

**Dominik KUJAWA**

UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych

## Identyfikacja dyskretnego liniowego systemu powtarzalnego metodami podprzestrzeni

Mgr inż. Dominik KUJAWA

Autor jest doktorantem na Wydziale Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego. W swojej pracy badawczej zajmuje się teorią sterowania, identyfikacją systemów dynamicznych metodami podprzestrzeni, systemami powtarzalnymi.



e-mail: administrator@zszoi.nazwa.pl

### Streszczenie

W artykule przedstawiono model procesu repetycyjnego zbudowany przy wykorzystaniu metod podprzestrzeni. Rząd systemu i macierze nieznanego systemu są wyznaczone z sekwencji danych wejściowych i wyjściowych aktualnego pasa i sekwencji wyjściowej poprzedniego pasa. Procedura identyfikacji może być powtarzana dla kolejnych pasów. Proponowane podejście może być użyteczne nie tylko dla identyfikacji stacjonarnych liniowych procesów powtarzalnych, ale także dla procesów z wolno ewoluującą dynamiką lub procesów, których dynamika zmienia się skokowo z pasa na pas (np. systemy sterujące produkcją wytwarzania butelek plastikowych).

**Słowa kluczowe:** modele w przestrzeni stanów, metody podprzestrzeni, algorytmy identyfikacji, estymacja parametrów.

### Deterministic subspace identification of a linear repetitive process

#### Abstract

In the paper identification of the linear repetitive processes using the subspace methods is considered. Generally speaking, constructions of the deterministic realization theory are translated by the subspace methods into procedures (Fig. 1). The procedures which work on measured data are used for model building [5, 6]. Subspace algorithms consist of two steps. In the first step, the order and the extended observability matrix are recovered directly from the input-output data [2]. In the second step, the unknown system matrices are determined either via determining the state sequences and combining them with the input-output data or determining the matrices A and C directly from the extended observability matrix and using them to determine the remaining system matrices [3, 4]. Contrary to the LRP control theory, the identification of LRPs has attracted very limited attention. LRP are a useful tool for modelling and control of some real dynamic processes and operations [1]. The aim of this paper is to propose a new approach to the identification of the LRPs based on subspace algorithms. The order of a LRP and the unknown process matrices are determined based on the input and output sequences of the actual pass and the output sequence of the previous pass. The proposed approach can be very useful not only for time invariant linear repetitive processes but also for processes with fast dynamic changes from pass to pass (e.g., perform-to-bottle cycle process). A simulation example is provided to illustrate the proposed approach effectiveness (Fig. 2).

**Keywords:** state space models, subspace methods, identification algorithms, parameter estimation.

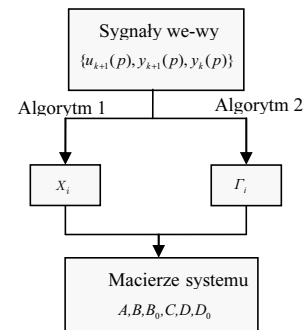
### 1. Wstęp

Szczególny przypadek klasy dwuwymiarowych modeli, jakim są procesy powtarzalne charakteryzuje się występowaniem dwóch zmiennych: przestrzennej określającej pas lub przejście i czasowej określającej pozycję na pasie, przy czym długość każdego pasa jest skończona [1]. Wpływ poprzedniego przejścia może prowadzić do oscylacji, których amplituda rośnie wraz z kierunkiem przejścia [2].

Algorytmy identyfikacji metodami podprzestrzeni zostały rozwinięte w ostatnich dwóch dekadach. Metody podprzestrzeni są uży-

wane w identyfikacji systemów liniowych z użyciem rozkładu QR i rozkładu według wartości osobliwych (SVD) oraz operacji geometrycznych takich jak rzutowanie ortogonalne i rzutowanie ukośne [3].

Algorytmy podprzestrzeni składają się z dwóch kroków. W pierwszym kroku z danych sygnałów wejściowo-wyjściowych obliczamy rząd identyfikowanego systemu oraz wyznaczamy sekwencję stanów  $X_i$  (Algorytm 1) lub rozszerzoną macierz obserwowalności systemu  $\Gamma_i$  (Algorytm 2). W kroku drugim wyznaczone są macierze  $A, B, B_0, C, D, D_0$  (rys. 1). Metody podprzestrzeni nie wymagają parametryzacji kanonicznej [1].



