

Edward HRYNKIEWICZ¹, Stefan KOŁODZIŃSKI²¹POLITECHNIKA ŚLĄSKA, GLIWICE²PRATT&WITNEY, KALISZ

Boole'owski rachunek różniczkowy w dekompozycji funkcji logicznych implementowanych w układach FPGA

Dr hab. inż. Edward HRYNKIEWICZ

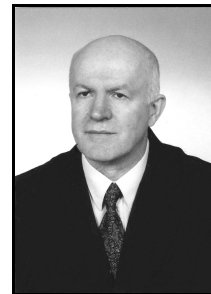
Studia ukończył na Wydziale Automatyki Politechniki Śląskiej. Rozprawę doktorską obronił w roku 1978, a habilitował się w roku 1992 w dyscyplinie elektronika. Zajmuje się syntezą logiczną, układami programowalnymi, programowalnymi sterownikami logicznymi oraz cyfrowymi układami przetwarzania częstotliwości. Obecnie pełni funkcję dyrektora Instytutu Elektroniki na Wydziale Automatyki, Elektroniki i Informatyki Politechniki Śląskiej.



e-mail: ehrynkiewicz@polsl.pl

Dr inż. Stefan KOŁODZIŃSKI

Inżynier utrzymania ruchu w firmie Pratt & Whitney Kalisz. Zainteresowania naukowe obejmują wykorzystanie metod spektralnych w syntezie układów programowalnych FPGA, automatyzację urządzeń przemysłowych za pomocą sterowników PLC. Dyplom magistra inżyniera elektryka na Wydziale Elektrycznym Politechniki Szczecińskiej a stopień doktora nauk technicznych w dziedzinie elektronika na Wydziale Automatyki, Elektroniki i Informatyki Politechniki Śląskiej w Gliwicach.



e-mail: stefankolodzinski@wp.pl

Streszczenie

W referacie przedstawiony jest problem przydziału zmiennych do zbioru wolnego i związanego przy dekompozycji funkcji logicznych. Jako przykład rozważana jest dekompozycja Ashenhursta funkcji implementowanych w układach FPGA typu LUT. Zaprezentowane rozwiązanie polegające na wykorzystaniu Boole'owskiego rachunku różniczkowego problemu jest bardzo wygodne wtedy kiedy proces dekompozycji prowadzony jest w dziedzinie spektralnej Reeda-Mullera. Uzyskiwane podziały zmiennych dla układów testowych są bardzo korzystne z punktu widzenia wyników dekompozycji.

Słowa kluczowe: dekompozycja, FPGA, różniczki boole'owskie.

Boolean Differential Calculus in decomposition of logic functions implemented in FPGA

Abstract

In the paper the problem of input variables assigning to the free and bounded sets during logic function decomposition is investigated. The Ashenhurst decomposition is considered with respect to implementation of logic functions in LUT based FPGA. The method of finding profitable input variables partitioning is based on utilization of Logic Differential Calculus. The elaborated method is very convenient, especially if decomposition is carried out in the Reed-Muller spectral domain because the Boolean differentials can be easily calculated from Reed-Muller forms of a logic function which are simply calculated as the reverse Reed-Muller transform. As it can be seen in Table 2, the obtained subsets of variables are very useful from the point of view of decomposition. The results presented in Table 2 are not only an effect of the Ashenhurst decomposition but the Curtis decomposition, too. So, if it was not possible to execute the Ashenhurst decomposition, the Curtis decomposition presented in [6] was performed.

Keywords: decomposition, FPGA, Boolean differentials.

