde{r}_{nm}^{\text{cf}} - \tilde{r}_{nm}^{\text{cf}}) \quad (29)$$

gdzie l_{nm} są współczynnikami Lagrange'a. Z warunków koniecznych optymalności otrzymujemy układ równań

$$\frac{\partial L}{\partial r_{ij}^{\text{cf}}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_c, \quad j = 1, 2, \dots, M_c, \quad (30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_{ij}^{\text{cf}}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_\ell, \quad j = 1, 2, \dots, M_\ell, \quad (31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial l_{nm}} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N_\ell, \quad m = 1, 2, \dots, M_c. \quad (32)$$

Chociaż otrzymane uogólnienie od strony teoretycznej nie jest skomplikowane, to jednak praktyczne rozwiązanie otrzymanego układu jest w zasadzie niemożliwe ze względu na liczbę zmiennych. Istotnie, zwróćmy uwagę, że liczba ta wynosi $N_c M_c + N_\ell M_\ell + N_\ell M_c$, a więc przykładowo dla typowych wartości liczby próbek w przekroju $N_c = M_\ell = 2^{10}$ i liczby przekrojów $M_c = N_\ell = 10$ liczba zmiennych wynosi ponad 20 000.

Z tego względu stosujemy podejście uproszczone polegające na zastosowaniu następującego algorytmu:

KROK 1. W pierwszym kroku dokonujemy filtracji każdego profilu oddzielnie wykorzystując opisane algorytmy filtracji dla profili prostoliniowości i okrągłości. W wyniku filtracji otrzymujemy profil przefiltrowany $r_{ij}^{\text{cf}}, r_{ij}^{\text{cf}}$.

KROK 2. Wyznaczamy wartości średnie promienia w punktach przecięcia trajektorii skanowania

$$\tilde{\rho}_{nm} = \frac{1}{2} (\tilde{r}_{nm}^{\text{cf}} + \tilde{r}_{nm}^{\text{cf}}) \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots, N_\ell, \quad m = 1, 2, \dots, M_c. \quad (33)$$

KROK 3. Powtarzamy proces filtracji oddzielnie dla każdego profilu wprowadzając dodatkowe warunki równościowe:

- $\tilde{\rho}_{nm} = \tilde{r}_{nm}^{\text{cf}}$ dla profili okrągłości,
- $\tilde{\rho}_{nm} = \tilde{r}_{nm}^{\text{cf}}$ dla profili prostoliniowości.

Pozostaje sformułować zadanie filtracji profili okresowych i nieokresowych z dodatkowymi założeniami równościowymi. Rozważmy dla przykładu profil prostoliniowości r_j , $i = 1, \dots, M_\ell$. Załóżmy, że profil przefiltrowany r_j^f powinien w punktach profilu o indeksach j_m przyjmować wartości $\tilde{\rho}_m$, gdzie $m = 1, \dots, M_c$. Definiujemy funkcję Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M_\ell} (r_j - r_j^f)^2 + \frac{\gamma_z}{2} \sum_{j=2}^{M_\ell-1} (\nabla^2 r_j^f)^2 + \sum_{m=1}^{M_c} l_m (\tilde{r}_m^f - \tilde{\rho}_m), \quad \tilde{r}_m^f = r_{j_m}^f. \quad (34)$$

Z warunków koniecznych optymalności otrzymujemy

$$\mathbf{A}_1^f \mathbf{r}_1^f = \mathbf{r}_1, \quad (35)$$

gdzie

$$\mathbf{A}_1^\ell = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\ell & -\mathbf{P} \\ -\mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\tilde{\rho}_1 \\ \vdots \\ -\tilde{\rho}_{M_c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_1^f = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^f \\ l_1 \\ \vdots \\ l_{M_c} \end{bmatrix} \quad (36)$$

i gdzie $\mathbf{P} \in R^{M_c \times M_\ell}$ jest macierzą, w której elementy o indeksach (m, j_m) , $m = 1, \dots, M_c$ są równe 1, a pozostałe elementy są równe zeru.

Przedstawiony algorytm dwuetapowej filtracji może być połączony z procedurą dopasowania profili omówioną w [1], gdyż wydaje się bardziej celowe zastosowanie procedury dopasowania dopiero po wykonaniu pierwszego kroku filtracji. Kolejność wykonywanych operacji powinna być następująca:

KROK 1. Dokonujemy filtracji każdego profilu zaobserwowanego oddzielnie wykorzystując opisane algorytmy filtracji dla profili prostoliniowości i okrągłości. W wyniku filtracji otrzymujemy profil przefiltrowany $r_{ij}^{\text{cf}(1)}, r_{ij}^{\text{cf}(1)}$.

