

Maksym GRZYWIŃSKI, Tran Duong HIENPOLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA, KATEDRA KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH I INŻYNIERSKICH
ZACHODNIOPOMORSKI UNIWERSYTET TECHNOLOGICZNY, KATEDRA TEORII KONSTRUKCJI**Stochastyczna analiza dynamiczna wrażliwości układu belkowo-kratowego**

Dr inż. Maksym GRZYWIŃSKI

Adiunkt w Katedrze Konstrukcji Budowlanych i Inżynierskich na Wydziale Budownictwa Politechniki Częstochowskiej. Zajmuje się problematyką CAD, optymalizacją konstrukcji oraz stochastyczną analizą układów inżynierskich.



e-mail: mgrzywin@bud.pcz.czest.pl

Prof. Tran Duong HIEN

Specjalność – matematyka stosowana, mechanika komputerowa, informatyka. Od 1978 do 1995 – pracownik Instytutu Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk; habilitacja 1990 w IPPT PAN. Od 1995 – profesor Politechniki Szczecińskiej (obecnie Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny). Autor i współautor 5 książek, wśród których 2 wydane przez Wiley'a, oraz około 150 prac opublikowanych w kraju i zagranicą.



e-mail: tdhien@ps.pl

Streszczenie

W pracy przedstawiono procedury numeryczne dynamicznej analizy wrażliwości układów konstrukcyjnych. Oprócz zagadnienia różniczkowania bezpośredniego, sformułowano sprzężone zagadnienie końcowe, bazujące na pierwotnym zagadnieniu początkowym. Całość zilustrowano przykładem numerycznym, układu belkowo-kratowego, obliczonym metodą stochastycznych elementów skończonych.

Słowa kluczowe: metoda stochastycznych elementów skończonych, dynamika, wrażliwość, stochastyka.

Stochastic dynamic analysis of truss-beam system sensitivity**Abstract**

A numerical formulation for stochastic sensitivity in dynamic analysis of structural systems is presented in the paper. The stochastic finite element method, basing on the perturbation methodology, is an advanced computer technique for solving engineering problems with randomness taken into account. It allows one to analyze a wide class of static and dynamic systems with geometrical and/or material random parameters. Besides the well-known direct differentiation setting, an adjoint terminal-value system is formulated in accordance with the prescribed fundamental initial-value system. Once the original initial-value equations (15) and (16) are solved for by a step-by-step forward integration scheme over time from 0 to t and the adjoint terminal-value equations (23) and (24) are integrated backward from t to 0, the sensitivity gradients (25) are summed up. Analysis of a symmetrical portal frame with two strut trusses is given. The dynamic sensitivity of the displacements at two representative points B and C with respect to the change of the cross-sectional areas of the truss and beam members is discussed. Two complete sets of stochastic solutions are obtained. One includes the expectations and cross-covariances for the nodal displacements, while the other describes the first two probabilistic moments of their sensitivity gradients.

Keywords: stochastic finite element method, dynamics, sensitivity, stochastic.

1. Wprowadzenie

Teoria perturbacji pojawiła się w jednej z najstarszych dziedzin matematyki stosowanej. Jest dzisiaj częścią nauki o ogromnym znaczeniu teoretycznym i praktycznym. Dokładnie zaczęła się ona w latach 1926/27 wraz z pracami Rayleigha i Schrodingera. Obecnie metody perturbacyjne mają ogromną bibliografię liczoną w tysiącach pozycji, np. [1-4].

Metoda stochastycznych elementów skończonych, bazujących na metodologii perturbacyjnej jest zawansowaną techniką komputerową do rozwiązywania zadań uwzględniających aspekty losowe. Umożliwia ona analizowanie różnych układów statycznych i dynamicznych z geometrycznymi i/lub materiałowymi parametrami losowymi. Umożliwia też analizę wrażliwości statyczną i dynamiczną.