1. Wstęp

Od momentu wprowadzenia na rynek przez firmę Monolithic Memory układów FPGA dekompozycja - jakkolwiek zawsze obecna, często niezauważalnie, w działalności projektowej - stała się ważną metodą stosowaną w projektowaniu układów cyfrowych. Współczesne układy FPGA czy PSoc składają się z tysięcy konfigurowalnych bloków logicznych lub podobnych podzespołów co jeszcze bardziej podnosi znaczenie dekompozycji w projektowaniu. Wraz z minimalizacją jest jednym z najważniejszych składników stale rozwijanych i udoskonalanych narzędzi komputerowego wspomaganie projektowania. Autorzy tej pracy skupili swoją uwagę na dekompozycji wykonywanej w dziedzinie spektralnej Reeda-Mullera [6, 7]. Biorąc pod uwagę modele dekompozycji sformułowane przez Ashenhurst [2] i Courtis [4] ważne jest przyporządkowanie argumentów funkcji do zbioru wolnego (A) i zbioru związanego (B). Ten problem powinien być

rozwiązany na samym początku procesu dekompozycji, gdyż w sposób istotny wpływa na jego wyniki. Jedno ze stosowanych rozwiązań jest oparte na tzw. rachunku podziałów [8]. Inne podejście wykorzystuje Binarne Diagramy Decyzyjne [9]. Te podejścia dobrze sprawdzają się wtedy gdy proces dekompozycji dokonany jest w dziedzinie Boole'owskiej. W niniejszej pracy prezentowane jest podejście oparte na wykorzystaniu Boole'owskiego rachunku różniczkowego, przydatne wtedy gdy dekompozycja wykonywana jest w dziedzinie spektralnej Reeda-Mullera.

2. Podstawy Boole'owskiego Rachunku Różniczkowego

Definicja

Niech $f(x)$ będzie funkcją boole'owską. Wyrażenie:

$$\frac{df(x)}{dx_i} = f(x)|_{x_i=1} \oplus f(x)|_{x_i=0}, \quad (1)$$

gdzie $x = x_{n-1}x_{n-2} \dots x_0$; n - liczba zmiennych funkcji, nazywamy pochodną boole'owską funkcji $f(x)$ względem zmiennej x_i [1].

Jeżeli $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami boole'owskimi to [10, 11]:

$$\frac{d\overline{f(x)}}{dx_i} = \overline{\frac{df(x)}{dx_i}} \quad (2)$$

$$\frac{df(x)}{dx_i} = \frac{df(x)}{dx_i} \quad (3)$$

$$\frac{d[f(x)g(x)]}{dx_i} = f(x)\frac{dg(x)}{dx_i} \oplus g(x)\frac{df(x)}{dx_i} \oplus \frac{df(x)}{dx_i} \frac{dg(x)}{dx_i} \quad (4)$$

$$\frac{d[f(x) \oplus g(x)]}{dx_i} = \frac{dg(x)}{dx_i} \oplus \frac{df(x)}{dx_i} \quad (5)$$

$$\frac{d[f(x) \vee g(x)]}{dx_i} = \overline{f(x)}\frac{dg(x)}{dx_i} \oplus \overline{g(x)}\frac{df(x)}{dx_i} \oplus \frac{df(x)}{dx_i} \frac{dg(x)}{dx_i} \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx_i} \left[\frac{df(x)}{dx_j} \right] = \frac{d}{dx_j} \left[\frac{df(x)}{dx_i} \right] \quad (7)$$

$$\frac{d^k f(x)}{dx_0 dx_1 \dots dx_k} = \frac{d}{dx_k} \left[\dots \frac{d}{dx_1} \left[\frac{df(x)}{dx_0} \right] \right] \quad (8)$$

Przykład 1

Obliczyć pochodne Boole'owskie $\frac{df(x)}{dx_1}$ i $\frac{df^2(x)}{dx_1 dx_2}$ funkcji logicznej danej za pomocą jej mintermów:

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \Sigma m(1, 2, 5, 6, 7, 8, 11, 13).$$

1. Na początek obliczane jest spektrum Reeda-Mullera zadanej funkcji:

$$\tilde{f} = [0110000110001010]$$

2. Na podstawie obliczonego spektrum Reeda-Mullera obliczana jest liniowa forma rozważanej funkcji logicznej [5, 6]:

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 x_1 x_0 \oplus x_3 \oplus x_3 x_2 \oplus x_3 x_2 x_1$$

