

Mykhaylo DOROZHOVETS

POLITECHNIKA RZESZOWSKA, KATEDRA METROLOGII I SYSTEMÓW DIAGNOSTYCZNYCH

Metoda opracowania wyników obserwacji bazująca na ich porównaniu z próbami referencyjnymi

Prof. dr hab. inż. Mykhaylo DOROZHOVETS

Jest absolwentem (1975) Katedry Techniki Informatyki no-Pomiarowej Politechniki Lwowskiej, tytuł doktora nauk technicznych uzyskał w 1986 r. a w 2001 r. obronił pracę habilitacyjną. Obecnie jest zatrudniony na stanowisku profesora zwyczajnego w Katedrze Metrologii i Systemów Diagnostycznych Politechniki Rzeszowskiej. W pracy naukowo-badawczej zajmuje się analizą i oceną niepewności wyników pomiarów, zagadnieniami pomiarów tomograficznych oraz problemami przetwarzania sygnałów pomiarowych.



e-mail: michdor@prz.edu.pl

Streszczenie

W artykule została zaproponowana i zbadana metoda opracowania wyników obserwacji, bazująca na ich porównaniu z próbami referencyjnymi o zadanych właściwościach. Przedstawiono modele matematyczne najlepszego wyniku pomiaru oraz jego standardowej niepewności. Metodą Monte Carlo przeprowadzono badania symulacyjne skuteczności metody dla kilku wybranych rozkładów prawdopodobieństwa populacji przy liczbie obserwacji od 9 do 49. Stwierdzono, że jeśli liczba obserwacji wynosi kilkanaście i więcej, to proponowana metoda zapewnia zmniejszenie niepewności wyniku w porównaniu z niepewnością wartości średniej.

Słowa kluczowe: opracowanie danych, obserwacje, próby referencyjne.

Method of the observations processing based on their comparison with the reference samples

Abstract

New method of the measurement result and its uncertainty determination, based on the comparison of input sample after its sorting with several reference samples (Fig. 1, Fig. 2), which correspond to models of the general population density distributions, is investigated and analyzed in the paper. Elements of the reference sample are the observations, which ideally reflect the properties of the general population distribution, and their values are calculated as the mathematical expectations of ordinal statistics corresponding to this distribution (1). Mathematical models of the determination of the best result (2), (9) and its standard uncertainty (12), (13) are presented. The effectiveness of propose method is investigated by the Monte Carlo method for 5 models of general population (Laplace, normal, triangular, uniform and arcsine (Fig. 3)) with the number of observations 9, 19, 29, 39 and 49. If the observation distribution significantly differs from normal distribution then the proposed method guarantees considerable decreasing of the uncertainty result in comparison with the uncertainty of average value (Fig. 4). As a result of investigations it is established that if the number of observations exceeds about 12-15, then in approximately $\frac{2}{3}$ cases the proposed algorithm identifies distribution correctly and in the rest near $\frac{1}{3}$ cases the nearest (accordingly the value of contra kurtosis (5)) distributions (Fig. 5). The proposed method can be used when the number of registered observations is small, when due to this the histogram is unstable and also the statistical tests can be positive for some models of the density distributions of the general populations simultaneously.

Keywords: data processing, observations, reference samples.

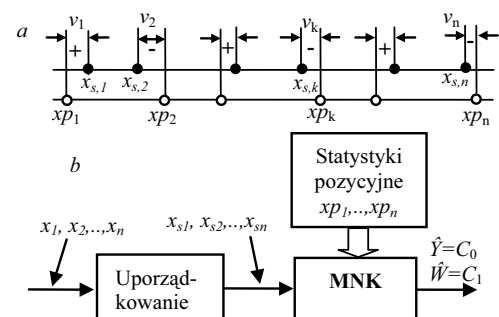
1. Wstęp

Wiadomo, że w celu zwiększenia dokładności pomiarów wykorzystuje się pomiary z wielokrotnymi obserwacjami, które są opracowane statystycznie. Przy tym oszacowanie optymalnej (pod względem minimalnej wartości standardowej niepewności typu A) wartości wyniku pomiaru w dużym stopniu zależy od rozkładu prawdopodobieństwa populacji [1, 2].

