Anna DOMAŃSKA
POLITECHNIKA POZNAŃSKA, WYDZIAŁ ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

Ocena wariancji wyniku cyfrowej filtracji uśredniającej

Dr hab. inż. Anna DOMAŃSKA

Ukończyła studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Poznańskiej w 1979 r. i na Wydziale Mat-Fiz-Chem Umiwersytetu Wrocławskiego w 1984 r. W 1987 r. uzyskała stopień doktora n.t. a w 1996 r. stopień doktora habilitowanego n.t., obydwa na Wydziale Elektrycznym PP. Główne zainteresowania naukowe dotyczą systemów pomiarowych z cyfrowym algorytmem pomiaru oraz teorii i zastosowań konwersji a-c z sygnałem ditherowym. Jest członkiem Komitetu Metologii i Aparatury Naukowej PAN.

e-mail: domanska@et.put.poznan.pl

Streszczenie

Artykuł dotyczy cyfrowego uśredniania metodą ruchomej średniej oraz metodą z kumulacją, stosowanego w celu eliminacji lub redukcji losowego składnika stanowiącego zakłócenie wielkości deterministycznej. Podano zależność określającą wariancję wyniku uśredniania każdą z metod, co umożliwia ocenę jego niepewności. Odmienna specyfika metod przekłada się na odmienną postać zależności określającej wariancję i odmienne warunki, przy których można osiągać ekstremalny zysk z uśredniania.

Słowa kluczowe: ruchoma średnia, uśrednianie koherentne, wariancja średniej, skorelowane dane.

Variance evaluation of the result of averaging digital filtration

Abstract

The paper concerns digital averaging performed with the use of the moving average method and the cumulative method. This type of averaging is applied in order to eliminate or reduce the random component, being a disturbance of the deterministic quantity. Moreover, the paper presents the dependence determining the variance of the averaging result with the use of each of these methods, which makes it possible to estimate the uncertainty of the result. A different character of each of the methods implies a different form of the dependence determining the variance as well as different conditions with which an extreme profit can be achieved on the averaging. MAV and CAV are digital averaging algorithms of the value of dependent from the time (signals). The algorithm MAV is fitted for averaging of aperiodic and periodic signals. The algorithm CAV is fitted for averaging of periodic signals or repeatable signals at multiples to their gaining. The filtration MAV influences reductively on the variance of the noise and on the variance of the primary signal, however CAV reduces only the variance of the noise, not changing the variance of the primary signal. The use of the filtration MAV and CAV promotes better repeatability of results, if are estimated from samples of the average signal. Both algorithms are realizations of digital filters of the type FIR. In the case MAV this is the single low-pass filter. In the case CAV this is „the group" of simultaneously working low-pass filters - every in length equal of numerous of the collection of the repetition and filters is as many as of samples counts the single repetition. Fundamental difference between MAV and CAV consists in the manner of the choice of the collection of samples (undergo averaging) for the purpose of the determination of the single value of the average signal. In MAV this are adjacent samples from the single registration of the signal. In CAV this are the cophasal samples, every from other repetition. In the case of the averaging filtration of signals periodic or repeatable is more effective the algorithm CAV. However it is more time-consuming than the algorithm MAV.

Keywords: moving average, cumulating average, variance of average, correlated data.

1. Wstęp

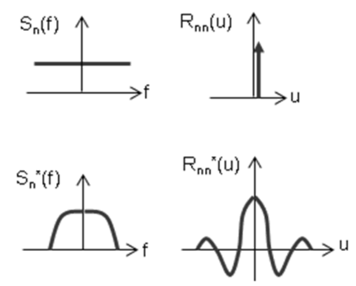
Systemy pomiarowe z cyfrowym algorytmem pomiaru to takie, w których wartość wielkości mierzonej jest estymowana z uprzednio zaewidencjonowanych wartości wielkości wejściowych. Jedną spośród rozlicznych operacji wykonywanych na pobranych próbkach jest cyfrowe uśrednianie. Jest ono stosowane między innymi:

a) na etapie ewidencjonowania - w systemach konwersji a-c z sygnałem ditherowym, w celu zredukowania zrandomizowanego błędu konwersji,
b) na etapie wstępnej obróbki „surowych" wyników pomiarów, w celu ich wstępnego „odszumienia",
c) na etapie estymacji prawdziwej wartości mezurandu (np. wartość średnia, skuteczna, moc) lub estymacji wartości wielkości pomocniczych/kryterialnych (np. wartość średniokwadratowa różnicy).