Rys. 1. Dwie drogi wyznaczania macierzy systemu nieznanego procesu powtarzalnego: Algorytm 1 wykorzystujący sekwencje stanów, Algorytm 2 wykorzystujący rozszerzoną macierz obserwowalności

Fig. 1. Two ways of determining unknown matrixes: Algorithm 1 using the state sequence, Algorithm 2 using the extended observability matrix

Artykuł zawiera wprowadzenie do identyfikacji dyskretnego systemu powtarzalnego metodami podprzestrzeni. Przedstawiono w nim model liniowego procesu repetycyjnego, sformułowano zadanie identyfikacji, zarówno dla przypadku deterministycznego jak i stochastycznego, i podano rozwiązania oparte na algorytmach podprzestrzeni. Zaprezentowano także przykład symulacyjny ilustrujący proponowane podejście.

### 2. Model liniowego systemu powtarzalnego

Model liniowego dyskretnego systemu powtarzalnego określają następujące zależności:

$$x_{k+1}(p+1) = Ax_{k+1}(p) + B_0y_k(p) + Bu_{k+1}(p) \quad (1)$$

$$y_{k+1}(p) = Cx_{k+1}(p) + D_0y_k(p) + Du_{k+1}(p) \quad (2)$$

gdzie:

$0 \leq p \leq \alpha - 1 \in \mathbb{Z}_+$  - zmienna czasowa lub przestrzenna,

$k \in \mathbb{Z}_+$  - numer aktualnego pasa,

$x_k(p) \in \mathbb{R}^n$  - wektor stanu,

$y_k(p) \in \mathbb{R}^l$  - profil pasa,

$u_k(p) \in \mathbb{R}^m$  - wektor wejściowy,

$A, B, B_0, C, D, D_0$  - macierze o odpowiednich rozmiarach.

Warunki brzegowe i początkowe systemu powtarzalnego dane są w następującej postaci:

$$x_{k+1}(0) = d_{k+1} \quad (3)$$

$$y_0(p) = f(p) \quad (4)$$

gdzie:  $d_{k+1}$  jest wektorem stałych wartości,  $f(p) \in \mathbb{R}^l$ .

### 3. Problem identyfikacji

Dla danych  $\alpha$  pomiarów sygnałów wejściowych  $u_{k+1}(p)$  i sygnałów wyjściowych  $y_k(p)$  i  $y_{k+1}(p)$  wygenerowanych z systemu powtarzalnego (1) - (2) wyznaczyć rząd systemu i macierze  $A, B, B_0, C, D, D_0$  z dokładnością do transformacji podobieństwa.

Ważną rolę w procesie identyfikacji metodami podprzestrzeni odgrywają blokowe macierze Hankela [4]. Blokowa macierz Hankela dla sygnałów wejściowych  $U_{0|2i-1}$  ma postać:

$$U_{0|2i-1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} u_{k+1}(0) & \dots & u_{k+1}(j-1) \\ y_k(0) & \dots & y_k(j-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{k+1}(i-1) & \dots & u_{k+1}(i+j-2) \\ y_k(i-1) & \dots & y_k(i+j-2) \\ \hline u_{k+1}(i) & \dots & u_{k+1}(i+j-1) \\ y_k(i) & \dots & y_k(i+j-1) \\ u_{k+1}(j+1) & \dots & u_{k+1}(i+j) \\ y_k(i+1) & \dots & y_k(i+j) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{k+1}(2i-1) & \dots & u_{k+1}(2i+j-1) \\ y_k(2i-1) & \dots & y_k(2i+j-2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} U_{0|i-1} \\ U_{i|2i-1} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} U_p \\ U_f \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$U_{0|2i-1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} u_{k+1}(0) & \dots & u_{k+1}(j-1) \\ y_k(0) & \dots & y_k(j-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{k+1}(i-1) & \dots & u_{k+1}(i+j-2) \\ y_k(i-1) & \dots & y_k(i+j-2) \\ \hline u_{k+1}(i) & \dots & u_{k+1}(i+j-1) \\ y_k(i) & \dots & y_k(i+j-1) \\ u_{k+1}(j+1) & \dots & u_{k+1}(i+j) \\ y_k(i+1) & \dots & y_k(i+j) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{k+1}(2i-1) & \dots & u_{k+1}(2i+j-1) \\ y_k(2i-1) & \dots & y_k(2i+j-2) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} U_{0|i} \\ U_{i+1|2i-1} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} U_p^+ \\ U_f^- \end{bmatrix} \quad (8)$$

Blokową macierz Hankela sygnałów wyjściowych  $Y_{0|2i-1}$  definiuje się następująco:

$$Y_{0|2i-1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} y_{k+1}(0) & \dots & y_{k+1}(j-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{k+1}(i-1) & \dots & y_{k+1}(i+j-2) \\ \hline y_{k+1}(i) & \dots & y_{k+1}(i+j-1) \\ y_{k+1}(i+1) & \dots & y_{k+1}(i+j) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{k+1}(2i-1) & \dots & y_{k+1}(2i+j-1) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} Y_{0|i-1} \\ Y_{i|2i-1} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} Y_p \\ Y_f \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$Y_{0|2i-1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} y_{k+1}(0) & \dots & y_{k+1}(j-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{k+1}(i-1) & \dots & y_{k+1}(i+j-2) \\ y_{k+1}(i) & \dots & y_{k+1}(i+j-1) \\ \hline y_{k+1}(i+1) & \dots & y_{k+1}(i+j) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{k+1}(2i-1) & \dots & y_{k+1}(2i+j-1) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} Y_{0|i} \\ Y_{i+1|2i-1} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} Y_p^+ \\ Y_f^- \end{bmatrix} \quad (12)$$

