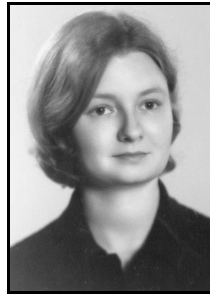


Dorota KROPIOWSKA, Leszek MIKULSKI
POLITECHNIKA KRAKOWSKA, INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI

Optymalne projektowanie łuków dwuprzegubowych o osi racjonalnej

Mgr inż. Dorota KROPIOWSKA

Asystent w Katedrze Podstaw Mechaniki Ośrodka Ciągłego Wydziału Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej. Przedmiotem zainteresowań są zagadnienia związane z optymalnym kształtowaniem konstrukcji inżynierskich w kategoriach teorii sterowania.



e-mail: dkropiowska@op.pl

Prof. dr hab. inż. Leszek MIKULSKI

Kierownik Katedry Podstaw Mechaniki Ośrodka Ciągłego Wydziału Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej. Zainteresowania badawcze i naukowe dotyczą problemów optymalnego kształtowania konstrukcji i systemów, autor 50 publikacji z tego zakresu.



e-mail: ps@pk.edu.pl

Streszczenie

W pracy rozważono problem optymalnego kształtowania racjonalnej osi łuków dwuprzegubowych. Zadanie dotyczy poszukiwania optymalnego kształtu osi łuku oraz optymalnej wysokości przekroju poprzecznego, zapewniającej minimum objętości konstrukcji przy równoczesnym spełnieniu warunku stanu bezmomentowego konstrukcji oraz przy ograniczeniu naprężeń normalnych. Sterowanie optymalne wyznaczono w oparciu o zasadę maksimum Pontriagina. Ostatecznie, zadanie optymalizacji sprowadzono do wielopunktowego problemu brzegowego i rozwiązano numerycznie przy wykorzystaniu programu Dircol.

Słowa kluczowe: optymalne kształtowanie, zasada maksimum, łuk dwuprzegubowy, oś racjonalna.

Optimal design of two-hinged arches of the rational centre line

Abstract

The paper presents the optimal modelling problem of the rational centre line of two-hinged arches (Fig. 1). Design of a statically indeterminate arch of the momentless centre line is an innovative element of the work. The problem consists in finding the optimal shape of the arch centre line and the optimal height of the cross-section ensuring the minimal arch volume at the simultaneous satisfying of the construction momentless state condition and the limitation of normal stresses. The optimisation problem formal structure consists of the state equations, the boundary conditions and the limiting conditions. The optimal control was determined on the basis of the Pontryagin's Principle (Subsection 2.2). Finally the optimisation problems were reduced to the multipoint boundary-value problem and solved numerically by using the Dircol software [3]. The numerical results for the optimisation task with one control function (the arch curvature), without limitations of the arch length (Subsection 3.1) and with the set arch length (Subsection 3.2) were obtained. The optimisation problem with introduced the second control function (the cross-section height) was also considered (Section 4). The optimal course of the rational centre line of the arch of the length $s_{opt}=20,70$ (Fig. 2, 3, 4) was obtained regarding minimisation of the volume. The received results (Fig. 5, Tab.1) show the possibility of obtaining the momentless state in the case of statically indeterminate systems for different arch lengths greater from the optimal one $s > s_{opt}$.

Keywords: optimal design, maximum principle, two-hinged arch, rational centre line.

1. Wprowadzenie

Problematyka doboru osi racjonalnej łuku – czyli osi ukształtowanej w sposób gwarantujący znikanie momentów zginających w każdym przekroju łuku – została zapoczątkowana przeszło 150 lat temu przez Villarcean'a. W literaturze przedmiotu [1, 2] zakłada się, że wyznaczenie osi bezmomentowej łuku obciążonego statycznie obciążeniem pionowym ciągłym, jest możliwe jedynie dla konstrukcji statycznie wyznaczalnych, w przypadku których możemy pominąć wpływ sił podłużnych na odkształcenia. Dla łuków dwuprzegubowych (statycznie niewyznaczalnych) wpływ

sił podłużnych musi zostać uwzględniony, gdyż siły te powodują skrócenie osi łuku. Jeżeli oś łuku dwuprzegubowego ukształtujemy jako pokrywającą się z odpowiednią racjonalną osią łuku trójprzegubowego, skrócenie osi łuku spowoduje jej zmianę w stosunku do osi racjonalnej, a to prowadzi do pojawienia się momentów zginających. Zaprojektowanie bezmomentowej osi łuku dwuprzegubowego jest jednak możliwe, o czym traktuje niniejszy artykuł.