Przykładowo, jeśli rozkład prawdopodobieństwa populacji nie jest sprzeczny z modelem rozkładu Gaussa, wtedy po zarejestrowaniu próby o n obserwacjach (x_1, x_2, \dots, x_n) najlepszym wynikiem pomiaru o minimalnej wartości niepewności jest wartość średnia: \bar{x} . Jeśli są przekonujące argumenty o akceptacji rozkładu jednostajnego, to najlepszym wynikiem pomiaru o minimalnej wartości niepewności jest wartość środka rozstępu próby: $x_{s,r}$. W uzasadnionych przypadkach przyjmuje się model rozkładu Laplace'a, wtedy jako najlepszy wynik pomiaru przyjmuje się medianę próby x_{med} [1, 2].

Przy dużej liczbie zarejestrowanych obserwacji istnieje możliwość sporządzenia histogramu i według odpowiedniego testu zgodności, na przykład χ^2 , można sprawdzić hipotezę o wybranym modelu rozkładu prawdopodobieństwa [3]. Natomiast przy małej liczbie zarejestrowanych obserwacji, (maksimum kilkadziesiąt), histogram staje się niestabilny i może okazać się, że kilka modeli rozkładów jest zgodnych z zarejestrowanymi obserwacjami lub żaden z modeli nie jest zgodny z nimi. Wtedy nie można stwierdzić, jaki wynik pomiaru jest najlepszy.

Wiadomo, że największą dokładność otrzymuje się w pomiarach o bezpośrednim porównaniu wielkości mierzonej ze wzorcem. Dla realizacji tej zasady podczas opracowania wyników obserwacji należałoby mieć referencyjne (wzorcowe) próby, których obserwacje jak najlepsze (teoretycznie idealnie) odwzorują podstawowe własności odpowiednich populacji. W teorii statystyki znana jest metoda ([3]-[5]) bazująca na tej zasadzie. Mianowicie, dla oszacowania parametrów położenia oraz dyspersji zarejestrowanej próby wykorzystywane są własności statystyk pozycyjnych. Zasada metody jest przedstawiona na rys. 1. Polega ona na bezpośrednim porównaniu n uporządkowanych obserwacji $x_{s,k}$, ($k=1,2,\dots,n$) o wartościach przeciętnych $x_{p_k} = E[x_{n,k}]$ z losowymi statystykami pozycyjnymi $x_{n,k}$ ($k=1,2,\dots,n$), odpowiadającymi wybranemu rozkładowi prawdopodobieństwa $p(x)$ i wyznaczeniu metodą najmniejszych kwadratów ($\min_{k=1}^n (v_k)^2$), gdzie $v_k = x_{s,k} - x_{p_k}$ - są odchyleniami odpowiednich obserwacji) najlepszych parametrów położenia $\hat{X} = C_0$ i dyspersji $\hat{W} = C_1$ próby badanej [6, 7].



Rys. 1. a) Porównanie uporządkowanej próby z wartościami przeciętnymi statystyk pozycyjnych, b) schemat blokowy metody bazującej na statystykach pozycyjnych

Fig. 1. a) Comparison of sorted samples with order statistics, b) block-diagram of the method based on order statistics

Wartości przeciętne statystyk pozycyjnych wyznaczone są na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa $p(x)$ (dystrybucyjny $F(x)$) [8]:

$$xp_k = E[x_{n,k}] = \int_{-\infty}^{\infty} x_{n,k} \cdot p_{n,k}(x_{n,k}) dx_{n,k}, \quad (1)$$

gdzie $p_{n,k}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} (F(x))^{k-1} (1-F(x))^{n-k} p(x)$ - jest gęstością prawdopodobieństwa $x = x_{n,k}$ [8].

Ponieważ statystyki pozycyjne są skorelowane ze sobą, to dla wyznaczenia parametrów położenia ($\hat{Y}=C_0$) i dyspersji ($\hat{H}=C_1$) próby (wektora $\mathbf{C}^T = (C_0, C_1)$) wykorzystuje się metodę ważonych najmniejszych kwadratów [3]-[5]

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{X}_s = \mathbf{REC} \cdot \mathbf{X}_s, \quad (2)$$

gdzie $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ xp_1 & xp_2 & \dots & xp_n \end{pmatrix}$ - jest macierzą statystyk pozycyjnych, a

$$\mathbf{REC} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W} \quad (3)$$

jest macierzą rekonstrukcyjną, zapewniającą obliczanie poszukiwanych wartości na podstawie wartości elementów próby badanej; $\mathbf{W} = [\mathbf{Cov}]^{-1}$ - jest macierzą wagową, będącą odwrotnością macierzy kowariancyjnej $\mathbf{Cov}^{(n,j)}$, obliczaną na podstawie łącznej gęstości prawdopodobieństwa $p_{k,l}(x_k, x_l)$ wartości $x_l \leq x_k$ [8]:

$$\mathbf{Cov}_{k,l} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_k - xp_k)(x_l - xp_l) p_{k,l}(x_k, x_l) dx_l dx_k. \quad (4)$$