W pracy przedstawiono procedury numeryczne dynamicznej analizy wrażliwości układów konstrukcyjnych. Oprócz zagadnienia różniczkowania bezpośredniego, sformułowano sprzężone zagadnienie końcowe, bazujące na pierwotnym zagadnieniu początkowym. W pracy poddano analizie symetryczną ramę portalową z dwoma zastrzałami kratowymi. Badano wpływ zmiany przekroju pola poprzecznego na przemieszczenie dwóch charakterystycznych węzłów. W rozwiązaniu otrzymano dwa komplety rozwiązań. Pierwszy – wyniki stochastyczne (wartość oczekiwaną i kowariancję przemieszczenia) oraz drugi – wyniki stochastyczne połączone z analizą wrażliwości, tj. dodatkowo jeszcze jak zmiana pola przekroju wpływa na zachowanie się układu.

2. Metoda perturbacyjna drugich momentów

Analizę zaczyna się zwykle od prostego problemu, który łatwo rozwiązać, tzw. problemu bez perturbacji i wykorzystuje się go jako przybliżenie rozwiązania bardziej skomplikowanego problemu, który różni się od podstawowego tylko istnieniem pewnych małych składników. Rozwiązania poszukuje się w postaci kolejnych przybliżeń rozwiązania podstawowego, przedstawionego najczęściej w postaci szeregu potęgowego pewnego małego parametru.

Rozpatrzmy wektor $\mathbf{x} = x_i(\mathbf{a})$, $i = 1, 2, \dots, \hat{i}$, gdzie $\mathbf{a} = a_r$, $r = 1, 2, \dots, \hat{r}$, jest wektorem parametrów losowych, zdefiniowanym przez pierwsze dwa centralne momenty probabilistyczne – wartości oczekiwane $\bar{\mathbf{a}} = \bar{a}_r$ i kowariancję $Cov(a_r, a_s)$. Rozwińmy $x_i(a_r)$ w szereg Taylora wokół \bar{a}_r do drugiego rzędu

$$x_i(a_r) = x_i(\bar{a}_r) + \frac{\partial x_i}{\partial a_r}(a_r - \bar{a}_r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_r \partial a_s}(a_r - \bar{a}_r)(a_s - \bar{a}_s), \quad (1)$$

Biorąc pod uwagę, że określone w punktach \bar{a}_r zerowe, pierwsze i drugie pochodne są wielkościami deterministycznymi, i stosując przekształcenia liniowe w wyznaczeniu pierwszych dwóch momentów zmiennych losowych x_i otrzymamy,

$$\begin{aligned} E[x_i] &= x_i(\bar{a}_r) + \frac{\partial x_i}{\partial a_r} E[(a_r - \bar{a}_r)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_r \partial a_s} E[(a_r - \bar{a}_r)(a_s - \bar{a}_s)] \\ &= x_i(\bar{a}_r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_r \partial a_s} Cov(a_r, a_s) \\ &= x_i(\bar{a}_r) + \frac{1}{2} x_i^{(2)}(\bar{a}_r) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_i, x_j) &= E[(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)] \\ &= \frac{\partial x_i \partial x_j}{\partial a_r \partial a_s} E[(a_r - \bar{a}_r)(a_s - \bar{a}_s)] + \dots \quad (3) \\ &\approx \frac{\partial x_i \partial x_j}{\partial a_r \partial a_s} \text{Cov}(a_r, a_s) \\ i, j &= 1, 2, \dots, \hat{i}; r, s = 1, 2, \dots, \hat{r} \end{aligned}$$

Opierając się na pojęciu perturbacyjnej analizy drugich momentów centralnych, w ostatniej dekadzie XX wieku sformułowane zostały stochastyczne wersje kilku ważnych metod komputerowych. Wymienić można np. metodę stochastycznych elementów skończonych [5] i metodę stochastycznych elementów brzegowych.

3. Układy równań dynamiki z parametrami losowymi

Dany jest układ równań różniczkowych zwyczajnych o \hat{i} stopniach swobody

$$L_{ij}(a_r)[x_j] = Q_i(a_r; \tau) \quad i, j = 1, 2, \dots, \hat{i}; r = 1, 2, \dots, \hat{r}, \quad (4)$$

gdzie L_{ij} jest liniowym operatorem różniczkowym

$$L_{ij}(a_r) = M_{ij}(a_r) \frac{d^2}{d\tau^2} + C_{ij}(a_r) \frac{d}{d\tau} + K_{ij}(a_r), \quad (5)$$

wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi.