3. Następnie obliczane są pochodne $\frac{df(x)}{dx_1}$ i $\frac{df^2(x)}{dx_1 dx_2}$.

Pochodne boole'owskie mogą być obliczane na podstawie definicji 1 i wyrażenia (8). Dla rozważanej funkcji uzyskuje się:

$$\frac{df}{dx_1} = 1 \oplus x_2 x_0 \oplus x_3 x_2$$

Bardziej efektywnym sposobem obliczania pochodnych boole'owskich jest sposób w którym wykorzystuje się następującą obserwację:

Obserwacja 1

Jeżeli zmienna względem, której obliczana jest pochodna boole'owska:

- nie jest zawarta w składniku funkcji to analizowany składnik jest usuwany z wyrażenia wynikowego.
- wchodzi w skład analizowanego składnika to ten składnik przepisywany jest do wyrażenia wynikowego ale bez tej zmiennej.

Biorąc pod uwagę powyższą obserwację pochodną boole'owską stopnia 2 wylicza się jako:

$$\frac{df^2}{dx_1 dx_2} = x_0 \oplus x_3$$

3. Zasady przyporządkowania zmiennych funkcji do zbioru wolnego i związanego

W poprzednich pracach [6, 7] autorzy skupiali swoją uwagę na rozłącznej dekompozycji Ashenhursta wykonywanej w dziedzinie spektralnej Reeda-Mullera ukierunkowanej na układy FPGA typu LUT. W tej pracy prezentujemy podział zmiennych funkcji na zbiór wolny i zbiór związany z wykorzystaniem boole'owskiego rachunku różniczkowego.

Obliczenia rozpoczynają się od wyznaczenia spektrum Reeda-Mullera rozważanej funkcji. W następnym kroku dla przyjętych wartości mocy zbiorów, wolnego i związanego, obliczane są odpowiednie pochodne boole'owskie. Dla granicznych wartości wektorów wejściowych obliczane są wartości obliczonych pochodnych. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$x=1$ – wszystkie zmienne są równe 1

$x=0$ – wszystkie zmienne są równe 0

Dla takich wektorów wejściowych pochodne boole'owskie z przykładu 1 przyjmują poniższe wartości:

$$\left. \frac{d^2 f}{dx_2 dx_1} \right|_{x=1/0} = 0 \text{ ponieważ } \left. \frac{d^2 f}{dx_2 dx_1} \right|_{x=1} = x_0 \oplus x_3 |_{x=1} = 1 \oplus 1 = 0$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dx_2 dx_1} \right|_{x=0} = x_0 \oplus x_3 |_{x=0} = 0 \oplus 0 = 0$$

Pochodne Boole'owskie dla $x=1$ i dla $x=0$ mogą przyjmować jedną z 4 wartości: 0, 1, 0/1, 1/0. 0/1 oznacza, że dla $x=1$ pochodna Boole'owska równa jest 0 a dla $x=0$ równa jest 1 oraz 1/0 oznacza, że dla $x=1$ pochodna Boole'owska równa jest 1 a dla $x=0$ równa jest 0.

Dla różnych funkcji logicznych zbadano wiele podziałów zmiennych wejściowych, dla których obliczono pochodne Boole'owskie. Na tej podstawie poczyniono następującą obserwację:

Obserwacja 2

- Jeżeli jako zmienne związane zostaną wybrane takie zmienne,

dla których $\left. \frac{d^\beta f}{dx_i \dots dx_j dx_k} \right|_{x=1/0}$, gdzie $\beta = \|x_i \dots x_j x_k\|$, przyjmuje

unikalną wartość ze wszystkich wartości pochodnych boole'owskich stopnia β , to takie przyporządkowanie zmiennych jest bardzo korzystne jeśli chodzi o znalezienie rozłącznej dekompozycji rozważanej funkcji.