Artykuł dotyczy uśredniania stosowanego w celu eliminacji lub redukcji losowego składnika stanowiącego zakłócenie wielkości deterministycznej (a, b). Rozważania dotyczą dwóch metod uśredniania: metody ruchomej średniej (MAV-moving average), alternatywnie nazywanej uśrednianiem M-punktowym oraz metody z kumulacją (CAV-cumulating average), alternatywnie nazywanej uśrednianiem synchronicznym.

Celem rozważań jest określenie wariancji wyniku uśredniania każdą z metod. Wariancja jest istotną wielkością, gdyż jest niezbędna między innymi w ocenie niepewności wyniku i w ocenie „zysku" z uśredniania.

Szacowanie wariancji wyniku uśredniania w powszechnym mniemaniu kojarzy się ze stosowaniem reguły, znanej z probabilistyki - „jeden przez M", (M-krotna redukcja wariancji w wyniku uśredniania). W artykule wykazano, iż „mechaniczne" zastosowanie tej reguły w przypadku MAV i CAV jest nieprawidłowe, daje wariancję niedoszacowaną. Adekwatna dla MAV i CAV formuła szacująca wariancję uwzględnia fakt, iż między uśrednianymi próbkami może zachodzić skorelowanie. Filtracja zmienia (powiększa) skorelowanie sygnału, ponieważ zmienia (redukuje) jego widmo/widmową gęstość mocy, por. rys. 1.



Rys. 1. Widmowa gęstość mocy i funkcja autokorelacji szumu białego, przed i po filtracji
Fig. 1. Power spectral density and autocorrelation function of white noise, before and after filtration

Wychodząc z ogólnej zależności określającej wariancję wartości wielkości uśrednionej (bez założeń upraszczających), wyprowadzono jej uszczegółowione postaci, odpowiednie dla każdej z rozważanych metod uśredniania. Są to różne zależności. Wynika to przede wszystkim z różnych (w każdej z metod) algorytmów wyróżniania zbioru próbek poddawanych uśrednianiu.

2. Podstawowe założenia

Rozważane jest uśrednianie, któremu podlega wielkość $y=x+n$ będąca sumą wielkości deterministycznej x i szumu n. Celem uśredniania jest eliminacja bądź redukcja szumu. Rezultat uśredniania $\bar{y}$ ma z odpowiednio dobrym przybliżeniem odtwarzać wartość wielkości x. Przybliżona równość $\bar{y} \approx x$ oznacza, że zachodzi również przybliżona równość między parametrami obu wielkości, np. wariancjami $\sigma_{\bar{y}}^2 \approx \sigma_x^2$ (ale $\sigma_{\bar{y}}^2 \neq \sigma_y^2$).

Zakłada się, że n jest szumem białym, realizacją stacjonarnego i ergodycznego procesu losowego o zerowej wartości średniej. Obie wielkości x i n są niezależne. Suma $y(t)$ będzie pojedynczą realizacją procesu losowego, którego właściwości wynikają z właściwości x i n.

Ogólna zależność określająca wartość średnią wyznaczoną z M-elementowego zbioru próbek wybranych ze dyskretyzowanego y, ma postać:

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} y(i). \tag{1}$$

Ogólna zależność określająca wariancję wartości średniej jest określona następująco [3]:

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{M^2}\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{M-1} R_{yy}(n-k) - |\bar{y}|^2 = \frac{1}{M}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}\left(1-\frac{|m|}{M}\right)R_{yy}(m) - |\bar{y}|^2, \tag{2}$$

R_{yy} - funkcja autokorelacji spróbkowanej wielkości y.

Sposób typowania wartości $y(i)$, z których wyliczana jest wartość średnia (1), zależy od rodzaju uśredniania.

3. Wariancja wyniku uzyskiwanego metodą średniej ruchomej (MAV)

W zaszumionym sygnale y, spróbkowanym z częstotliwością f_S, odstęp między próbkami wynosi T_S. Stosując zapis $y(nT_S) \equiv y(n)$, algorytm uśredniania metodą MAV można przedstawić następująco [4]:

$$\bar{y}_{MAV}(n) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} y(n-k). \tag{3}$$

Z M-elementowego zbioru wartości następujących po sobie w czasie próbek $\{...,y(n), y(n-1),...,y[n-(M-1)],...\}$ jest obliczana wartość średnia $\bar{y}_{MAV}(n)$, która staje się wartością n-tej próbki nowego sygnału o zredukowanym, w stosunku do sygnału poddawanego uśrednianiu, szumie. Następna wartość $\bar{y}_{MAV}(n+1)$ powstaje z uśredniania nowego ciągu próbek, także o długości M, pobranych z przesuniętego o jeden odstęp T_S okna (eliminacja próbki z końca szeregu i dołączenie nowej próbki z początku szeregu).