Wektor sygnałów wejściowych Q_i i macierze M_{ij}, C_{ij}, K_{ij} są funkcjami wektora parametrów losowych $\mathbf{a} = a_r$ zdefiniowanych przez wektor wartości oczekiwanych $\bar{\mathbf{a}} = \bar{a}_r$ oraz macierz kowariancji $\text{Cov}(a_r, a_s)$. Funkcje $Q_i(a_r; \tau), M_{ij}(a_r), C_{ij}(a_r), K_{ij}(a_r)$ są dwukrotnie różniczkowalne w punktach \bar{a}_r , przy czym dla $a_r = \bar{a}_r$ macierze $M_{ij}(\bar{a}_r), C_{ij}(\bar{a}_r), K_{ij}(\bar{a}_r)$ są symetryczne i dodatnio określone. Składowe wektora $\mathbf{x} = x_i$ są więc niejawnymi funkcjami parametrów losowych a_r i argumentu τ , $x_i = x_i(a_r; \tau)$. Celem analizy jest określenie pierwszych dwóch momentów zmiennych losowych $x_i = x_i(a_r; \tau)$, tzn. $E[x_i]$ i $\text{Cov}(x_i, x_j)$.

Dokonując perturbacji funkcji \bar{a}_r do drugiego rzędu, z małym parametrem ε , otrzymamy wyrażenie zapisane w symbolicznej formie jako

$$(*) = (*)^0 + (*)^r \varepsilon \Delta a_r + \frac{1}{2} (*)^{rs} \varepsilon^2 \Delta a_r \Delta a_s \quad (6)$$

gdzie

$$\varepsilon \Delta a_r = \delta a_r = \varepsilon (a_r - \bar{a}_r) \quad (7)$$

jest pierwszą wariacją zmiennej a_r wokół \bar{a}_r , $r \in [1, \hat{r}]$, zaś

$$\varepsilon^2 \Delta a_r \Delta a_s = \delta a_r \delta a_s = \varepsilon^2 (a_r - \bar{a}_r)(a_s - \bar{a}_s) \quad (8)$$

jest drugą (mieszaną) wariacją a_r, a_s w otoczeniu \bar{a}_r, \bar{a}_s . Symbole oznaczają $(*)^0, (*)^r, (*)^{rs}$ odpowiednio wartości zerowych, pierwszych i drugich (mieszanych) pochodnych cząstkowych określonych względem \bar{a}_r, \bar{a}_s , tj.

$$\begin{aligned} (*)^r &= \frac{\partial (*)}{\partial a_r} \\ (*)^{rs} &= \frac{\partial^2 (*)}{\partial a_r \partial a_s} \end{aligned} \quad (9)$$

Zgodnie z koncepcją perturbacyjną postawimy (6) do (4)

$$\begin{aligned} &(M_{ij}^0 \ddot{x}_j + C_{ij}^0 \dot{x}_j + K_{ij}^0 x_j) + (M_{ij}^r \ddot{x}_j + C_{ij}^r \dot{x}_j + K_{ij}^r x_j) \varepsilon \Delta a_r \\ &\quad + (M_{ij}^{rs} \ddot{x}_j + C_{ij}^{rs} \dot{x}_j + K_{ij}^{rs} x_j) \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Delta a_r \Delta a_s \\ &= Q_j^0 + [Q_j^r - (M_{ij}^r \ddot{x}_j + C_{ij}^r \dot{x}_j + K_{ij}^r x_j) \varepsilon \Delta a_r \\ &\quad + [Q_j^{rs} - (M_{ij}^{rs} \ddot{x}_j + C_{ij}^{rs} \dot{x}_j + K_{ij}^{rs} x_j) - (M_{ij}^r \ddot{x}_j + C_{ij}^r \dot{x}_j + K_{ij}^r x_j) \\ &\quad - (M_{ij}^{rs} \ddot{x}_j + C_{ij}^{rs} \dot{x}_j + K_{ij}^{rs} x_j) \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Delta a_r \Delta a_s] \end{aligned} \quad (10)$$

Uwzględniając dowolność wariacji δa_r i porównując члены tego samego rzędu względem $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$ po obu stronach (10), otrzymamy hierarchiczne układy równań różniczkowych perturbacyjnej metody drugich momentów w postaci:

- ε^0 - człon – jeden układ zerowego rzędu równań dla $x_i^0(\bar{a}_r; \tau)$

$$M_{ij}^0 \ddot{x}_j + C_{ij}^0 \dot{x}_j + K_{ij}^0 x_j = Q_i^0 \quad (11)$$

- ε^1 - człon – \hat{r} układów pierwszego rzędu równań dla $x_i^r(\bar{a}_r; \tau)$

$$M_{ij}^0 \ddot{x}_j + C_{ij}^0 \dot{x}_j + K_{ij}^0 x_j = Q_i^r - (M_{ij}^r \ddot{x}_j + C_{ij}^r \dot{x}_j + K_{ij}^r x_j) \quad (12)$$

- ε^2 - człon – jeden układ drugiego rzędu równań dla $x_i^{(2)}(\bar{a}_r; \tau)$

$$\begin{aligned} M_{ij}^0 \ddot{x}_j + C_{ij}^0 \dot{x}_j + K_{ij}^0 x_j = Q_i^{(2)} - (M_{ij}^{(2)} \ddot{x}_j + C_{ij}^{(2)} \dot{x}_j + K_{ij}^{(2)} x_j) \\ - 2(M_{ij}^r \ddot{x}_j + C_{ij}^r \dot{x}_j + K_{ij}^r x_j) \text{Cov}(a_r, a_s) \end{aligned} \quad (13)$$

4. Sformułowanie zagadnienia stochastycznej wrażliwości

Niech będzie dana funkcja celu

$$G(h^d, a_\rho, t) = \int_0^t G[q_\alpha(h^d, a_\rho, t), h^d] \delta(t - \tau) d\tau \quad \begin{matrix} \alpha = 1, \dots, N \\ d = 1, \dots, D \\ \rho = 1, \dots, \tilde{N} \end{matrix} \quad (14)$$

gdzie górna granica całki t jest dowolną chwilą czasową, $\delta(t - \tau)$ deltą Diraca, G - funkcją zdefiniowaną jawnie względem jej argumentów, h^d - wektor zmiennych projektowych, ρ - wektor zmiennych losowych, q_α - wektor uogólnionych przemieszczeń węzłowych, występujących w równaniach ruchu w kontekście metody elementów skończonych jako

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}(h^d, a_\rho) \ddot{q}_\beta(h^d, a_\rho, \tau) + C_{\alpha\beta}(h^d, a_\rho) \dot{q}_\beta(h^d, a_\rho, \tau) \\ + K_{\alpha\beta}(h^d, a_\rho) q_\beta(h^d, a_\rho, \tau) = Q_\alpha(h^d, a_\rho, \tau) \end{aligned} \quad (15)$$

z warunkami początkowymi, zadanymi dla chwili $\tau=0$ jako

$$q_\alpha(h^d, a_\rho, 0) = 0, \quad \dot{q}_\alpha(h^d, a_\rho, 0) = 0 \quad (16)$$

Należy znaleźć pochodną G względem h^d

$$G^d(t) = G^d(t) + G_{,\alpha}(\tau) q_\alpha^d(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (17)$$

Różniczkując (15) względem h^d otrzymuje się

$$M_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta^d + C_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta^d + K_{\alpha\beta}q_\beta^d = Q_\alpha^d - R_\alpha^d \quad (18)$$

$$R_\alpha^d = M_{\alpha\beta}^d\ddot{q}_\beta + C_{\alpha\beta}^d\dot{q}_\beta + K_{\alpha\beta}^dq_\beta$$

a warunki początkowe dla dq_α/dh^d w chwili $\tau=0$, wynikające z (16), zapisać można jako

$$\frac{dq_\alpha}{dh^d} = \frac{dq_\alpha^0}{dh^d}, \quad \frac{d\dot{q}_\alpha}{dh^d} = \frac{d\dot{q}_\alpha^0}{dh^d} \quad (19)$$

Niejednorodny układ (15) i (16) może być przekształcony w jednorodny stosując rozwiązanie szczególne $q_\alpha^* = q_\alpha^0 - \dot{q}_\alpha^0\tau$ i zamianę zmiennych $r_\alpha = q_\alpha - \dot{q}_\alpha^*\tau$, tzn.