Opisana metoda wyznaczenia parametrów położenia i rozrzutu przewiduje znajomość modelu rozkładu prawdopodobieństwa populacji, z której została pobrana próba. W praktyce często taki model nie jest znany a priori, a wykorzystanie tradycyjnych metod statystycznych do identyfikacji rozkładu przy stosunkowo małej liczbie obserwacji nie jest skuteczne.

Celem następných badań jest opracowanie metody statystycznego opracowania serii obserwacji, zapewniającej wyznaczenie najlepszego wyniku pomiaru oraz jego niepewności na bazie automatycznej identyfikacji najbliższego do rzeczywistego modelu rozkładu prawdopodobieństwa obserwacji, a także oceny skuteczności proponowanej metody.

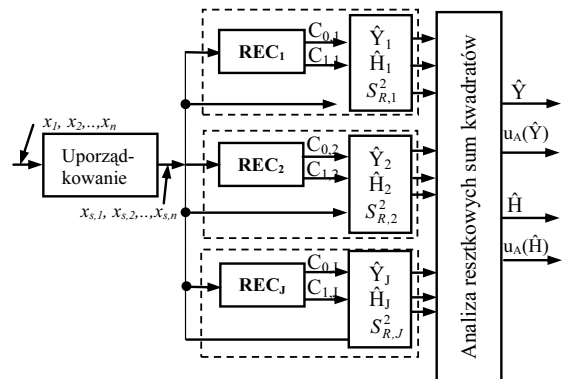
2. Metoda opracowania bazująca na próbach referencyjnych

Procedura wyznaczenia parametrów obserwacji na podstawie statystyk pozycyjnych może być wykorzystana jako składowa część w metodzie wyznaczenia najlepszego wyniku pomiaru oraz jego niepewności. W następnych rozważaniach zbiór wartości przeciętnych (1): $x_{p_{k,j}} = E[x_{n,k,j}]$, ($k=1,2,\dots,n$) losowych statystyk pozycyjnych, odpowiadających modelowi $p_j(x)$ rozkładu prawdopodobieństwa populacji, będziemy nazywali próbą referencyjną $\mathbf{X}_{ref,j}^T$, o obserwacjach referencyjnych:

$$\mathbf{X}_{ref,j}^T = (x_{ref,1,j}, \dots, x_{ref,k,j}, \dots, x_{ref,n,j})^T = (xp_{1,j}, \dots, xp_{k,j}, \dots, xp_{n,j})^T.$$

Taka terminologia związana jest z tym, że obliczone według (1) obserwacje $x_{ref,1,j}, \dots, x_{ref,k,j}, \dots, x_{ref,n,j}$, z którymi są porównywane obserwacje wejściowe, w idealny sposób odpowiadają gęstości prawdopodobieństwa $p_j(x)$.

Dla zapewnienia możliwości identyfikacji rozkładu prawdopodobieństwa próby wejściowej (przy braku znajomości a priori rozkładu prawdopodobieństwa populacji, z której została pobrana próba) należy wygenerować cały zestaw prób referencyjnych, które odpowiadają wybranym modelom prawdopodobieństwa. Z pośród tych modeli będzie wybierany w największym stopniu przydatny rozkład próby wejściowej. Zwiększenie rozdzielczości podczas identyfikacji rozkładu prawdopodobieństwa może być osiągnięte poprzez zwiększenie liczby prób referencyjnych.