Sąsiednie brane do uśredniania próbki różnią się zarówno wartością sygnału pierwotnego x jak i wartością szumu n.

Algorytm ten nadaje się przede wszystkim do uśredniania sygnałów aperiodycznych bądź sygnałów, których nie można pozyskiwać (wielokrotnie) z zachowaniem ich powtarzalności. Może być także stosowany do uśredniania zaszumionych sygnałów stałych, wolnozmiennych i periodycznych.

Jest to szczególny filtr cyfrowy typu FIR, (chociaż istnieje także jego formuła rekurencyjna). Obwiednia jego odpowiedzi impulsowej jest prostokątem, którego pole powierzchni wynosi 1. Filtr ma dobre właściwości wygładzające sygnał. Jest szybszy niż inne filtry o takiej samej charakterystyce czasowej (nie występują obliczenia splotowe). Jednakże, jak wynika z charakterystyki częstotliwościowej [1], wprowadza przesunięcie fazowe o $(M-1)/2$ próbek i ma właściwości tłumiące w paśmie przepustowym - tym większe im filtr jest dłuższy (im większe jest M). Ustalając w każdym indywidualnym przypadku długość filtru należy uwzględniać to, iż nie może on być zbyt krótki (zbyt małe M) bo wówczas słaby będzie efekt filtracji ani zbyt długi (zbyt duże M) bo uśrednieniu ulegnie także sygnał pierwotny.

Wariancja sygnału po operacji MAV, jest określona następującą zależnością szczegółową, wyprowadzoną z zależności ogólnej (2):

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{y}MAV}^2 &= \frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M-1}\left(1-\frac{m}{M}\right)R_{yy}(m) + \frac{1}{M}R_{yy}(0) - |\bar{y}|^2 = \\ &= \frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M-1}\left(1-\frac{m}{M}\right)R_{yy}(m) + \frac{1}{M}\left(\sigma_y^2 + |\bar{y}|^2\right) - |\bar{y}|^2,\end{aligned} \tag{4}$$

σ_y^2 - wariancja sygnału uśrednianego y.

Wartości wielkości R_{yy}, σ_y^2, $\bar{y}$, są estymowane na podstawie zbioru próbek sygnału $\{y(i)\}$.

Wariancja uśrednionego sygnału ma wartość minimalną, jeśli sygnał zaszumiony y jest nieskorelowany, czyli jego autokowariancja $C_{yy}(m)=0$, $m \neq 0$ a autokorelacja $R_{yy}(m)=\Box^2$. Minimalna wartość wynosi:

$$\min \sigma_{\bar{y}MAV}^2 = \frac{1}{M}\sigma_y^2. \tag{5}$$

Wariancja uśrednionego sygnału będzie miała wartość maksymalną, jeśli $R_{yy}(m) \approx R_{yy}(0)$. Maksymalna wartość wynosi:

$$\max \sigma_{\bar{y}MAV}^2 = \sigma_y^2. \tag{6}$$

czyli zachodzi następująca relacja:

$$\frac{1}{M}\sigma_y^2 \le \sigma_{\bar{y}MAV}^2 < \sigma_y^2 \tag{7}$$

Wniosek 1

a) O wartości wariancji wyniku uśredniania metodą MAV decyduje skorelowanie, wartość średnia i wariancja sygnału zaszumionego (w szczególnym przypadku sama wariancja).
b) Występowanie skorelowania sygnału y powoduje, że zastosowanie uśredniania MAV nie zredukuje jego wariancji do minimalnej wartości. Skorelowanie to, wobec założenia, że sygnał x jest deterministyczny, nie będzie funkcją impulsową.
c) Uśrednianie MAV wpływa redukująco na wariancję szumu ale także na wariancję sygnału pierwotnego.
d) Algorytm MAV jest realizacją szczególnego rodzaju filtru cyfrowego typu FIR (o identycznych współczynnikach).