$$M_{\alpha\beta}\ddot{r}_\beta - C_{\alpha\beta}\dot{r}_\beta + K_{\alpha\beta}r_\beta = Q_\alpha - R_\alpha \quad (20)$$

z jednorodnymi warunkami początkowymi

$$r_\alpha(h^d, 0) = 0, \quad \dot{r}_\alpha(h^d, 0) = 0 \quad (21)$$

Drugim podejściem jest zastosowanie metody układu sprzężonego poprzez mnożniki Lagrange'a. Układ sprzężony jest zdefiniowany przez wektor $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(h^d, a_\rho, \tau)$. Równanie (18) jest przemnożone przez λ_α , a otrzymany wynik zostaje scałkowany przez części od 0 do t . Zatem

$$\left[\lambda_\alpha M_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta^d - (\dot{\lambda}_\alpha M_{\alpha\beta} - \lambda_\alpha C_{\alpha\beta})q_\beta^d \right]_{\tau=0}^t + \int_0^t (\ddot{\lambda}_\alpha M_{\alpha\beta} - \dot{\lambda}_\alpha C_{\alpha\beta} + \lambda_\alpha K_{\alpha\beta})q_\beta^d d\tau = \int_0^t \lambda_\alpha (Q_\alpha^d - R_\alpha^d) d\tau \quad (22)$$

Dowolny dotychczas wektor sprzężony λ_α może być teraz tak dobrany, aby człony zawierające dq_α/dh^d i $d\dot{q}_\alpha/dh^d$ z obu stron (17) i (22) były przyrównane. Ponieważ $M_{\alpha\beta}, C_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ są symetryczne, otrzymujemy różniczkowe zagadnienie końcowe

$$M_{\alpha\beta}\ddot{\lambda}_\alpha + C_{\alpha\beta}\dot{\lambda}_\alpha + K_{\alpha\beta}\lambda_\alpha = \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} \quad (23)$$

i warunki końcowe dla wektora sprzężonego $\lambda_\alpha(\tau)$ w chwili $\tau=t$ jako

$$\lambda_\alpha(h^d, a_\alpha, t) = 0, \quad \dot{\lambda}_\alpha(h^d, a_\alpha, t) = 0 \quad (24)$$

Gradient wrażliwości (17) przyjmie teraz jawną postać

$$G^d(h^d, a_\rho, t) = G^d(h^d, a_\rho, t) + \int_0^t \lambda_\alpha(h^d, a_\rho, \tau) R_\alpha^d(h^d, a_\rho, \tau) d\tau \quad (25)$$

Rozwiązując początkowy problem (11-13) dla równań zerowego-, pierwszego- i drugiego-rzędu sprzężony z zagadnieniem końcowym, rozwiązanie na wartość oczekiwaną i kowariancję gradientu wrażliwości przyjmie postać

$$E[G^d(t)] = G^{0,d} + \int_0^t \left[\lambda_\alpha^0(\tau) + \frac{1}{2}\lambda_\alpha^{(2)} \right] A_\alpha^d(\tau) - \frac{1}{2}\lambda_\alpha^{(0)} F_\alpha^{d(2)}(\tau) + \frac{1}{2} \left[G^{d,\rho\sigma}(\tau) + 2\lambda_\alpha^\rho B_\alpha^{d\sigma}(\tau) + \lambda_\alpha^0 C_\alpha^{d\rho\sigma}(\tau) S_\alpha^{\rho\sigma} \right] d\tau \quad (26)$$