Minimalna liczba wierszy macierzy Hankela powinna być większa niż rząd systemu. Macierze blokowe Hankela  $W_p$  i  $W_p^+$  zawierające macierze  $Y_p, U_p$  i  $Y_p^+, U_p^+$  mają postaci:

$$W_{0|i-1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} U_{0|i-1} \\ Y_{0|i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_p \\ Y_p \end{bmatrix} = W_p \quad (13)$$

$$W_p^+ = \begin{bmatrix} U_p^+ \\ Y_p^+ \end{bmatrix} \quad (14)$$

Macierz sekwencji stanów  $X_i$  definiuje się jako:

$$X_i \stackrel{\text{def}}{=} [x_{k+1}(i) \dots x_{k+1}(i+j-1)] \quad (15)$$

Ważną rolę w identyfikacji metodami podprzestrzeni odgrywają także: rozszerzona macierz obserwowalności, odwrotna rozszerzona macierz sterowalności i macierz trójkątna dolna Toeplitza [5]. Rozszerzoną macierz obserwowalności  $\Gamma_i$  i odwrotną rozszerzoną macierz sterowania  $\Delta_i$  definiuje się następująco:

$$\Gamma_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\Delta_i \stackrel{\text{def}}{=} [A^{i-1}[B \ B_0] \dots A[B \ B_0][B \ B_0]] \quad (17)$$

Zakłada się także, że para  $\{A, C\}$  jest obserwowalna, a para  $\{A, [B \ B_0]\}$  jest sterowalna. Macierz trójkątną dolną Toeplitza  $H_i$  definiuje się jako:

$$H_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} [D \ D_0] & 0 & \dots & 0 \\ C[B \ B_0] & [D \ D_0] & \dots & 0 \\ CA[B \ B_0] & C[B \ B_0] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{i-2}[B \ B_0] & CA^{i-3}[B \ B_0] & \dots & [D \ D_0] \end{bmatrix} \quad (18)$$

Model opisujący liniowy proces, repetycyjny można zapisać za pomocą następujących zależności macierzowych:

$$Y_p = \Gamma_i X_p + H_i U_p, \quad (19)$$

$$Y_f = \Gamma_i X_f + H_i U_f, \quad (20)$$

$$X_f = A^i X_p + \Delta_i U_p, \quad (21)$$

#### 4. Identyfikacja procesu deterministycznego

Sekwencja stanów  $X_i$  i rozszerzona macierz obserwowalności  $\Gamma_i$  umożliwiają wyznaczenie macierzy systemu nieznanego procesu powtarzalnego [6].

Algorytmy 1 i 2 wykorzystują rozkład macierzy według wartości szczególnych  $W_1 O_i W_2$  w celu obliczenia rzędu procesu (1)-(2)

$$W_1 O_i W_2 = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^T \\ Y_2^T \end{bmatrix} \quad (22)$$

gdzie  $W_1 \in R^{li \times li}$ ,  $W_2 \in R^{j \times j}$  są macierzami wagowymi zdefiniowanymi przez użytkownika.

W celu wyznaczenia  $O_i$  wykonuje się rzutowanie ukośne przestrzeni wierszowej macierzy  $Y_f$  wzdłuż przestrzeni wierszowej macierzy  $W_p$  na przestrzeń wierszową macierzy  $U_f$ .

$$\begin{aligned} O_i &= Y_f /_{U_f} W_p \\ O_{i-1} &= Y_f^- /_{U_f} W_p^+ \end{aligned} \quad (23)$$

Rząd procesu powtarzalnego jest równy liczbie niezerowych wartości szczególnych w macierzy  $S_1$ . Rozszerzone macierze obserwowalności  $\Gamma_i$  i  $\Gamma_{i-1}$  są obliczane z następujących zależności:

$$\Gamma_i = W_1^{-1} U_1 S_1^{1/2} T, \quad \Gamma_{i-1} = \Gamma_i^* \quad (24)$$

gdzie  $T$  jest opcjonalną nieosobliwą macierzą transformacji podobieństwa, a  $\Gamma_i^*$  oznacza macierz  $\Gamma_i$  bez ostatnich  $l$  wierszy.