Problem optymalnego kształtowania osi racjonalnej sformułowany został w oparciu o równania różniczkowe pierwszego rzędu, uwzględniające już wydłużalność osi. Zadanie dotyczy poszukiwania optymalnego kształtu osi łuku oraz optymalnej wysokości przekroju poprzecznego zapewniającej minimum objętości konstrukcji przy równoczesnym spełnieniu warunku stanu bezmomentowego konstrukcji oraz przy ograniczeniu naprężeń normalnych. W artykule pominięto zagadnienie stateczności łuków, przyjmując założenie, że łuk jest chroniony przed możliwością wystąpienia utraty stateczności.

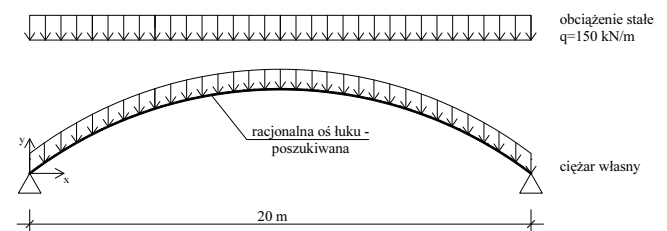
2. Optymalne kształtowanie racjonalnej osi łuku z uwagi na minimalizację objętości

Analizie poddano łuk żelbetowy (moduł sprężystości betonu $E_c = 30,0$ GPa, ciężar właściwy $\gamma = 24,0$ kN/m³) o rozpiętości $l = 20,0$ m, obciążony ciężarem własnym oraz obciążeniem ciągłym o intensywności $q = 150,0$ kN/m (rys. 1). Dla rozważanego zadania przekrój pręta jest stały na całej długości, prostokątny, o szerokości $b = 0,4$ m, wysokości $h = 0,7$ m. Pole przekroju poprzecznego jest równe $A = 0,28$ m².

2.1. Sformułowanie zadania optymalizacji

W zadaniu optymalizacji poszukiwana jest taka zmienna decyzyjna $U_i(x)$, będąca krzywizną łuku κ , która przy spełnieniu warunków ograniczających minimalizuje funkcjonal, opisujący objętość betonu łuku:

$$J(y(x), U(x), x) = \int_0^l \frac{h \cdot b}{\cos \theta} dx \quad (1)$$



Rys. 1. Schemat obciążenia i podparcia łuku
Fig. 1. Scheme of arch load and support

Równania stanu

Rozważany łuk może zostać opisany przez układ równań różniczkowych pierwszego rzędu postaci $y' = f(y(x), U(x), x)$, zgodnie ze wzorem nr (2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dx} = -\frac{Q \cdot U_1}{\cos \theta} + q \cdot \sin \theta + \gamma \cdot A \cdot \tan \theta \\ \frac{dQ}{dx} = \frac{N \cdot U_1}{\cos \theta} - q \cdot \cos \theta - \gamma \cdot A \\ \frac{dM}{dx} = -(Q \cdot \cos \varphi + N \cdot \sin \varphi) \cdot \frac{(1 + \varepsilon_0)}{\cos \theta} \\ \frac{du}{dx} = (-w \cdot U_1 + (1 + \varepsilon_0) \cdot \cos \varphi - 1) \cdot \frac{1}{\cos \theta} \\ \frac{dw}{dx} = (u \cdot U_1 - (1 + \varepsilon_0) \cdot \sin \varphi) \cdot \frac{1}{\cos \theta} \\ \frac{d\varphi}{dx} = \left(-\frac{M}{E \cdot J} - \varepsilon_0 \cdot U_1 \right) \cdot \frac{1}{\cos \theta} \\ \frac{dy}{dx} = \tan \theta \\ \frac{d\theta}{dx} = \frac{U_1}{\cos \theta} \\ \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos \theta} \\ \frac{dV}{dx} = \frac{A}{\cos \theta} \end{array} \right. \quad (2)$$

Oznaczenie w powyższym wzorze przyjęto następująco:

N – siła podłużna,
 Q – siła poprzeczna,
 M – moment zginający,
 u – przemieszczenie styczne do osi łuku,
 w – przemieszczenie prostopadłe do osi łuku,
 φ – przemieszczenie kątowe,
 y – współrzędna osi łuku,
 θ – kąt nachylenia osi łuku do osi x ,
 s – zmienna mierzona wzdłuż osi łuku,
 V – objętość betonu łuku.