$$\text{COV}[G^d(t_1), G^d(t_2)] = S_G^{de}(t_1, t_2) = (G^{d,\rho}(\tau)) G^{e,\sigma}(t_2) + G^{d,\rho}(t_1) \int_0^t [\lambda_\alpha^\sigma(\tau) A_\alpha^e(\tau) + \lambda_\alpha^0(\tau) B_\alpha^{e\sigma}(\tau)] d\tau + G^{d,\rho}(t_2) \int_0^t [\lambda_\alpha^\sigma(\tau) A_\alpha^d(\tau) + \lambda_\alpha^0(\tau) B_\alpha^{d\sigma}(\tau)] d\tau + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \left\{ \lambda_\alpha^\rho(\tau) \lambda_\alpha^\sigma(\nu) A_\alpha^d(\tau) A_\alpha^e(\nu) + \lambda_\alpha^0(\tau) \lambda_\alpha^0(\nu) B_\alpha^{d\rho}(\tau) B_\alpha^{e\sigma}(\nu) + \lambda_\alpha^\rho(\tau) \lambda_\alpha^0(\nu) [A_\alpha^d(\tau) B_\alpha^{e\sigma}(\nu) + A_\alpha^e(\tau) B_\alpha^{d\sigma}(\nu)] \right\} d\tau d\nu S_\alpha^{\rho\sigma} \quad (27)$$

gdzie $S_\alpha^{\rho\sigma}$ oznacza macierz kowariancji zmiennej losowej a_ρ , pozostałe oznaczenia poniżej

$$A_\alpha^d(\tau) = Q_\alpha^{0,d}(\tau) - D_\alpha^d(\tau)$$

$$B_\alpha^{d\rho}(\tau) = Q_\alpha^{d,\rho}(\tau) - E_\alpha^{d\rho}(\tau) - H_\alpha^{d\rho}(\tau)$$

$$C_\alpha^{d\rho\sigma}(\tau) = Q_\alpha^{d,\rho\sigma}(\tau) - J_\alpha^{d\rho\sigma}(\tau) - L_\alpha^{d\rho\sigma}(\tau)$$

$$D_\alpha^d(\tau) = M_{\alpha\beta}^{0,d}\ddot{q}_\beta^0(\tau) + C_{\alpha\beta}^{0,d}\dot{q}_\beta^0(\tau) + K_{\alpha\beta}^{0,d}q_\beta^0(\tau)$$

$$E_\alpha^{d\rho}(\tau) = M_{\alpha\beta}^{0,d}\ddot{q}_\beta^\rho(\tau) + C_{\alpha\beta}^{0,d}\dot{q}_\beta^\rho(\tau) + K_{\alpha\beta}^{0,d}q_\beta^\rho(\tau) \quad (28)$$

$$F_\alpha^{d(2)}(\tau) = M_{\alpha\beta}^{0,d}\ddot{q}_\beta^{(2)}(\tau) + C_{\alpha\beta}^{0,d}\dot{q}_\beta^{(2)}(\tau) + K_{\alpha\beta}^{0,d}q_\beta^{(2)}(\tau)$$

$$H_\alpha^{d\rho}(\tau) = M_{\alpha\beta}^{d,\rho}\ddot{q}_\beta^0(\tau) + C_{\alpha\beta}^{d,\rho}\dot{q}_\beta^0(\tau) + K_{\alpha\beta}^{d,\rho}q_\beta^0(\tau)$$

$$J_\alpha^{d\rho\sigma}(\tau) = M_{\alpha\beta}^{d,\rho\sigma}\ddot{q}_\beta^\sigma(\tau) + C_{\alpha\beta}^{d,\rho\sigma}\dot{q}_\beta^\sigma(\tau) + K_{\alpha\beta}^{d,\rho\sigma}q_\beta^\sigma(\tau)$$

$$L_\alpha^{d\rho\sigma}(\tau) = M_{\alpha\beta}^{d,\rho\sigma}\ddot{q}_\beta^0(\tau) + C_{\alpha\beta}^{d,\rho\sigma}\dot{q}_\beta^0(\tau) + K_{\alpha\beta}^{d,\rho\sigma}q_\beta^0(\tau)$$

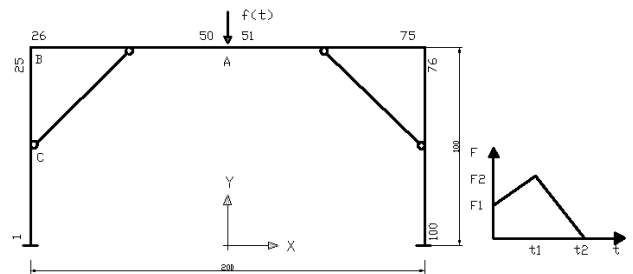
Zagadnienie początkowe (15) i (16) jest rozwiązywane krok-po-kroku do przodu od 0 do t , natomiast sprzężony układ (23) i (24) jest scałkowany w kierunku wstecznym od t do 0 i gradient wrażliwości (25) jest zsumowany.