- Jeżeli powyższy warunek nie jest spełniony jako zmienne związane i zmienne wolne wybierane są takie zmienne, dla których

para pochodnych boole'owskich $\left. \frac{d^\beta f}{dx_i \dots dx_j dx_k} \right|_{x=1/0}$,

gdzie $\alpha = \|x_i \dots x_m x_n\|$ i $\left. \frac{d^\alpha f}{dx_1 \dots dx_m dx_n} \right|_{x=1/0}$,

przyjmuje unikalne wartości, lub takie zmienne, dla których moc zbioru wartości par pochodnych boole'owskich jest najmniejsza.

Przykład 2

Sprawdzić dla jakiego przyporządkowania zmiennych do zbioru wolnego i związanego funkcja

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0) = \Sigma m(1, 3, 4, 5, 8, 10, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 31)$$

posiada rozłączną dekompozycję według modelu Ashenhursta $f(x) = H(G(B), A)$.

1. Obliczone spektrum Reeda-Mullera jest następujące:

$$\tilde{f} = [0 \quad \underline{1001111} \quad 1 \quad \underline{0000101} \quad 0 \quad \underline{0111111} \quad 0 \quad \underline{0010101}]$$

$$S_0 \qquad \qquad S_1 \qquad \qquad S_2 \qquad \qquad S_3$$

2. Jeśli przyjmijemy arbitralnie podział zmiennych - $A = \{x_4, x_3\}$, $B = \{x_2, x_1, x_0\}$; ($\alpha=2/\beta=3$) – w spektrum Reeda-Mullera możemy znaleźć cztery podspektra jak zostało to pokazane powyżej. Ponieważ $S_0 \neq S_1 \neq S_2 \neq S_3$ to oznacza to, że rozłączna dekompozycja Ashenhursta nie istnieje dla takiego podziału zmiennych.

3. Na podstawie odwrotnej transformacji Reeda-Mullera wyliczana jest liniowa forma (forma Reeda-Mullera) rozważanej funkcji logicznej [11]:

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0) = x_0 \oplus x_2 \oplus x_2 x_0 \oplus x_2 x_1 \oplus x_2 x_1 x_0 \oplus x_3 \oplus x_3 x_2 x_0 \oplus x_3 x_2 x_1 x_0 \oplus x_4 x_1 \oplus x_4 x_1 x_0 \oplus x_4 x_2 \oplus x_4 x_2 x_0 \oplus x_4 x_2 x_1 \oplus x_4 x_2 x_1 x_0 \oplus x_4 x_3 x_1 x_0 \oplus x_4 x_3 x_2 x_0 \oplus x_4 x_3 x_2 x_1 x_0$$

4. Następnie wyliczane są drugie i trzecie pochodne boole'owskie.

Dla podziału $\alpha=2/\beta=3$ możliwych jest $\binom{n}{\beta} = \binom{5}{3} = 10$ przyporządkowań zmiennych funkcji do zbioru wolnego i związanego.

Obliczone wartości pochodnych boole'owskich dla $x=1$ i $x=0$ dla wszystkich możliwych przyporządkowań zmiennych przedsta-

wione są w tabeli 1. W tej tabeli tylko $\left. \frac{d^3 f}{dx_4 dx_2 dx_1} \right|_{x=1/0} = 1$

jest wartością unikalną. Zatem przyporządkowanie zmiennych do zbiorów wolnego i związanego mogłoby być następujące:

$$B = \{x_4, x_2, x_1\} \text{ i } A = \{x_3, x_0\}.$$

Tab. 1. Pochodne boole'owskie funkcji z przykładu 2

Tab. 1. Boolean differentials of the function from example 2

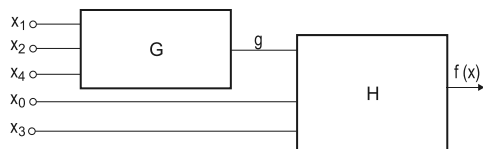
Lp.	Wartość 3-ciej pochodnej boole'owskiej	Wartość 2-giej pochodnej boole'owskiej
1.	$\left. \frac{d^3 f}{dx_4 dx_1 dx_0} \right _{x=1/0} = 0/1$	$\left. \frac{d^2 f}{dx_3 dx_2} \right _{x=1/0} = 0$
2.	$\left. \frac{d^3 f}{dx_4 dx_2 dx_0} \right _{x=1/0} = 0/1$	$\left. \frac{d^2 f}{dx_3 dx_1} \right _{x=1/0} = 1/0$
3.	$\left. \frac{d^3 f}{dx_4 dx_3 dx_0} \right _{x=1/0} = 1/0$	$\left. \frac{d^2 f}{dx_2 dx_1} \right _{x=1/0} = 0/1$
4.	$\left. \frac{d^3 f}{dx_4 dx_2 dx_1} \right _{x=1/0} = 1$	$\left. \frac{d^2 f}{dx_3 dx_0} \right _{x=1/0} = 1/0$
5.	$\left. \frac{d^3 f}{dx_4 dx_3 dx_1} \right _{x=1/0} = 0$	$\left. \frac{d^2 f}{dx_2 dx_0} \right _{x=1/0} = 0/1$
6.	$\left. \frac{d^3 f}{dx_4 dx_3 dx_2} \right _{x=1/0} = 0$	$\left. \frac{d^2 f}{dx_1 dx_0} \right _{x=1/0} = 0$
7.	$\left. \frac{d^3 f}{dx_3 dx_1 dx_0} \right _{x=1/0} = 1/0$	$\left. \frac{d^2 f}{dx_4 dx_2} \right _{x=1/0} = 0/1$
8.	$\left. \frac{d^3 f}{dx_3 dx_2 dx_0} \right _{x=1/0} = 0/1$	$\left. \frac{d^2 f}{dx_4 dx_1} \right _{x=1/0} = 0/1$
9.	$\left. \frac{d^3 f}{dx_3 dx_2 dx_1} \right _{x=1/0} = 0$	$\left. \frac{d^2 f}{dx_4 dx_0} \right _{x=1/0} = 0$
10.	$\left. \frac{d^3 f}{dx_2 dx_1 dx_0} \right _{x=1/0} = 0/1$	$\left. \frac{d^2 f}{dx_4 dx_3} \right _{x=1/0} = 1/0$

5. W celu sprawdzenia, że dla znalezionej podziału zmiennych rozłączna dekompozycja Ashenhursta istnieje należy policzyć spektrum Reeda-Mullera dekomponowanej funkcji dla nowego uporządkowania zmiennych: x_3, x_0, x_4, x_2, x_1 . Tak obliczone spektrum ma następującą postać:

$$\tilde{f} = [0 \ \underline{1010111} \ 1 \ \underline{1010111} \ 1 \ \underline{0000000} \ 0 \ \underline{1010111}]$$

$S_0 \quad S_1 \quad S_2 \quad S_3$

Ponieważ podspektra S_0, S_1, S_3 są takie same a podspektrum S_2 jest zerowe to dla znalezionej podziału zmiennych istnieje rozłączna dekompozycja Ashenhursta dla znalezionej podziału zmiennych dekomponowanej funkcji (rys. 1).



Rys. 1. Implementacja rozważanej funkcji

Fig. 1. Implementation of the considered function

4. Podsumowanie

Implementacja funkcji logicznych w układach FPGA wymaga przeprowadzenia dekompozycji funkcji ze względu na granularność struktury wewnętrznej tych układów. Aby to zrobić należy wykonać przyporządkowanie zmiennych funkcji do zbiorów wolnego i związa-

nego. W artykule zostało zaprezentowane rozwiązanie tego problemu oparte na wykorzystaniu boole'owskiego rachunku różniczkowego.