Równania opisane wzorem nr (2) uwzględniają wydłużalność osi łuku, gdzie:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{E \cdot A} \cdot (N \cdot \cos \varphi - Q \cdot \sin \varphi + M \cdot U_1) \quad (3)$$

Warunki brzegowe

Rozważany łuk oparty jest na dwóch podporach przegubowych; więzom tym odpowiadają następujące warunki brzegowe:

$$\text{Dla } x = 0: M(0) = 0, u(0) = 0, w(0) = 0, y(0) = 0, s(0) = 0 \quad (4)$$

$$\text{Dla } x = l: M(l) = 0, u(l) = 0, w(l) = 0, y(l) = 0$$

Na strukturę formalną rozważanych zadań optymalizacji składają się, poza równaniami stanu i warunkami brzegowymi, warunki ograniczające.

Warunki ograniczające

Projektowanie osi racjonalnej (bezmomentowej) wymaga wprowadzenia do problemu optymalizacji ograniczenia równościowego, wynikającego z konieczności zerowania się momentów zginających w każdym przekroju łuku. Warunek ten może zostać zapisany w postaci:

$$h_1 = M = 0 \quad (5)$$

Uwzględniono również warunek wytrzymałościowy, związany z ograniczeniem naprężeń normalnych, zapisany w postaci nierównościowego warunku ograniczającego:

$$g_1 = f_{cd} - \sigma_x \geq 0, \quad \sigma_x = \frac{|N|}{A} \quad (\text{łuk ściskany}) \quad (6)$$

gdzie: f_{cd} – wytrzymałość obliczeniowa w konstrukcjach żelbetowych na ściskanie, $f_{cd} = 13,3 \text{ MPa}$

Założono, że łuk jest chroniony przed utratą stateczności, więc nie wprowadzono warunków ograniczających związanych ze statecznością układu.

Dodatkowo rozważono również ograniczenia długości osi łuku, odpowiednio:

Dla zadania nr 1: długość łuku dowolna, brak ograniczeń

Dla zadania nr 2: długość łuku $s = 25,0 \text{ m}$

Dla zadania nr 3: długość łuku $s = 50,0 \text{ m}$

2.2. Rozwiązanie optymalne

Dla zadanych funkcji celu (1) i ograniczeń (5), (6) można zdefiniować funkcję Hamiltonna w postaci:

$$H = \sum_{i=0}^{10} \lambda_i f_i + \mu_1 g_1 \quad (7)$$

gdzie: λ_i, μ_1 – mnożniki Lagrange'a

Strowanie optymalne zgodnie z zasadą maksimum Pontriagina można wyznaczyć rozwiązując układy równań:

$$y'_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \quad \lambda'_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial U_1} = 0 \quad (8)$$

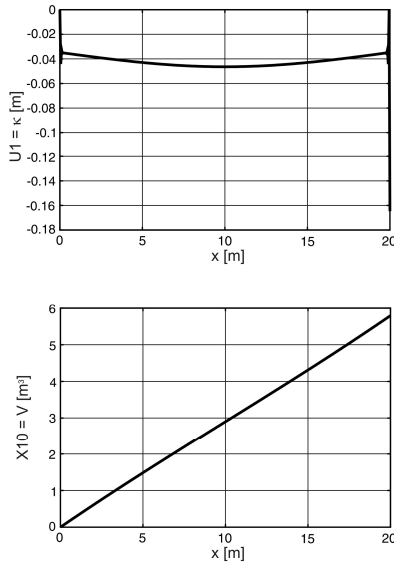
przy uwzględnieniu warunku (5) oraz przy warunkach brzegowych dla zmiennych stanu (4) i przy warunkach brzegowych dla zmiennych sprzężonych (9) wynikających z warunków transwersalności:

$$\text{Dla } x = 0: \lambda_1(0) = 0, \lambda_2(0) = 0, \lambda_6(0) = 0, \lambda_8(0) = 0 \quad (9)$$