4. Wariancja wyniku uzyskiwanego metodą kumulacji (CAV)

Algorytm ten nadaje się do uśredniania sygnałów periodycznych bądź sygnałów, które zachowują się powtarzalnie przy wielokrotnym pozyskiwaniu. Rejestrowanych jest M repetycji, każda o długości N próbek. Repetycje są rozłączne w czasie. Początek każdej repetycji jest jednocześnie momentem próbkowania. Najczęściej początki repetycji, z uwagi na zaszumienie sygnału, są wyznaczane metodą detekcji.

Algorytm uśredniania metodą CAV można przedstawić następująco:

$$\bar{y}_{CAV}(i) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} y(i-kN), \tag{8}$$

N - długość pojedynczej zarejestrowanej repetycji (czas trwania NT_S).

Wartość i-tej próbki nowego sygnału o zredukowanym w wyniku uśredniania szumie jest równa wartości średniej $\bar{y}_{CAV}(i)$ obliczanej ze zbioru M próbek $\{y(i), y(i-1 \cdot N),...,y[i-(M-1) \cdot N]\}$. Każda próbka pochodzi z innej repetycji. Wszystkie uśredniane próbki z tego zbioru mają tę samą fazę (i) względem początków repetycji, z których pochodzą. Taki algorytm wyboru próbek do uśredniania oznacza, że dokonywane być musi synchronizowanie początków wszystkich M repetycji [2].

Kolejne brane do uśredniania próbki nie różnią się wartością sygnału pierwotnego x, różnią się natomiast wartością szumu n.

Wariancja sygnału po operacji CAV, jest określona następującą zależnością szczegółową, wyprowadzona z zależności ogólnej (2):

$$\sigma^2_{\bar{y}CAV} = \frac{1}{M}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}\left(1-\frac{|m|}{M}\right)R_{nn}(mN) = \frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M-1}\left(1-\frac{m}{M}\right)R_{nn}(mN) + \frac{1}{M}R_{nn}(0) \tag{9}$$

R_{nn} - funkcja autokorelacji szumu,

$$R_{nn} = R_{yy} - |\bar{y}|^2 \text{ i } n(m)=y(m)-x(m)\approx y(m)-\bar{y}.$$

Uwzględniając poczynione w Rozdziale 2 założenia, można zależność (9) przekształcić do postaci alternatywnej:

$$\sigma^2_{\bar{y}CAV} = \frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M-1}\left(1-\frac{m}{M}\right)R_{nn}(mN) + \frac{1}{M}\sigma^2_n. \tag{10}$$

Wartości wielkości R_{yy}, $\bar{y}$ oraz σ_y^2, są estymowane na podstawie zbioru próbek sygnału $\{y(i)\}$.

Wariancja uśrednionego sygnału będzie miała wartość minimalną w przypadku, gdy szum jest biały. Minimalna wartość wynosi:

$$\min \sigma^2_{\bar{y}CAV} = \frac{1}{M}\sigma^2_n. \tag{11}$$

Wariancja uśrednionego sygnału dąży do wartości maksymalnej, jeśli zbiór repetycji dąży do jedności. Teoretycznie, gdy jest to pojedyncza repetycja (M=1), uśrednianie nie zachodzi i wówczas:

$$\max \sigma^2_{\bar{y}CAV} = \sigma^2_n. \tag{12}$$

czyli zachodzi następująca relacja:

$$\frac{1}{M}\sigma^2_n \le \sigma^2_{\bar{y}CAV} < \sigma^2_n \tag{13}$$

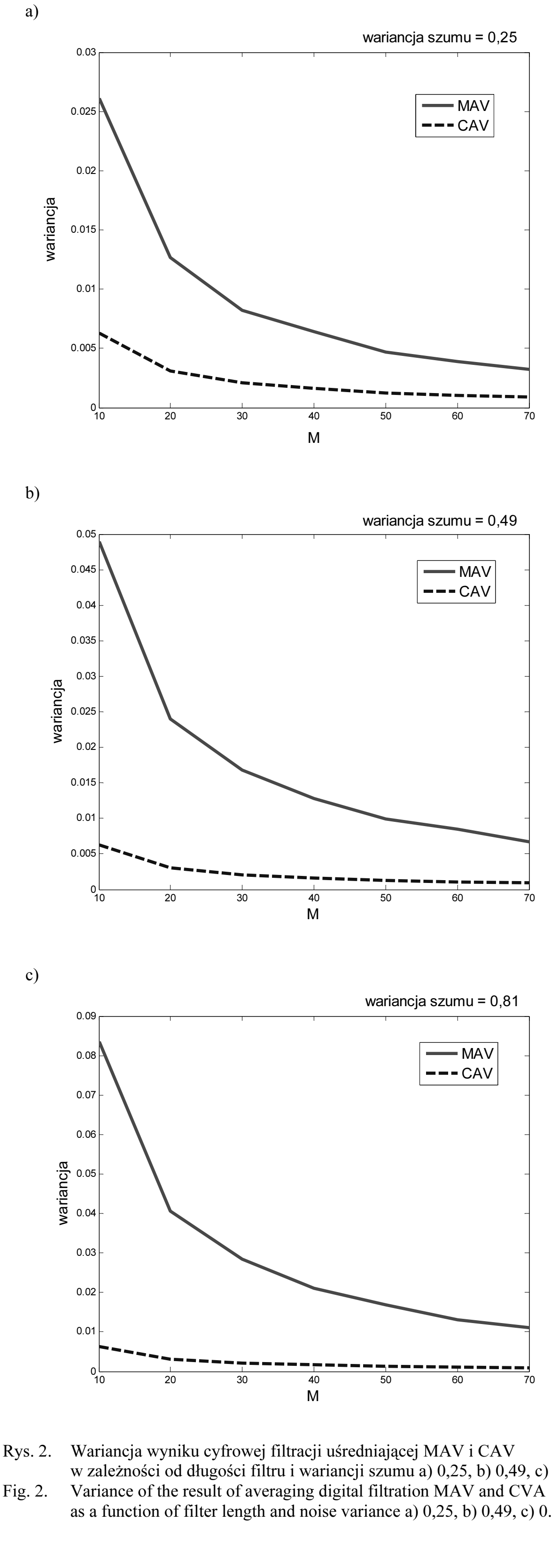
Wniosek 2

a) O wartości wariancji wyniku uśredniania metodą CAV decyduje skorelowanie i wariancja szumu (w szczególnym przypadku sama wariancja) oraz długość pojedynczej repetycji.
b) Skorelowanie próbek zaszumionego sygnału w pojedynczej repetycji nie ma znaczenia. Nie tworzą one bowiem zbioru próbek, które podlegają uśrednianiu.
c) W uśrednianiu CAV najskuteczniej redukowany jest szum biały. Stosunek wariancji sygnału uśrednionego do wariancji sygnału uśrednianego ma wówczas wartość najmniejszą z możliwych do osiągnięcia tą metodą (1/M).
d) Uśrednianie CAV wpływa redukująco na wariancję szumu. Nie zmienia wariancji sygnału pierwotnego.
e) Algorytm CAV (M repetycji, każda o długości N) można porównać do zespołu N filtrów dolnoprzepustowych typu FIR, każdy o długości M, wyodrębniających „składowe stałe” $x(0)$, $x(1),\ldots,x(N\text{-}1)$, z zaszumionych ciągów wartości synfazowych odpowiednio: $\{y_k(0),\ k=0,\ldots,M\text{-}1\}$, $\{y_k(1),\ k=0,\ldots,M\text{-}1\},\ldots$, $\{y_k(N\text{-}1),\ k=0,\ldots,M\text{-}1\}$.

5. Porównanie efektywności cyfrowej filtracji uśredniającej MAV i CAV

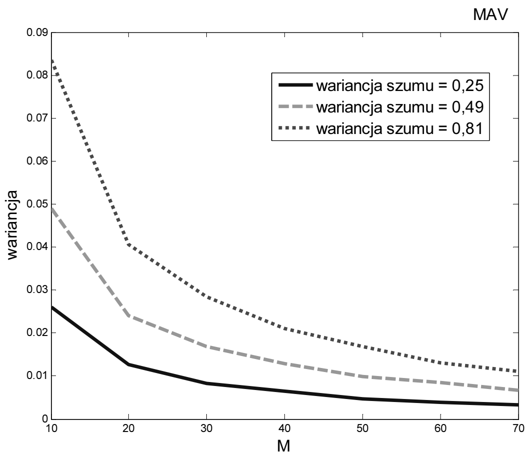
Efektywność MAV i CAV porównano ze względu na kryterium redukcji wariancji wyniku uśredniania rozpatrując wpływ długości M filtru oraz wariancji szumu n. Uśrednianiu podlegał sygnał sinusoidalny o amplitudzie 2 i częstotliwości 1 Hz z szumem gaussowskim o zerowej wartości średniej.