Rys. 2. Uproszczony schemat metody opracowania wyników obserwacji bazujący na porównaniu próby wejściowej z próbami referencyjnymi
Fig. 2. Simplified diagram of the observation result processing method based on comparison input sample with the reference samples

Zasada proponowanej metody, której uproszczony schemat jest pokazany na rys. 2, polega na:

- 1) wygenerowaniu według (1) zestawu J prób referencyjnych: $\mathbf{X}_{ref,1}^T = (xp_{1,1}, \dots, xp_{k,1}, \dots, xp_{n,1})^T, \dots, \mathbf{X}_{ref,j}^T = (xp_{1,j}, \dots, xp_{k,j}, \dots, xp_{n,j})^T, \dots, \mathbf{X}_{ref,J}^T = (xp_{1,J}, \dots, xp_{k,J}, \dots, xp_{n,J})^T$;
- 2) obliczeniu według (4) zestawu J macierzy kowariancyjnych $\mathbf{Cov}_1, \dots, \mathbf{Cov}_j, \dots, \mathbf{Cov}_J$ oraz wagowych: $\mathbf{W}_1 = \mathbf{Cov}_1^{-1}, \dots, \mathbf{W}_j = \mathbf{Cov}_j^{-1}, \dots, \mathbf{W}_J = \mathbf{Cov}_J^{-1}$;
- 3) obliczeniu według (3) zestawu J macierzy rekonstrukcyjnych $\mathbf{REC}_1, \dots, \mathbf{REC}_j, \dots, \mathbf{REC}_J$;
- 4) uporządkowaniu próby wejściowej: $\mathbf{X}_s^T = (x_{s,1}, x_{s,2}, \dots, x_{s,n})$;
- 5) opracowaniu według (2) uporządkowanej próby wejściowej i w rezultacie wyznaczenie estymatorów $\hat{Y}_1 = C_{0,1}, \dots, \hat{Y}_j = C_{0,j}, \dots, \hat{Y}_J = C_{0,J}$, $\hat{H}_1 = C_{1,1}, \dots, \hat{H}_j = C_{1,j}, \dots, \hat{H}_J = C_{1,J}$ parametrów położenia i rozrzutu próby dla wybranych modeli rozkładów prawdopodobieństwa;
- 6) wyznaczeniu resztkowych sum ważonych kwadratów $S_{R,1}^2, \dots, S_{R,j}^2, \dots, S_{R,J}^2$ odchyleń obserwacji próby badanej od odpowiednich obserwacji prób referencyjnych;
- 7) analizie sum resztkowych i wyznaczeniu najlepszego wyniku pomiaru \hat{Y} i jego niepewności $u_A(\hat{Y})$ (oraz, jeśli jest potrzeba, wyznaczeniu parametru rozrzutu $\hat{H}_j = C_{1,j}$ i jego niepewności $u_A(\hat{H}_j)$).

3. Modele matematyczne, opisujące etapy opracowania wyników obserwacji

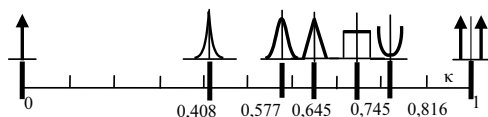
3.1. Modele rozkładów prawdopodobieństwa prób referencyjnych

Pierwsze trzy etapy opisanej wyżej metody są realizowane wcześniej, przed eksperymentem pomiarowym. Ponieważ obserwacje prób referencyjnych jednoznacznie odpowiadają rozkładowi prawdopodobieństwa, dlatego podstawowym problemem tej części metody jest wybór referencyjnych rozkładów prawdopodobieństwa, z pośród których będzie wybierany rozkład próby wejściowej. Na ogół, wybór rozkładu prawdopodobieństwa w pierwszej kolejności zależy od wiedzy o procesie badanym, z którego są pobierane obserwacje pomiarowe, oraz innych danych. Jeśli zakres zmian rozkładu prawdopodobieństwa obserwacji może być szeroki, wtedy należałoby mieć metodę świadomego wybierania odpowiednich modeli rozkładów, które różnią się swoim kształtem oraz parametrami. W celu uzasadnionego wyboru modeli rozkładów prawdopodobieństwa można wykorzystać jeden z najważniejszych parametrów, który charakteryzuje formę rozkładu, a mianowicie kontrkurtozę [9]:

$$\kappa = \sigma^2 / \sqrt{\mu_4}, \quad (5)$$

gdzie μ_4 jest centralnym momentem czwartego rzędu rozkładu prawdopodobieństwa.

Wartość tego parametru mieści się w granicach $0 \leq \kappa \leq 1$. Dla często spotykanych modeli rozkładów prawdopodobieństwa wartość kontrkurtozy równa się: Laplace'a: $\kappa_L=0,408$, normalnego: $\kappa_N=0,577$, trójkątnego: $\kappa_T=0,645$, jednostajnego: $\kappa_{Un}=0,745$ oraz arksinusoidalnego: $\kappa_{Asin}=0,816$ (rys. 3).