5. Przykład numeryczny

Szukając wrażliwości funkcji celu w węźle B lub C względem zmiany pola przekroju, zakładamy, że odpowiedź funkcjonału jest w postaci funkcji celu

$$G(\tau) = \left[\frac{q_y(\tau)}{q_y^B} \right]^2 - 1 \leq 0$$

gdzie $q_y(\tau)$ jest pionowym przemieszczeniem w węźle B, natomiast $q_y^B(\tau)$ jest ograniczeniem przemieszczenia i wynosi $q_y^B(\tau) = 0,012$.



Rys. 1. Rama portalowa z dwoma prętami kratowymi
Fig. 1. Portal frame with two truss members

Pole przekroju w elementach przyjmuje wartości losowe: $a_r, r = 1, \dots, 102$. Wartość oczekiwana, funkcja korelacji oraz współczynnik wariancji wynoszą

$$E(a_r) = a_0 = 10,0$$

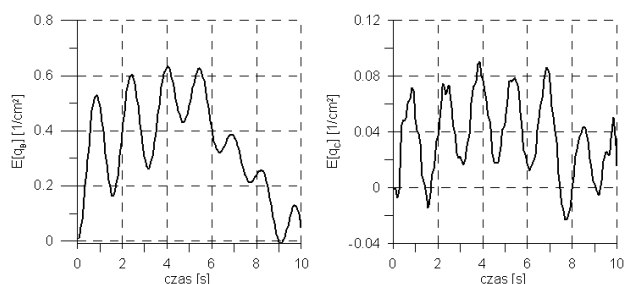
$$R(a_r, a_s) = \exp(-|x_r - x_s|/\lambda)$$

$$\lambda = 0,5$$

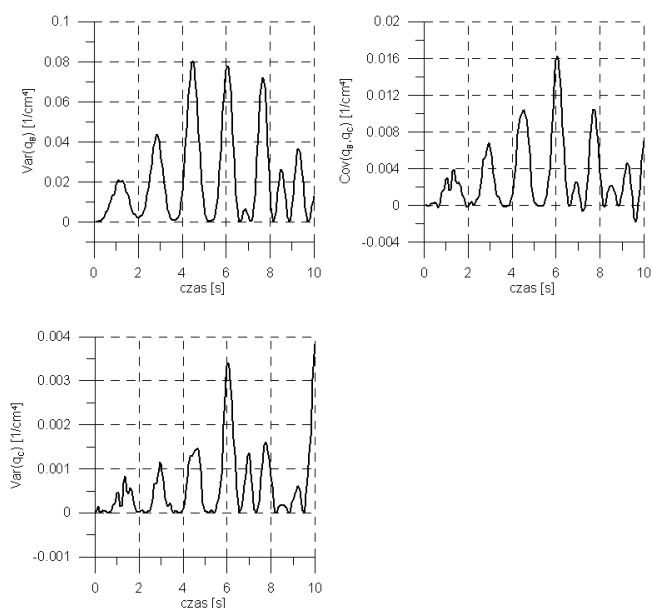
$$x_0 = 0,0, \dots, x_{102} = 1,0$$

$$\alpha = 0,05$$

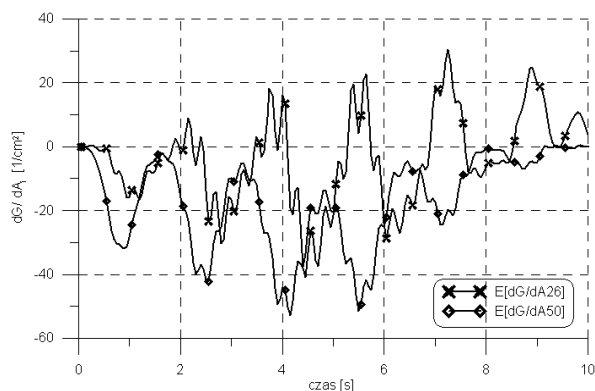
Przedział czasowy podzielono na 2000 kroków z przyrostem $\Delta t = 0,005$ s dla każdego kroku. Wartość siły $F_1 = 50$ kN i $F_2 = 100$ kN odpowiednio dla $t_1 = 5$ s i $t_2 = 10$ s. Zastosowano schemat całkowania krok-po-kroku metodą superpozycji modalnej. Liczbę postaci modalnych przyjęto 10, modalny współczynnik tłumienia wynosi 0,02. Tolerancja w trakcie iteracji wynosiła 0,00001.