Z porównania między MAV i CAV wynikają następujące wnioski:
a) CAV jest efektywniejsza od MAV, por. rys. 2. Wariancja wyniku CAV jest zawsze mniejsza od wariancji wyniku MAV.
b) skuteczność MAV zależy od wariancji szumu, im wariancja ta jest większa, przy danej długości filtru, tym wariancja wyniku będzie większa, por. rys. 3a.
c) skuteczność CAV nie zależy od wariancji szumu, ma taki sam przebieg we wszystkich trzech przypadkach, por. rys. 3b. Zależy ona wyłącznie od liczności zbioru wartości podlegających uśrednianiu, czyli od długości filtru.

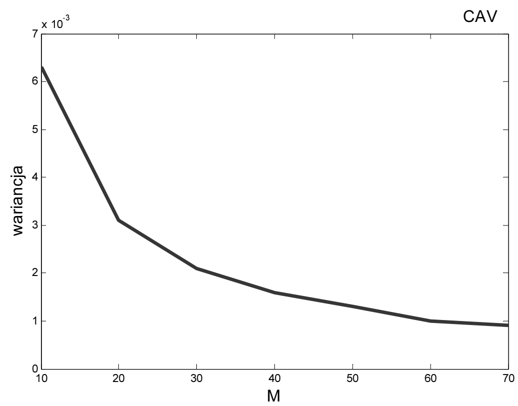


Rys. 2. Wariancja wyniku cyfrowej filtracji uśredniającej MAV i CAV w zależności od długości filtru i wariancji szumu a) 0,25, b) 0,49, c) 0,81
Fig. 2. Variance of the result of averaging digital filtration MAV and CVA as a function of filter length and noise variance a) 0,25, b) 0,49, c) 0.81

a)



b)



Rys. 3. Skuteczność filtracji w zależności od wariancji szumu: a) MAV, b) CAV
Fig. 3. Efficiency of filtration as a function of noise variance: a) MAV, b) CAV

6. Podsumowanie

- MAV i CAV to algorytmy uśredniania wartości wielkości zależnych od czasu (sygnałów).
- Algorytm MAV nadaje się do uśredniani sygnałów aperiodycznych i periodycznych.
- Algorytm CAV nadaje się do uśredniania sygnałów periodycznych lub sygnałów powtarzalnych przy wielokrotnym ich pozyskiwaniu.
- Filtracja MAV wpływa redukująco na wariancję szumu, ale i na wariancję sygnału pierwotnego, natomiast CAV redukuje tylko wariancję szumu, nie zmieniając wariancji sygnału pierwotnego.
- Zastosowanie filtracji MAV i CAV sprzyja lepszej powtarzalności wyników, jeśli są estymowane z próbek uśrednionego sygnału.
- Oba algorytmy są realizacjami filtrów cyfrowych typu FIR. W przypadku MAV jest to pojedynczy filtr dolnoprzepustowy. W przypadku CAV jest to „zespół” jednocześnie pracujących filtrów dolnoprzepustowych – każdy o długości równej liczności zbioru repetycji a filtrów jest tyle ile próbek liczy pojedyncza repetycja.
- Zasadnicza różnica między MAV i CAV polega na sposobie wybierania zbioru próbek (poddawanych uśrednianiu) w celu określenia pojedynczej wartości uśrednionego sygnału. W MAV są to sąsiednie próbki z pojedynczej rejestracji sygnału. W CAV są to próbki synfazowe, każda z innej repetycji.
- W przypadku filtracji uśredniającej sygnałów periodycznych lub powtarzalnych skuteczniejszy jest algorytm CAV. Jednakże jest on bardziej czasochłonny aniżeli algorytm MAV.

7. Literatura

[1] Domańska A.: Algorytm CAV i MAV filtracji sygnałów kwantowanych z ditherem, PAK, Vol. 53, Nr 9 bis, 2007.
[2] Lyons R.: Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów, WKŁ, Warszawa 1999.
[3] Proakis J., Manolakis D.: Digital signal processing, Pearson Prentice Hall, 2007.
[4] Smith S.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów, BTC, Warszawa 2007.

Artykuł recenzowany