Rys. 3. Rozmieszczenie wybranych modeli rozkładów prawdopodobieństwa według wartości kontrkurtozy

Fig. 3. Density distribution location according to the contra-kurtosis value

3.2. Macierz rekonstrukcyjna

W przypadku symetrycznych rozkładów prawdopodobieństwa macierz rekonstrukcyjna ma postać macierzy symetrycznej dwuwierszowej:

$$\mathbf{REC}_j = \begin{pmatrix} g_{1,j} & g_{2,j} & \dots & g_{[(n+1)/2],j} & \dots & g_{2,j} & g_{1,j} \\ -\gamma_{1,j} & -\gamma_{2,j} & \dots & 0 & \dots & \gamma_{2,j} & \gamma_{1,j} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Elementy pierwszego wiersza w (8) charakteryzują się symetrią parzystą i są wykorzystywane jako współczynniki wagowe $g_{k,j}$ przy obliczaniu parametru położenia \hat{Y}_j - wartości wyników pomiaru, natomiast elementy drugiego wiersza charakteryzują się symetrią nieparzystą i są wykorzystywane jako współczynniki wagowe $\gamma_{k,j}$ przy obliczaniu wartości parametru rozrzutu \hat{H}_j :

$$\hat{Y}_j = \sum_{k=1}^n g_{k,j} x_{s,k}, \quad \hat{H}_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{k,j} x_{s,k}. \quad (9)$$

Ponieważ wartości współczynników macierzy \mathbf{REC}_j zależą tylko od wybranego modelu rozkładu prawdopodobieństwa oraz liczby wyników obserwacji n , dlatego wartości współczynników wagowych $g_{k,j}$, $\gamma_{k,j}$ są obliczane wcześniej. Dla niektórych rozkładów prawdopodobieństwa wartości tych współczynników mogą być obliczone analitycznie [7].

3.3. Reszkowe sumy kwadratów i ich analiza

Nieobciążone estymatory wariancji odchyłeń reszkowych obliczane są według standardowej procedury ważonej MNK [7]:

$$S_{R,j}^2 = \frac{(\mathbf{X}_s - \mathbf{A}_j \mathbf{C}_j)^T \cdot \mathbf{W}_j \cdot (\mathbf{X}_s - \mathbf{A}_j \mathbf{C}_j)}{n-2} = \mathbf{X}_s^T \frac{\mathbf{W}_j \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}_j \mathbf{REC}_j)}{n-2} \mathbf{X}_s, \quad (10)$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową o wymiarze $n \times n$.

Wynik pomiaru jest wyznaczany na podstawie analizy reszkowych sum kwadratów odchyłeń referencyjnych prób od próby wejściowej. Najprostsza analiza polega na wyznaczaniu minimalnej wartości sumy reszkowej. Dlatego najlepszym wynikiem pomiaru jest ten (\hat{Y}_j , \hat{H}_j), dla którego obliczona reszkowa suma ważonych kwadratów ($S_{R,j}^2$) osiąga minimalną wartość:

$$j = \text{numer} \left\{ \underset{1 \leq j \leq J}{\text{MIN}} \left(S_{R,1}^2, S_{R,2}^2, \dots, S_{R,J}^2 \right) \right\}. \quad (11)$$

3.4. Niepewności standardowe wartości parametrów położenia i rozrzutu

Niepewności standardowe wyniku pomiaru $u_A(\hat{Y}_j)$ oraz parametru rozrzutu $u_A(\hat{H}_j)$ są obliczane według standardowej procedury ważonej metody najmniejszych kwadratów [10]:

$$u_A(\hat{Y}_j) = d_{0,0;j} \sqrt{S_{R,j}^2}, \quad u_A(\hat{H}_j) = d_{1,1;j} \sqrt{S_{R,j}^2}, \quad (12)$$

gdzie

$$\mathbf{D}_j = (\mathbf{A}_j^T \cdot \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{A}_j)^{-1} = \begin{pmatrix} d_{0,0;j}^2 & 0 \\ 0 & d_{1,1;j}^2 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

jest tak zwaną macierzą wariancji o wymiarze 2×2 .