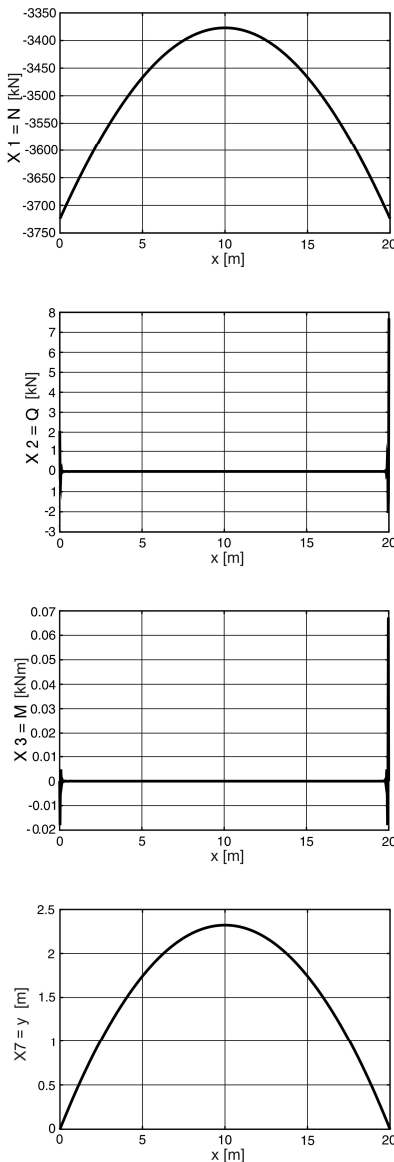
$$\text{Dla } x = l: \lambda_1(l) = 0, \lambda_2(l) = 0, \lambda_6(l) = 0, \lambda_8(l) = 0$$

3.1. Wyniki numeryczne – zadanie bez ograniczeń długości łuku

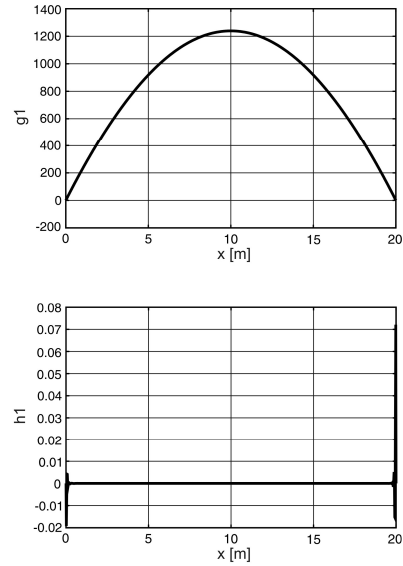
Zagadnienie optymalnego kształtowania osi racjonalnej łuku zostało sprowadzone do wielopunktowego problemu brzegowego (WPPB) i rozwiązane numerycznie przy wykorzystaniu programu Dircol [3]. W wyniku optymalizacji uzyskano optymalny, z uwagi na minimalizację objętości, rozkład zmiennej decyzyjnej $U_1(x)$, będącej krzywizną łuku κ (rys. 2), czemu odpowiada optymalny kształt osi łuku y przedstawiony na Rys. 3. Wartość współrzędnej osi łuku y , w połowie rozpiętości wynosi $y(l/2) = 2,32 \text{ m}$, natomiast optymalna długość racjonalnego łuku równa jest $s = 20,70 \text{ m}$. Na całej długości łuku spełnione jest ograniczenie (5), które jest odpowiedzialne za zerowanie się momentów zginających, a co się z tym wiąże również sił poprzecznych w każdym przekroju łuku. Wykresy sił przekrojowych zostały przedstawione na rys. 3. Ograniczenie naprężeń normalnych, wyrażone przez funkcje g_1 jest aktywne punktowo, w punktach podparcia łuku. Dla zadania nr 1 wartość funkcji celu (1) wynosi $J = 5,796$.