W Algorytmie 1 sekwencje stanów  $X_i$  i  $X_{i+1}$  wyznacza się z następujących równań:

$$X_i = \Gamma_i^\dagger O_i, \quad X_{i+1} = \Gamma_{i-1}^\dagger O_{i-1} \quad (25)$$

gdzie symbol  $^\dagger$  oznacza macierz pseudoodwrotną Moore'a-Penrose'a.

Macierze systemu  $A, B, B_0, C, D, D_0$  obliczą się z następującego równania:

$$\begin{bmatrix} A & [B \ B_0] \\ C & [D \ D_0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ U_{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{i+1} \\ Y_{ii} \end{bmatrix} \quad (26)$$

#### 5. Symulacja

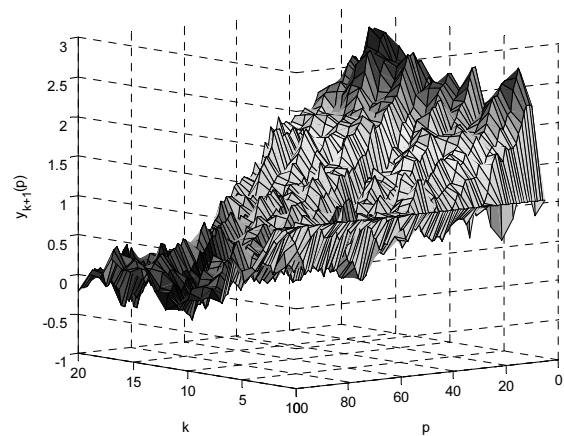
Nowe podejście zilustrowano na przykładzie dyskretnego liniowego systemu powtarzalnego czwartego rzędu określonego przez następujące macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1.5164 & -0.7549 & 0.1245 & -0.0008 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} -0.57138 \\ -0.14177 \\ -0.45273 \\ -0.25848 \end{bmatrix} \quad C = [0.0483 \quad 0.0729 \quad -0.0058 \quad -0.0006]$$

$$D = [0] \quad D_0 = [0.2]$$

Do identyfikacji wybrano dane z dwóch kolejnych pasów i zastosowano Algorytm 1. Przyjęto następujący warunek brzegowy  $y_0(p)=1$  dla  $p=1, \dots, 100$  oraz warunek początkowy  $x_{k+1}(0)$ ,  $k=1, \dots, 20$  zdefiniowany jako wartość pseudolosowa o rozkładzie równomiernym na przedziale  $[0, 2.5]$ . Sygnał wejściowy liniowego systemu powtarzalnego jest sekwencją sygnałów pseudolosowych o rozkładzie równomiernym na przedziale  $[0, 1]$ . Na rys. 2 przedstawiono odpowiedź zidentyfikowanego systemu powtarzalnego na zadany sygnał wejściowy  $u_{k+1}(p)$ .



Rys. 2. Odpowiedź zidentyfikowanego systemu powtarzalnego na zadany sygnał wejściowy  $u_{k+1}(p)$

Fig. 2. LRP response to the input  $u_{k+1}(p)$ .

#### 6. Wnioski

Zaproponowany algorytm identyfikacji systemów powtarzalnych opiera się na technikach identyfikacji metodami podprzestrzeni. Macierze nieznanego systemu i rząd systemu powtarzalnego są obliczane w oparciu o sekwencję sygnałów wejściowych  $u_{k+1}(p)$  i wyjściowych  $y_{k+1}(p)$  z bieżącego pasa i sekwencję sygnałów wyjściowych  $y_k(p)$  z poprzedniego pasa. Procedura identyfikacji może być powtarzana dla kolejnych pasów. Proponowane podejście może być użyteczne nie tylko dla stacjonarnych liniowych procesów powtarzalnych, ale także dla procesów z wolno ewoluującą dynamiką lub procesów, których dynamika zmienia się skokowo z pasa na pas.

#### 7. Literatura

- [1] E. Rogers, K. Galkowski, D. H. Owens: Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes, Springer, 2007.
- [2] T. Katayama: Subspace methods for system identification, Springer, 2008.
- [3] A. Chiuso, G. Picci, Some algorithmic aspects of subspace identification with inputs, Int. J. Appl. Math. Comp. Sci., 2001, Vol. 11, No. 1, 55-75, 2001.
- [4] P. Van Overschee, B. De Moor: Subspace Identification for Linear Systems: Theory, Implementation, Applications. Kluwer Academic Publishers, Belgium, 1996.
- [5] M. Brand: Subspace mappings for image sequences, MERL, Massachusetts, 2002.
- [6] B. de Moor, P. van Overschee, and W. Favoreel: Applied and Computational Control, Signals and Circuits, chapter Numerical algorithms for subspace state space system identification – an Overview, pages 247–311, Birkhauser Books, 1999.