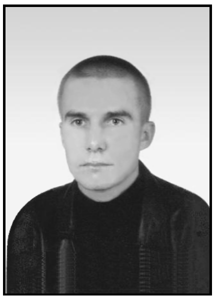
**Sergiusz SIENKOWSKI, Elżbieta KAWECKA**
[1] UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI, IME
[2] UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI, IIE

# Estymacja punktowa cyfrowego estymatora wartości średniej sygnałów przypadkowych

**Mgr inż. Sergiusz SIENKOWSKI**

Absolwent Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Zielonogórskiej (2001r.) oraz Wydziału Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego (2003r.). Obecnie asystent w Instytucie Metrologii Elektrycznej Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zajmuje się zagadnieniami związanymi z cyfrowym przetwarzaniem sygnałów i oceną niepewności pomiarów.



*e-mail: s.sienkowski@ime .uz.zgora.pl*

**Dr inż. Elżbieta KAWECKA**

Absolwentka Wydziału Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego (2000r.). Obecnie adiunkt w Instytucie Informatyki i Elektroniki Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zajmuje się następującymi zagadnieniami: estymacja charakterystyk sygnału na podstawie jego cyfrowej reprezentacji, przetwarzanie A/C z sygnałem ditherowym, niepewność pomiaru, technika korelacyjna.

*e-mail: e.kawecka@iie.uz.zgora.pl*

**Streszczenie**

Artykuł przedstawia problematykę obliczania wartości oczekiwanej, obciążenia i wariancji cyfrowego estymatora wartości średniej sygnałów przypadkowych. W rzeczywistych sytuacjach pomiarowych estymacja obciążenia i wariancji, wymaga najczęściej wielokrotnego powtarzania eksperymentu pomiarowego. Nie są przy tym sformułowane kryteria dotyczące dokładności prowadzonych oszacowań. Zaprezentowane w pracy wzory omijają problem niejednoznaczności oszacowań i umożliwiają, na podstawie momentów, obliczenie obciążenia i wariancji cyfrowego estymatora wartości średniej sygnałów.

**Słowa kluczowe**: cyfrowy estymator wartości średniej, wartość oczekiwana, obciążenie, wariancja estymatora.

## Point estimation of the mean value digital estimator of random signals

**Abstract**

In the paper there is discussed a problem of estimation of the expected value, bias and variance of the mean value digital estimator of random signals. In real measurement tasks the estimation of the variance and bias values requires numerous repetitions of measurement experiments. Moreover, there are no clear criteria of the estimation accuracy. The equations formulated in this paper allow avoiding the problem of the estimation uncertainty and calculating the bias and variance of the digital estimator of the mean value signals basing on the so called moments. The paper is divided into 4 sections. Section 1 contains a short introduction to the issues of this paper. In Section 2 there is given a definition of the digital estimator of the mean value signal. The estimator's expected value is calculated – Eq. (2). On the basis of Eq. (2), the bias caused by quantization is given by Eq. (4). The variance is described by Eq. (7), while the mean square error by Eq. (8). It allows evaluating the consistency estimator. The variance of the mean value Eq. (13) is determined basing on the Widrow theory of quantization Eq. (10-12). In the next section there is presented an example of determining the bias – Eq. (17) and variance Eq. (20) of the mean value digital estimator of a Gaussian signal. The characteristic function of the Gaussian signal is given by Eq. (15). Table 1 presents the result of calculating the mean value variance for varying signal amplitude and increasing A/D resolution. Section 4 summarizes the investigations and presents some concluding remarks. There are discussed applications of the obtained expressions to evaluation of the measurement result uncertainty of the most important signal parameters.

**Keywords**: mean value digital estimator, expected value, bias, estimator's variance.

## 1. Wstęp

Pojęcie estymacji jest równoznaczne z pojęciem oceny lub oszacowania. Do oszacowywania ciągu wartości stosuje się trzy miary statystyczne. Są to wartość średnia, wariancja i odchylenie standardowe. Obliczenie wartości średniej ma znaczenie, z co najmniej trzech podstawowych powodów. Po pierwsze wartość średnia stanowi podstawową miarę tendencji i rozrzutu zmiennej losowej, jej obliczanie wymagane jest w najbardziej podstawowych zastosowaniach. Po drugie parametr ten może być podstawą do oceny stacjonarności sygnału. Po trzecie wartość średnia może być uzyskana w sposób pośredni z innych parametrów sygnałów [1]. Obliczanie wariancji ma niebagatelne znaczenie w procesie badania własności sygnałów. Za pomocą wariancji badać można zgodność estymatorów, mierzyć skutki błędów kwantyzacji i użyteczność algorytmów uśredniania sygnału. Wariancja utożsamiana ze zróżnicowaniem zbiorowości daje pojęcie, w jakim zakresie wartości skupione w ciągu fluktuują wokół wartości średniej ciągu i dostarcza dobrze zdefiniowanej miary ilościowej tych fluktuacji [2]. Obliczając pierwiastek kwadratowy z wariancji otrzymujemy odchylenie standardowe. W metrologii odchylenie standardowe stosuje się do określenia innej ważnej wielkości nazywanej niepewnością pomiaru [3].