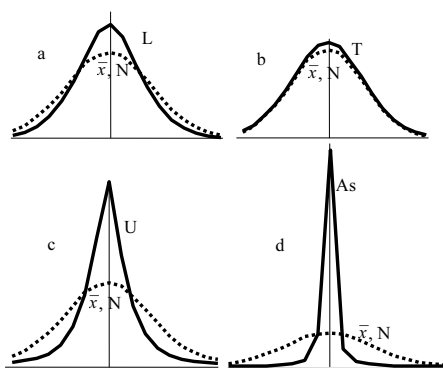
4. Wyniki badań symulacyjnych metodą Monte Carlo

Badania metody zostały przeprowadzone metodą Monte Carlo. W celu formowania prób referencyjnych zostało wybranych wspomnianych wyżej 5 modeli rozkładów prawdopodobieństwa: Laplace'a ($l=1$), normalny ($l=2$), trójkątny ($l=3$), jednostajny ($l=4$) oraz arksinusoidalny ($l=5$). Badane wyniki obserwacji zostały wygenerowane z populacji odpowiadających tym samym rozkładowi. Liczba obserwacji wynosiła: $n = 9, 19, 29, 39, 49$. W każdej serii wyników obserwacji przyjmowano wartość parametru położenia $X_c=5,000$ oraz wartość parametru rozrzutu obserwacji $\sigma_x=0,200$. Liczba symulacji (realizacji) metodą Monte Carlo wynosiła $M=10^5$.

W rezultacie opracowania każdej ($i=1, \dots, M$) wygenerowanej serii wyników obserwacji zostały obliczone najlepsze wyniki pomiaru $\hat{Y}_{i,l}^{(n)}$, parametry rozrzutu $\hat{H}_{i,l}^{(n)}$ (9), a także ich standardowe niepewności (12), (13).

Jakość proponowanej metody została zbadana na podstawie wyznaczonych wartości błędów uzyskanych wyników pomiaru: $\Delta_{i,d}^{(n)} = \hat{X}_{i,d}^{(n)} - X_c = \hat{X}_{i,d}^{(n)} - 5,000$ oraz ich charakterystyk: wartości średniej, średniej kwadratowej, standardowego odchylenia eksperymentalnego oraz maksymalnej wartości ich modułu.

Na rys. 4 przedstawione są histogramy błędów wyznaczanych przez algorytm najlepszych wyników pomiaru przy różnych rozkładach prawdopodobieństwa populacji, z których zostały pobrane próby. Na rysunkach, w celu porównania, są przedstawione też histogramy (linie punktowe) wartości błędów, odpowiadających wynikom, obliczonych jako wartości średnie zarejestrowanych obserwacji. Jak widać, dla każdego modelu rozkładu wyników obserwacji histogram jest lepszy (rozrzut błędów jest mniejszy) w porównaniu do histogramu błędów wartości średniej. Przy czym, metoda zapewnia tym lepsze wyniki (mniejszy rozrzut i niepewność) im bardziej rozkład próby odstępuje (według kontrkurtozy) od rozkładu normalnego, dla którego wartość średnia jest najlepszym estymatorem wyniku.



Rys. 4. Histogramy błędów obliczonych wyników pomiaru dla prób o rozkładach: a) Laplace'a, b) trójkątnym, c) jednostajnym, d) arksinusoidalnym; liczba obserwacji $n=19$

Fig. 4. Histograms of the calculated measurement result errors for the input samples distributions: a) Laplace, b) triangle, c) uniform, d) arcsine; number of observations $n=19$

Innym parametrem, charakteryzującym skuteczność proponowanej metody, jest częstość poprawnej identyfikacji przez algorytm odpowiedniego modelu rozkładu prawdopodobieństwa. Stwierdzono, że jeśli liczba obserwacji $n > 10 \dots 15$, to proponowany algorytm w ponad 2/3 przypadków (wzrasta ze zwiększeniem liczby obserwacji) prawidłowo ujawnia rozkład prawdopodobieństwa (rys. 5). Natomiast w pozostałych około 1/3 przypadkach przyjmowane są rozkłady najbliższe (według wartości kontrkurtozy) rzeczywistemu rozkładowi próby. Przy tym wybór najbliższych (zamiast rzeczywistego) rozkładów nie powoduje zbyt dużych nieprawidłowości w wyznaczaniu wyniku pomiaru i jego niepewności, ponieważ wartość tej ostatniej w dużym stopniu zależy od wartości kontrkurtozy.