KROK 2. Dokonujemy dopasowania profili przefiltrowanych w kroku 1. W wyniku dopasowania otrzymujemy profil $r_{ij}^{\text{cf}(2)}, r_{ij}^{\text{cf}(2)}$.

KROK 3. Definiujemy żądane wartości profilu przefiltrowanego przed dopasowaniem

$$\tilde{\rho}_{nm}^c = \tilde{r}_{nm}^{\text{cf}(1)} + \Delta \tilde{\rho}_{nm},$$

$$\tilde{\rho}_{nm}^\ell = \tilde{r}_{nm}^{\text{cf}(1)} - \Delta \tilde{\rho}_{nm},$$

gdzie

$$\Delta \tilde{\rho}_{nm} = \tilde{r}_{nm}^{\text{cf}(2)} - \tilde{r}_{nm}^{\text{cf}(1)}$$

i $\tilde{r}_{nm}^{\text{cf}(1)}, \tilde{r}_{nm}^{\text{cf}(1)}, \tilde{r}_{nm}^{\text{cf}(2)}, \tilde{r}_{nm}^{\text{cf}(2)}$ oznaczają wartości odpowiednich profili w punktach przecięcia trajektorii.

KROK 4. Po raz drugi dokonujemy filtracji profilu zaobserwowanego z dodatkowymi warunkami równościowymi

- $\tilde{\rho}_{nm}^c = r_{i_n m}^{\text{cf}}$ dla profili okrągłości,
- $\tilde{\rho}_{nm}^\ell = r_{n j_m}^{\text{cf}}$ dla profili prostoliniowości.

KROK 5. Dokonujemy powtórnego dopasowania otrzymanych profili.

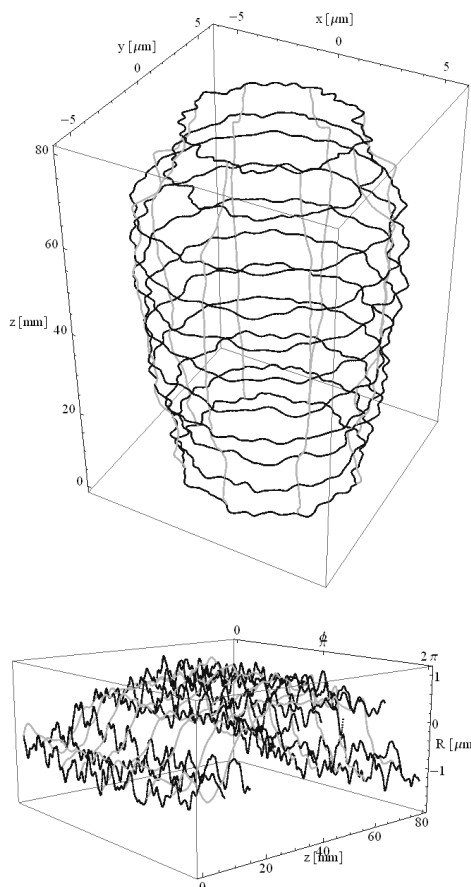
Opracowany algorytm będziemy nazywali *algorytmem dwuetapowej filtracji z optymalnym dopasowaniem profili*. W wyniku zastosowania algorytmu otrzymujemy profil przefiltrowany spełniający warunek (27).

5. Badania eksperymentalne

Przeprowadzono badania eksperymentalne opracowanej metody filtracji profili walcowości. Poniżej przedstawiamy dwa przykłady: filtracji profilu zaobserwowanego metodą klatki waleczka polerowanego i szlifowanego.

5.1. Wałeczek z powierzchnią polerowaną

Przyjmijmy, że numer składowej odcięcia filtru okrągłości wynosi $k_c = 50$ (fal na obrót). Dalej przyjmijmy, że długości fali odcięcia filtru prostoliniowości jest równa długości fali odcięcia filtru okrągłości (wyrażonej w mm) $\lambda_c = \pi D / k_c = 3.27$ mm. Na rys. 3 przedstawiono wykres profilu przefiltrowanego za pomocą algorytmu dwuetapowej filtracji z optymalnym dopasowaniem profilu w układzie współrzędnych cylindrycznych i kartezyjskich.