W artykule przedstawiono zależność matematyczną umożliwiającą obliczenie wartości średniej sygnału losowego skwantowanego w przetworniku A/C typu zaokrąglającego o idealnej charakterystyce kwantowania. Obliczono wartość oczekiwaną tak zdefiniowanego estymatora. Następnie wyznaczono jego obciążenie i wariację. Na podstawie wariancji i błędu średniokwadratowego estymatora oceniono jego zgodność. W charakterze przykładu zaprezentowano wyniki obliczeń obciążenia i wariancji cyfrowego estymatora wartości średniej sygnału losowego o rozkładzie gaussowskim.

## 2. Wartość oczekiwana, obciążenie i wariancja cyfrowego estymatora wartości średniej sygnałów przypadkowych

Niech przetwornik A/C będzie idealny w swoim działaniu i wszystkie możliwe błędy pomiędzy $-q/2$ a $q/2$ ($q$ – krok kwantowania) będą równie prawdopodobne. Ponadto niech funkcja gęstości prawdopodobieństwa błędu kwantyzacji $e_q$ będzie jednostajna, przy czym:

$$e_q = n_q - n, \tag{1}$$

gdzie $n$ – sygnał pierwotny, $n_q$ – sygnał skwantowany.

Estymator $\tilde{\tilde{n}}_q$ prawdziwej wartości średniej $\mu$ można oszacować na podstawie skwantowanych i nieskorelowanych próbek sygnału $n_q$ zgodnie ze wzorem:

$$\tilde{\tilde{n}}_q = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} n_q(i), \tag{2}$$

gdzie $M$ to liczba próbek sygnału.

Estymator $\tilde{\tilde{n}}_q$ można rozumieć jako statystykę zmiennych losowych odpowiadających poszczególnym próbkom sygnału $n_q$. Takie zmienne mają jednakowy rozkład prawdopodobieństwa, identyczny z rozkładem całej populacji. Statystyka $\tilde{\tilde{n}}_q$ sama też jest zmienną losową. To ważne spostrzeżenie pozwala na obliczenie wartości oczekiwanej estymatora ze wzoru (2).

Korzystając z definicji błędu kwantyzacji $e_q$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E\left[\tilde{\tilde{n}}_q\right] &= E\left[\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} n_q(i)\right] = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} E\left[n_q(i)\right] = \\ &= \frac{1}{M}\left(M\, E\left[n_q\right]\right) = E[n] + E\left[e_q\right] = \mu + E\left[e_q\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Jak wynika ze wzoru (3) estymator $\tilde{\tilde{n}}_q$ jest obciążony dodatkową, wynikającą z kwantowania składową, równą $E\left[e_q\right]$. Ponieważ wpływ próbkowania jest pomijany jedynym źródłem błędu jest sytuacja, w której $E\left[e_q\right] \neq 0$. Błąd ten można opisać wzorem [4]:

$$b_{\tilde{\tilde{n}}_q} = E\left[e_q\right]. \tag{4}$$

Wariancję estymatora $\tilde{\tilde{n}}_q$ można obliczyć z definicji na podstawie wzoru:

$$Var\left[\tilde{\tilde{n}}_q\right] = E\left[\left(\tilde{\tilde{n}}_q - E\left[\tilde{\tilde{n}}_q\right]\right)^2\right] = E\left[\left(\tilde{\tilde{n}}_q\right)^2\right] - E^2\left[\tilde{\tilde{n}}_q\right]. \tag{5}$$