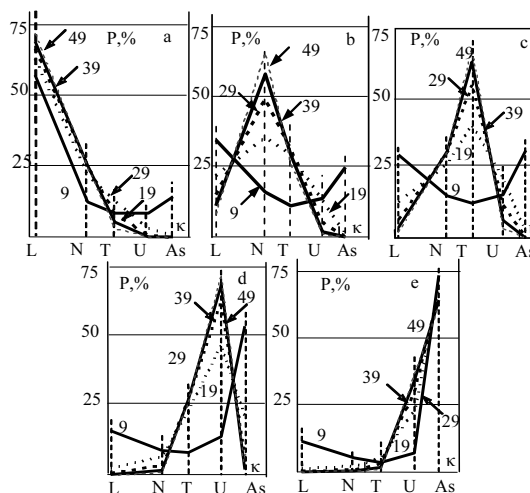
5. Podsumowanie

1. Z punktu widzenia teorii zaproponowana metoda opracowania wyników obserwacji bazuje na ich porównaniu z próbami referencyjnym, odpowiadającymi wybranym modelom gęstości prawdopodobieństwa populacji. Z praktycznego punktu widzenia procedura opracowania wyników obserwacji przewiduje bardzo proste operacje: wstępne uporządkowanie i następne uśrednianie wagowe wyników obserwacji według poprzednio obliczonych współczynników wagowych, odpowiadających tym modelom prawdopodobieństwa.

2. Z otrzymanych wyników badań wynika, że jeśli liczba obserwacji jest większa od około $n > 10 \dots 15$, to zaproponowana metoda zapewnia detekcję rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa lub mu bliskiego (według wartości kontrkurtozy), co

konsekwentnie zapewnia mniejszą wartość standardowej niepewności wyniku pomiaru w porównaniu do standardowej niepewności wartości średniej, która jest rekomendowana w [10].

3. Skuteczność zaproponowanej metody można polepszyć na drodze zwiększenia liczby modeli referencyjnych rozkładów prawdopodobieństwa, w celu ich „zagęszczenia” na osi wartości kontrkurtozy oraz na podstawie stosowania innej, niż przedstawiona wzorami (11), metody analizy sum resztkowych dla wyznaczania najlepszego wyniku pomiaru.



Rys. 5. Częstości ($P, \%$) detekcji rozkładu prawdopodobieństwa próby wejściowej w zależności od macierzy rekonstrukcyjnych bazujących na odpowiednich próbach referencyjnych. Rozkłady prób wejściowych: a) Laplace'a, b) normalny, c) trójkątny, d) jednostajny, e) arksinusoidalny

Fig. 5. Frequency ($P, \%$) of the input sample density distribution detection dependently on the reconstruction matrix based on appropriate reference samples. Density distribution of input samples: a) Laplace, b) normal, c) triangle, d) uniform, e) arcsine

6. Literatura

- [1] Dorozhovets M.: Wybrane problemy praktycznej oceny błędów oraz niepewności wyników pomiaru. ZN Pol. Rzesz. nr 233, seria Elektrotechnika, z.29. Rzeszów 2006.
- [2] Dorozhovets M., Warsza Z.L.: Wpływ nieadekwatnego wyboru parametrów rozkładu prawdopodobieństwa na niepewność typu A. Pomiary Automatyka Kontrola. No 9_bis, 2007, T.I, s.25-28.
- [3] Lloyd E.H.: Least-squares estimation on location and scale parameters using order statistics. Biometrika, 39.88, 1952.
- [4] Downton F.: A note of ordered least-squares estimation. Biometrika, 40. 457, 1953.
- [5] Kendall M. G. and Stuart A.: The advanced theory of statistics, Vol. Two. Charles Griffin and Co Ltd, London, Third edition, 1973.
- [6] Dorozhovets M.: Investigation of the test samples method, used for the evaluation of measurement result and its uncertainty. Proc. of Int. Conf. on Precision Measurement. TU Ilmenau. 08–12 Sept. 2008. pp. 91-92.
- [7] Dorozhovets M.: Metoda opracowania wyników obserwacji bazująca na wykorzystaniu prób referencyjnych. Mat. Konf. PPM-2009. Sucha Beskidzka 10-13.05. 2009, str. 104-107.
- [8] Fisz M.: Probability theory and mathematical statistics. John Willey & Sons, London, 1963.
- [9] Novitski P.V., Zograf I.A.: Estimation of measurement result errors. – L.: Energoizdat, 1985. –248 p. (Ros.)
- [10] Guide of the expression of uncertainty in measurement. ISO, Switzerland, 1993, 1995.