Ze względu na to, że w prosty sposób wylicza się pochodne boole'owskie z liniowej formy Reeda-Mullera funkcji logicznej to podejście jest szczególnie wygodne wtedy gdy dekompozycja dokonywana jest w dziedzinie spektralnej Reeda-Mullera. Metoda polega na poszukiwaniu unikalnych wartości pochodnych boole'owskich i sprawdzaniu czy dla tego podziału zmiennych dla którego ta unikalna wartość pochodnej występuje jako podziału dającego szansę znalezienia dekompozycji. Przeprowadzenie formalnego dowodu słuszności tego podejścia będzie tematem dalszych prac. Metoda została jednak pozytywnie zweryfikowana na wielu układach testowych zaprezentowanych w [3]. Rezultaty tych obliczeń, zorientowane na układy XC4000, zostały przedstawione w tabeli 2. Należy w tym miejscu zaznaczyć, że wyniki zaprezentowane w tabeli 2 nie są tylko efektem dekompozycji Ashenhursta ale także dekompozycji Curtisa. Jeżeli układ nie podlegał dekompozycji Ashenhursta stosowano przedstawioną w pracy [6] dekompozycję Curtisa w dziedzinie spektralnej.

Tab. 2. Porównanie wyników dekompozycji

Tab. 2. The comparison of decomposition results

Benchmark	MIS	SIS	Sawada i in.	Shen i in.	Bool Map-D	Chang i in.	ISODEC-S	IRMA2FPGAS	Methods from this work
5xp1	21	19	15	19	13	19	13	16	14
9sym	7	7	7	6	7	6	8	7	6
clip		42	18	36			22	20	24
f51m	23	20	12	16		81	13	15	13
misex1	17	14	12	16	15	18	15	13	16
rd73	8	9	8	8		8	7	8	7
rd84	13	12	12	8	10	13	10	12	10
sao2	45	37	23	37		26	20	28	22

5. Literatura

- [1] S.B. Akers: On the Theory of Boolean Functions, Journal of Society Indust. Appl. Math., No. 7. 1959.
- [2] R.L. Ashenhurst: The Decompositions of Switching Functions, Proceedings of International Symposium on the Theory of Switching Functions, April, 1957.
- [3] S. Yang: Logic Synthesis and Optimisation Benchmarks User Guide Ver. 3.0, Microelectronic Center of North Carolina, January 15, 1991.
- [4] H.A. Curtis: A New Approach to the Design of Switching Circuits, Princeton, NJ, Van Nostrand, 172-194, 1962.
- [5] D.H. Green: Modern Logic Design, Addison Wesley, 1986.
- [6] E. Hryniewicz, S. Kołodziński: Decomposition of Logic Functions in Reed-Muller Spectral Domain, Proceedings of IEEE Workshop on Design and Diagnostics of Electronic Circuits and Systems, Kraków, Poland, April 11-13, 2007.
- [7] S. Kołodziński: Dekompozycja funkcji logicznych metodami spektralnymi zorientowana na realizację tych funkcji w układach FPGA typu tablicowego, Rozprawa doktorska, Politechnika Śląska Gliwice 2003.
- [8] T. Łuba, H. Selvaraj: A General Approach to Boolean Function Decomposition and Its Application in FPGA-based Synthesis, VLSI Design, Special Issue on Decomposition in VLSI Design, Vol. 3, No 3-4, 1995.
- [9] S. Minato: Binary decision Diagrams and Application for VLSI CAD, Springer, 1996.
- [10] T. Sasao, K. Kurimoto: Three Parameters to Find Functional Decomposition, Proceedings of Asia and South Pacific Design Automation Conference, Yokohama, Japan, January 26-28, 2000.
- [11] S.N. Yanushkevitch: Boolean Differential Calculus in Multi-Value Logic Design, DSc Thesis, Szczecin University of Technology, Poland, 1998.