Można zauważyć, że:

$$\begin{aligned} E\left[\left(\tilde{\tilde{n}}_q\right)^2\right] &= E\left[\left(\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} n_q(i)\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{M^2}\left(\sum_{i=0}^{M-1} E\left[\left(n_q(i)\right)^2\right] + \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{M-1} E\left[n_q(i)\, n_q(j)\right]\right) = \\ &= \frac{1}{M^2}\left(M E\left[n_q^2\right] + M(M-1)E^2\left[n_q\right]\right) = \\ &= \frac{1}{M}\left(E\left[n_q^2\right] - E^2\left[n_q\right]\right) + E^2\left[n_q\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Uwzględniając zależności (3) i (6) we wzorze (5) otrzymujemy:

$$Var\left[\tilde{\tilde{n}}_q\right] = \frac{1}{M}\left(E\left[n_q^2\right] - E^2\left[n_q\right]\right). \tag{7}$$

Korzystając ze wzorów (3) i (6) można obliczyć błąd średniokwadratowy $\Delta^2_{\tilde{\tilde{n}}_q}$ estymatora $\tilde{\tilde{n}}_q$:

$$\begin{aligned} \Delta^2_{\tilde{\tilde{n}}_q} &= E\left[\left(\tilde{\tilde{n}}_q - \mu\right)^2\right] = E\left[\left(\tilde{\tilde{n}}_q - E[n]\right)^2\right] = \\ &= E\left[\left(\tilde{\tilde{n}}_q\right)^2\right] - E^2[n] - 2E[n]E\left[\tilde{\tilde{n}}_q\right] = \\ &= \frac{1}{M}\left(E\left[n_q^2\right] - E^2\left[n_q\right]\right) + E^2\left[e_q\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Wariancja $Var\left[\tilde{\tilde{n}}_q\right]$ i błąd średniokwadratowy $\Delta^2_{\tilde{\tilde{n}}_q}$ są różne. Pomimo, że dla rosnącej liczby próbek $M$ wariancja ze wzoru (7) szybko maleje i dla $M \to \infty$ przyjmuje wartość równą zero, to $\tilde{\tilde{n}}_q$ nie jest estymatorem zgodnym. Jeżeli sygnał $n$ kwantowany byłby w przetworniku o nieskończenie dużej rozdzielczości $B$ to estymator $\tilde{\tilde{n}}_q$ zdążałby stochastycznie do prawdziwej wartości średniej $\mu$.

Uwzględniając definicję błędu kwantyzacji $e_q$ we wzorze (7) otrzymujemy:

$$Var\left[\tilde{\tilde{n}}_q\right] = \frac{1}{M}\left(E\left[n^2\right] + 2E\left[ne_q\right] + E\left[e_q^2\right] - \left(E[n] + E\left[e_q\right]\right)^2\right). \tag{9}$$

Momenty pierwszego i drugiego rzędu błędu kwantyzacji $e_q$ oraz wyrażenie korelacyjne wiążące sygnał $n$ i błąd kwantyzacji $e_q$ można obliczyć na podstawie wzorów [4]:

$$E\left[e_q\right] = \frac{q}{j2\pi}\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty} \Phi_n\left(\frac{2\pi}{q}i\right)\frac{(-1)^i}{i}, \quad j = \sqrt{-1}, \tag{10}$$

$$E\left[e_q^2\right] = \frac{q^2}{2\pi^2}\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty} \Phi_n\left(\frac{2\pi}{q}i\right)\frac{(-1)^i}{i^2} + \frac{q^2}{12}, \tag{11}$$

$$E\left[ne_q\right] = \frac{q}{2\pi}\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty} \dot{\Phi}_n\left(\frac{2\pi}{q}i\right)\frac{(-1)^{i+1}}{i}, \tag{12}$$

gdzie $\Phi_n(v) = E\left[e^{jvn}\right]$ jest funkcją charakterystyczną odpowiadającą sygnałowi $n$ [5, 6].

Wyrażenia $E[n]$ i $E\left[n^2\right]$ to momenty zwykłe pierwszego i drugiego rzędu. W technice nazywane są one odpowiednio wartością średnią i średniokwadratową sygnału $n$.

Uwzględniając wzory (10)-(12) we wzorze (9) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Var\left[\tilde{\tilde{n}}_q\right] = \frac{1}{M}\Bigg( & E\left[n^2\right] + \frac{q^2}{12} - E^2[n] + \\ & + \frac{q}{\pi}\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i}\left(\Phi_n\left(\frac{2\pi}{q}i\right)\left(\frac{q}{2\pi i} + jE[n]\right) - \dot{\Phi}_n\left(\frac{2\pi}{q}i\right)\right) + \\ & + \frac{q^2}{4\pi^2}\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \Phi_n\left(\frac{2\pi}{q}i\right)\Phi_n\left(\frac{2\pi}{q}k\right)\frac{(-1)^{i+k}}{ik}\Bigg). \end{aligned} \tag{13}$$