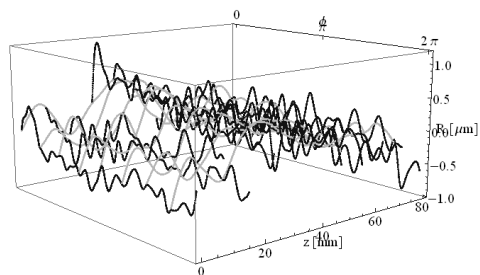
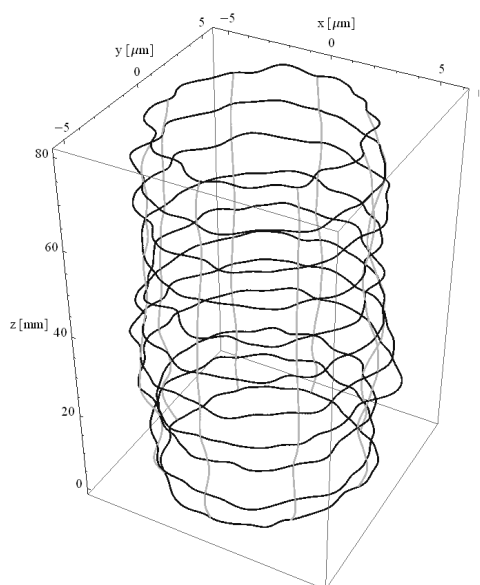


Rys. 3. Wykresy przestrzenne przefiltrowanych profili walcowości: powierzchnia elementu po polerowaniu

Fig. 3. Three-dimensional diagrams of filtered cylindricity profile: the roller with polished surface

5.2. Wałeczek z powierzchnią szlifowaną

Obecnie przyjmujemy, że numer składowej odcięcia filtru okrągłości wynosi $k_c = 15$ (fala na obrót). Długości fali odcięcia filtru prostoliniowości będzie równa $\lambda_c = \pi D / k_c = 10.9$ mm. Na rys. 4 przedstawiono wykres profilu przefiltrowanego za pomocą algorytmu dwuetapowej filtracji z optymalnym dopasowaniem profilu w układzie współrzędnych cylindrycznych i kartezjańskich.



Rys. 4. Wykresy przestrzenne przefiltrowanych profili walcowości: powierzchnia elementu po szlifowaniu

Fig. 4. Three-dimensional diagrams of filtered cylindricity profile: the roller with ground surface

6. Podsumowanie

W pracy opracowano metodę filtracji profilu walcowości zaobserwowanego metodą „klatki”. Opracowana metoda wykorzystuje podejście funkcjonalowe zaproponowane przez Krystka w pracach [2, 3]. Zaletą tego podejścia jest eliminacja tzw. efektu brzegowego występującego przy filtracji profili prostoliniowości. Dodatkowo opracowana metoda zapewnia ciągłość profilu przefiltrowanego dzięki narzuceniu warunku, by wartości przefiltrowanych profili okrągłości i prostoliniowości w punktach przecięcia trajektorii skanowania przedmiotu były jednakowe. Pokazano, w jaki sposób opracowana metoda może być połączona z zagadnieniem optymalnego dopasowania profilu omówionym w pracy [1]. Przedstawione badania eksperymentalną wskazują na poprawność otrzymanego profilu kształtu.

Praca została wykonana w ramach projektu badawczego KBN nr 4 T07D 021 27. Oprogramowanie komputerowe, w którym zaimplementowano przedstawione algorytmy dostępne są na stronie <http://cltm.tu.kielce.pl/~math/cage>.

7. Literatura

- [1] Janecki D., Zwierzchowski J.: Podstawy teoretyczne oceny profilu walcowości obrotowych części maszyn metodą klatki – część pierwsza: zagadnienie optymalnego dopasowania profilu, *Pomiary Automatyka Kontrola*, nr 9, str. 715-722, 2009.
- [2] Krystek M.: Form filtering by splines, *Measurement*, vol. 18, No 1/1996, pp 9 – 15.
- [3] Krystek M.: Discrete L-spline filtering in roundness measurements, *Measurement*, vol. 18, No. 2/1996, pp. 129 – 138.
- [4] Üstüner K.F., Ferrari L.A., Discrete splines and spline filters, *IEEE Trans. Circuit and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 39, 1992, pp. 417-422.
- [5] Unser M., Aldroubi A., Eden M., B-spline signal processing: Part I – Theory, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, 1993, pp. 821-833.
- [6] Feng G., Data smoothing by cubic spline filters, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, 1998, pp. 2790-2796.
- [7] Janecki D., A generalized L2-spline filter, *Measurement*, Vo 42, 2009, pp 937-943.
- [8] Brinkmann S., Bodschwinn H., Lemke H.W.: Accessing roughness in three-dimensions using Gaussian regression filtering, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 41, 2001, pp. 2153 – 2161.
- [9] ISO TS 16610-22 standard: Geometrical Product Specifications (GPS) - Filtration - Part 22: Linear Profile Filters: Spline Filters.
- [10] ISO/CD TS 16610-31, Geometrical product specifications (GPS) -- Filtration -- Part 31: Robust profile filters: Gaussian regression filters, Under development.