Rys. 2. Zmienna decyzyjna $U_1(x)$ - krzywizna łuku κ . Objętość betonu łuku V
 Fig. 2. Control variable $U_1(x)$ – the arch curvature. Arch volume V



Rys. 3. Siły przekrojowe N, Q, M . Optymalny kształt osi łuku y
 Fig. 3. Internal forces N, Q, M . Optimal shape of the arch centre line y

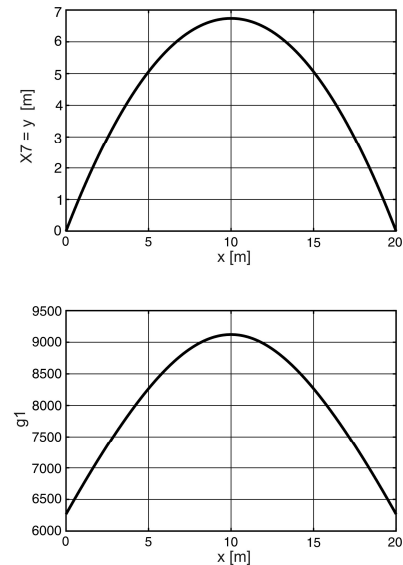


Rys. 4. Ograniczenie nierównościowe g_1 (ograniczenie naprężeń normalnych)
 Ograniczenie równościowe h_1 (warunek zerowania się momentów zginających)
 Fig. 4. Inequality constraint g_1 (limitation of the normal stresses)
 Equality constraint h_1 (condition of zero bending moments)

3.2. Wyniki numeryczne – optymalizacja przy zadanej długości łuku

Kolejne zadanie optymalizacji łuku dwuprzegubowego, dotyczyło wyznaczenia kształtu osi łuku o zadanej z góry długości, zapewniającego znikanie momentów zginających w każdym przekroju poprzecznym łuku, przy równoczesnym spełnieniu warunku ograniczenia naprężeń normalnych. Celem wprowadzenia do problemu optymalnego kształtowania ograniczenia na długość łuku było sprawdzenie, czy można uzyskać racjonalny przebieg osi łuku, przy tych samych danych wyjściowych, ale dla innej niż optymalna (uzyskana z zadania nr 1) długość osi $s = 20,70$ m.

Wyniki przedstawiające racjonalny kształt osi łuku y dla długości łuku $s = 25$ m oraz odpowiadający mu wykres ograniczenia g_1 przedstawia rys. 5.



Rys. 5. Racjonalny kształt osi łuku y dla długości $s = 25$ m
 Ograniczenie nierównościowe g_1
 Fig. 5. Rational shape of the arch centre line y for length $s = 25$ m
 Inequality constraint g_1

Następujące wnioski można sformułować po rozwiązaniu zadań optymalizacji łuku dwuprzegubowego o zadanej długości:

- Zaprojektowanie racjonalnego kształtu osi łuku dwuprzegubowego o rozpiętości 20 m, jest możliwe dla różnych długości łuku
- Rozwiązanie problemu poszukiwania bezmomentowej osi o zadanej długości można uzyskać jedynie dla długości łuku większej od optymalnej $s > s_{opt}$, gdzie $s_{opt} = 20,70$ m. Przyjęcie długości łuku mniejszej $s < s_{opt}$ nie pozwala uzyskać spełnienia warunków ograniczających
- Ograniczenie $g_1 = f_{cd} - \sigma_x \geq 0$ pozostaje nieaktywne w przypadku przyjęcia długości łuku większej od optymalnej $s > s_{opt}$ (zadanie nr 2, 3). Na przebieg zmiennej sterowania wpływa jedynie ograniczenie $h_1 = M = 0$
- Optymalne rozwiązania spełniają warunki konieczne optymalizacji. Porównanie wyników obliczeń uzyskanych dla zadań 1 - 3 zestawiono w tabeli nr 1.

Tab. 1. Porównanie wyników
Tab. 1. Comparison of the results

Nr zadania	Długość łuku s [m]	$y(l/2)$ [m]	Objętość V [m ³]	Ograniczenie $g_i \geq 0$	Ograniczenie $h_i = 0$
1	$s_{opt} = 20,70$	2,32	5,796	$g_i > 0$ dla $x \in (0, l)$ $g_i = 0$ dla $x=0$ i $x=l$	$h_i = 0$ dla $x \in \langle 0, l \rangle$
2	25,00	6,74	7,000	$g_i > 0$ dla $x \in \langle 0, l \rangle$	$h_i = 0$ dla $x \in \langle 0, l \rangle$
3	50,00	21,91	14,000	$g_i > 0$ dla $x \in \langle 0, l \rangle$	$h_i = 0$ dla $x \in \langle 0, l \rangle$