Jeżeli sygnał $n$ ma zerową wartość średnią $\mu$ i odpowiada mu symetryczna funkcja charakterystyczna $\Phi_n$ to:

$$\begin{aligned} Var\left[\tilde{\tilde{n}}_q\right] &= \frac{1}{M}\left(E\left[n^2\right] + 2E\left[ne_q\right] + E\left[e_q^2\right]\right) = \\ &= \frac{1}{M}\Bigg(E[n^2] + \frac{q^2}{12} + \\ &\quad + \frac{q}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i}\left(\frac{q}{\pi i}\Phi_n\left(\frac{2\pi}{q}i\right) - 2\dot{\Phi}_n\left(\frac{2\pi}{q}i\right)\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{14}$$

Na podstawie wzoru (13) i funkcji charakterystycznej $\Phi_n$ odpowiadającej badanemu sygnałowi można obliczyć wariację estymatora wartości średniej skwantowanego sygnału.

## 3. Przykład

W charakterze przykładu rozważmy sygnał losowy $n$ o rozkładzie gaussowskim i odchyleniu standardowym $\sigma_n$. Sygnał $n$ poddano konwersji A/C w przetworniku o rozdzielczości $B$.

Badanemu sygnałowi odpowiada funkcja charakterystyczna postaci [5, 6]:

$$\Phi_n(v) = e^{jv\mu} e^{-0.5v^2\sigma_n^2}. \tag{15}$$

Na podstawie (15) otrzymujemy pochodną funkcji $\Phi_n$:

$$\dot{\Phi}_n(v) = \left(-v\sigma_n^2 + j\mu\right)\Phi_n(v). \tag{16}$$

Przyjmuje się w ogólności, że sygnał losowy $n$ o rozkładzie gaussowskim jest sygnałem o zerowej wartości średniej $\mu$. Ponieważ funkcja $\Phi_n$ ze wzoru (15) jest symetryczna względem zerowej wartości średniej $\mu$ to na podstawie (4) i (10) otrzymujemy, że:

$$b_{\tilde{\tilde{n}}_q} = E\left[e_q\right] = 0. \tag{17}$$

Wynikające z kwantowania obciążenie $b_{\tilde{\tilde{n}}_q}$ jest równe zero, a zatem estymator $\tilde{\tilde{n}}_q$ wartości średniej badanego sygnału jest nieobciążony.

Kolejne momenty sygnału losowego $n$ o rozkładzie gaussowskim można obliczyć ze wzorów [4]:

$$\begin{aligned} E[n] &= \mu, \\ E\left[n^2\right] &= \mu^2 + \sigma_n^2, \\ E\left[n^3\right] &= \mu^3 + 3\mu\sigma_n^2, \\ E\left[n^4\right] &= \mu^4 + 6\mu^2\sigma_n^2 + 3\sigma_n^4, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{18}$$

Korzystając z zależności (18) otrzymujemy, że $E[n] = \mu$ oraz $E\left[n^2\right] = \mu^2 + \sigma_n^2$. Stąd na podstawie wzorów (15) i (16):

$$\begin{aligned} Var\left[\tilde{\tilde{n}}_q\right] = {} & \frac{1}{M}\sigma_n^2\left(1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\sigma_n}{q}\right)^{-2} + \right. \\ & + 2\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty}(-1)^i e^{-0.5\left(2\pi i\frac{\sigma_n}{q}\right)^2} e^{j2\pi i\frac{\mu}{q}}\left(\left(2\pi i\frac{\sigma_n}{q}\right)^{-2} + 1\right) + \\ & \left. + \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\sigma_n}{q}\right)^{-2}\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} e^{-0.5\left(2\pi\frac{\sigma_n}{q}\right)^2\left(i^2+k^2\right)} e^{j2\pi(i+k)\frac{\mu}{q}}\frac{(-1)^{i+k}}{ik}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Ponieważ funkcja $\Phi_n$ ze wzoru (15) jest symetryczna względem zerowej wartości średniej $\mu$ to wzór (19) upraszcza się do postaci:

$$\begin{aligned} Var\left[\tilde{\tilde{n}}_q\right] = {} & \frac{1}{M}\sigma_n^2\left(1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\sigma_n}{q}\right)^{-2} + \right. \\ & \left. + 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i e^{-0.5\left(2\pi i\frac{\sigma_n}{q}\right)^2}\left(\left(2\pi i\frac{\sigma_n}{q}\right)^{-2} + 1\right)\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Jak pokazano w punkcie 2 pracy, w ogólności wariancja $Var\left[\tilde{\tilde{n}}_q\right]$ nie jest równa błędowi $\Delta^2_{\tilde{\tilde{n}}_q}$. Jednakże dla badanego sygnału $\mu = 0$ oraz $b = 0$. Ponadto dla $M \to \infty$ wariancja $Var\left[\tilde{\tilde{n}}_q\right]$ ze wzoru (20) przyjmuje wartość równą zero. Oznacza to, że estymator $\tilde{\tilde{n}}_q$ wartości średniej sygnału jest nie tylko nieobciążony, ale i zgodny.