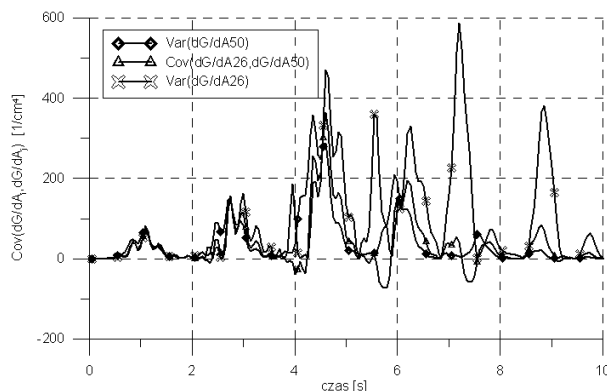
Rys. 2. Wartość oczekiwana przemieszczenia węzłów B i C
Fig. 2. Displacement expectation at nodes B and C



Rys. 3. Kowariancja przemieszczenia węzłów B i C
Fig. 3. Displacement covariance for nodes B and C



Rys. 4. Wartość oczekiwana wrażliwość funkcji celu
Fig. 4. Sensitivity expectation of the object function



Rys. 5. Kowariancja wrażliwości funkcji celu
Fig. 5. Sensitivity covariance of the objective function

Na rys. 2 i rys. 3 w funkcji czasu pokazano wartość oczekiwaną i kowariancję przemieszczenia punktów: B – środkowego i C – narożnego ramy. Natomiast na rys. 4 i rys. 5 przedstawiono wartość oczekiwaną i kowariancję wrażliwości funkcji celu przy zmianie pola przekroju w pręcie nr 26 i nr 50.

6. Wnioski

W porównaniu z technikami statystycznymi, np. symulacja Monte Carlo, mankamentami metody perturbacyjnej drugich momentów są:

- zmienne x_i na wejściu muszą spełniać warunki małej fluktuacji i ciągłości w punktach \bar{a}_r ,
 - na wyjściu są tylko pierwsze dwa momenty probabilistyczne,
 - dokładność $Cov(x_i, x_j)$ jest pierwszego stopnia ($E[x_i]$ drugiego stopnia).
- O zaletach decyduje natomiast to, że:
- nie jest konieczne założenie normalnego rozkładu parametrów losowych a_r ,
 - na wejściu potrzebne są tylko pierwsze dwa momenty, a nie cały rozkład,
 - koszt obliczeń jest o rząd wielkości niższy przy tej samej dokładności.

7. Literatura

- [1] T. Kato: Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, Berlin 1966.
- [2] T. Hisada, S. Nakagiri: Stochastic finite element method developed for structural safety and reliability, [In] Proc. 3rd Int. Conf. on Struct. Safety and Reliability, 1981.
- [3] W.K. Liu, T. Belytchko, A. Mani: Random field finite elements, Int. J. Num. Meth. Eng. Vol 23, pp.1831-1845, 1986.
- [4] T.D. Hien: Numerical Analysis of Stochastic Systems. WPS, Szczecin 2003.
- [5] M. Kleiber, T.D. Hien: The Stochastic Finite Element Method, Wiley, New York 1992.
- [6] M. Grzywiński., T.D. Hien: Stochastyczna wrażliwość konstrukcji kratowych, [w] W. Tarnowski, T. Kiczowski (red.): Polioptymalizacja i Komputerowe Wspomaganie Projektowania, str. 35-14, 2008.
- [7] M. Grzywiński., T.D. Hien: Statyczna i dynamiczna wrażliwość konstrukcji kratowych, Zeszyty Naukowe Wydziału Mechanicznego Politechniki Koszalińskiej nr 40, str. 113-120, 2007.