4. Projektowanie łuku dwuprzegubowego o osi racjonalnej i optymalnym rozkładzie wysokości przekroju poprzecznego

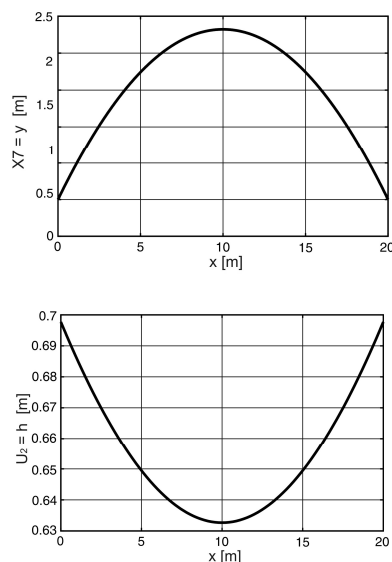
Zadanie optymalizacji zostało rozszerzone poprzez wprowadzenie drugiej zmiennej decyzyjnej $U_2 = h(x)$, będącej wysokością przekroju poprzecznego łuku:

$$0,6 \text{ m} \leq U_2 \leq 0,8 \text{ m} \quad (10)$$

Przyjęto dane geometryczne i materiałowe jak w zadaniach wcześniejszych; uwzględniono warunki ograniczające (5) i (6). Modyfikacji ulegną równania stanu oraz funkcja celu, gdyż wzory na pole przekroju A oraz moment bezwładności J przyjmą postać:

$$\begin{aligned} A &= b \cdot U_2, \\ J &= \frac{b \cdot U_2^3}{12} \end{aligned} \quad (11)$$

Zagadnienie optymalnego kształtowania osi racjonalnej łuku i optymalnego kształtowania przekroju poprzecznego z uwagi na minimalizację objętości betonu łuku zostaje sprowadzone do problemu optymalnego sterowania z jawną zależnością funkcji celu od sterowania U_2 . Optymalne rozwiązania uzyskane dla tak sformułowanego zadania zostały przedstawione na rys. 6.



Rys. 6. Optymalny kształt osi y , optymalny rozkład wysokości przekroju poprzecznego h
Fig. 6. Optimal shape of the centre line of a bar y , optimal height cross-section distribution h

Uwzględnienie drugiej zmiennej decyzyjnej $U_2 = h(x)$, przy uzyskaniu optymalnego kształtu osi łuku jak dla zadania nr 1 o długości łuku $s_{opt} = 20,70$ m, prowadzi do zmniejszenia się funkcji celu od wartości $J = 5,796$ do wartości $J = 5,425$. Uzyskanie mniejszej objętości betonu łuku, przy spełnieniu warunku znikania momentów zginających w każdym przekroju poprzecznym łuku, jest możliwe poprzez optymalne dopasowanie się kształtu wysokości przekroju poprzecznego do rozkładu siły ścisnącej N , jedynej niezerowej siły przekrojowej, odpowiedzialnej za rozkład naprężeń normalnych. Prowadzi to do zmiany rozkładu naprężeń normalnych w stosunku do zadania nr 1, które przyjmują wartości: $\sigma_x \in (13,299 \text{ MPa}, 13,300 \text{ MPa})$ i zbliżenie się optymalizowanej konstrukcji do konstrukcji równowyrzymalej.

5. Podsumowanie

Rozważany w pracy problem optymalnego kształtowania racjonalnej osi łuku z uwagi na minimalizację objętości betonu łuku został pomyślnie rozwiązany. Otrzymane wyniki świadczą o możliwości uzyskania stanu bezmomentowego w przypadku układów statycznie niewyznaczalnych dla różnych długości łuków. Korzyści płynące z optymalnego projektowania konstrukcji skłaniają do dalszych prac z tej dziedziny.

6. Literatura

- [1] Rakowski G., Solecki R.: Pręty zakrzywione. Obliczenia statyczne. Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1965.
- [2] Gajewski A., Życzkowski M.: Optymalne kształtowanie ustrojów prętowych przy warunkach stateczności.[w:] Wybrane zagadnienia stateczności konstrukcji. Ossolineum, 1987.
- [3] von Stryk O.: User's Guide for Dircol. A Direct Collocation Method for the Numerical Solution of Optimal Control Problems. Technische Universität Darmstadt 2002.
- [4] Mikulski L.: Teoria sterowania w problemach optymalizacji konstrukcji i systemów. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, s. 1-194, Kraków 2007.