W tab. 1 przedstawiono wyniki obliczeń wariancji cyfrowego estymatora wartości średniej sygnału losowego o rozkładzie gaussowskim. Podczas obliczeń przyjęto $M = 1\,000$, $B = 3$, $q = 3\sigma_n / 2^{B-1}$. Badania powtórzono dla $B = 8$. Zakres zmiany indeksu sumy we wzorze (20) ograniczono do 1 000.

Tab. 1. Wariancja cyfrowego estymatora wartości średniej sygnału losowego o rozkładzie gaussowskim
Tab. 1. Variance of the mean value digital estimator of Gaussian PDF signal

| $\sigma_n$ $[V]$ | $Var\left[\tilde{\tilde{n}}_q\right]$ $\left[V^2\right]$ | |
|---|---|---|
| | $B = 3$ | $B = 8$ |
| 0.25 | 0.00655 | 0.00625 |
| 0.5 | 0.0262 | 0.0250 |
| 0.75 | 0.0589 | 0.0563 |
| 1.0 | 0.105 | 0.100 |

Zwiększenie dyspersji sygnału powoduje zwiększenie rozrzutu wyników wokół wartości średniej. Obserwujemy wówczas wzrost wariacji. Jak pokazują wyniki obliczeń zamieszczone w tab. 1, zmiana odchylenia standardowego $\sigma_n$ sygnału losowego o rozkładzie gaussowskim wywołuje oczekiwany wzrost wariancji estymatora $\tilde{\tilde{n}}_q$ wartości średniej sygnału $n_q$. Co ciekawe, rosnąca rozdzielczość przetwornika w niewielkim stopniu kompensuje wzrost wariancji. Oznacza to, że powodowana kwantowaniem degradacja sygnału $n$ tylko nieznacznie wpływa na końcową wartość wariancji cyfrowego estymatora wartości średniej sygnału $n_q$. Wpływu tego jednak nie można zaniedbać podczas oceny niepewności wyniku pomiaru wartości średniej sygnału $n_q$.

## 4. Wnioski

W artykule przedstawiono postać cyfrowego estymatora wartości średniej sygnału. Obliczono wartość oczekiwaną estymatora. Na tej podstawie wyznaczono wynikające z kwantowania obciążenie. W dalszej części artykułu przedstawiono zależność matematyczną umożliwiającą obliczanie wariancji estymatora. Na tej podstawie oraz na podstawie błędu średniokwadratowego estymatora oceniono jego zgodności. Badany estymator okazał się nie tylko obciążony, nie był również estymatorem zgodnym. W rzeczywistych sytuacjach pomiarowych estymacja obciążenia i wariancji wymaga najczęściej wielokrotnego powtarzania eksperymentu pomiarowego. Nie są przy tym sformułowane kryteria dotyczące dokładności prowadzonych oszacowań. Przedstawione w pracy wzory omijają problem niejednoznaczności oszacowań i umożliwiają, na podstawie momentów, obliczenie obciążenia i wariancji estymatora wartości średniej skwantowanego sygnału. Wyniki badań zamieszczone w artykule są kluczowe podczas oceny niepewności wyniku pomiaru wartości średniej obliczanej na podstawie cyfrowych danych pomiarowych. To zagadnienie będzie przedmiotem dalszych badań autorów referatu.

## 5. Literatura


[1] Bendat J., Piersol A.: Random Data Analysis and Measurement Pro-cedures, John Wiley & Sons, 1986.
[2] Lyons R.G.: Understanding Digital Signal Processing, Prentice Hall PTR, 2004.
[3] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, BIPM, 1995.
[4] Widrow B., Kollar I.: Quantization Noise, Roundoff Error in Digital Computation, Signal Processing, Control, and Communications, Cambridge University Press, 2008.
[5] Korn G. T.: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, New York: McGraw-Hill, 1961.
[6] Papoulis A.: Probablility, Random Variables, and Stochastic Processes., New York: McGraw-Hill, 1965.


*Artykuł recenzowany*