

**Leszek CEDRO, Dariusz JANECKI**  
POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA W KIELCACH  
CENTRUM LASEROWYCH TECHNOLOGII METALI

## Linearyzacja modelu matematycznego siłownika hydraulicznego połączonego z ramieniem manipulatora

Dr inż. Leszek CEDRO

Ukończył Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn Politechniki Świętokrzyskiej. W 2007 r. obronił pracę doktorską pt. „Identyfikacja układów z napędem hydraulicznym z wykorzystaniem filtrów różniczkujących”. Obecnie pracuje na stanowisku adiunkta w Centrum Laserowych Technologii Metali Politechniki Świętokrzyskiej i PAN.



e-mail: lcedro@tu.kielce.pl

Dr hab. inż. Dariusz JANECKI

Studia wyższe na Wydziale Elektroniki Politechniki Warszawskiej ukończył w 1981, a w 1996 obronił tam pracę doktorską. W 1996 obronił pracę habilitacyjną w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN. Zainteresowania naukowe obejmują teorię sterowania ze szczególnym uwzględnieniem metod identyfikacji i sterowania adaptacyjnego, matematyczne podstawy metrologii powierzchni oraz problemy związane z modernizacją przyrządów pomiarowych.



e-mail: djanecki@tu.kielce.pl

### Streszczenie

Streszczenie W pracy przedstawiono metodę linearyzacji modelu matematycznego układu hydraulicznego połączonego z ramieniem manipulatora. Układ zamodelowano w dwóch postaciach: w postaci równań różniczkowych, oraz modelu quasi-liniowego. Uzyskany model uproszczony poddano weryfikacji z modelem dokładnym. Model taki może być wykorzystany w procesach identyfikacji metodą najmniejszych kwadratów, która jest jedną z najbardziej efektywnych metod identyfikacji. Drugim obszarem zastosowań może być projektowanie układów regulacji.

**Słowa kluczowe:** linearyzacja, układ hydrauliczny.

### Linearization of the mathematical model of a hydraulic actuator connected to a manipulator arm

#### Abstract

The paper presents the method of linearization of a hydraulic actuator system connected to a manipulator arm. Fig. 1 shows a drive system supplied with constant pressure  $p_o$ . The flow controller (2) acts as a throttling valve, while the hydraulic actuator (1) is a receiver. The constant pressure  $p_o$  is provided by the pump (3). The arm-actuator system presented in Fig. 2 is a one-dimensional model. In the analysis, the elements connecting the actuator to the arm are not taken into consideration. This way it is easier to determine the system dynamic properties. The method used in this study requires expanding the linear function in a Taylor series around the operating point and considering linear terms only. After linearization of the mathematical model of a manipulator connected to a hydraulic actuator, there was obtained a simplified model (7) representing well the real system model behaviour (1). The simplified model was compared with the accurate one. In the case of the second-order, quasi-linear model and the mathematical model of the hydraulic actuator system, both signals fully coincide (Fig. 6). That is why the simplification to such a form is justified. The hydraulic actuator system was designed in two forms: as differential equations(1) (accurate model), and as a quasi-linear model (10) (simplified one). The simplified model can be used for identification purposes using the least squares method, which is one of the most effective identification method. Another area of application can be design of control systems.

**Keywords:** linearization, hydraulic actuator system.

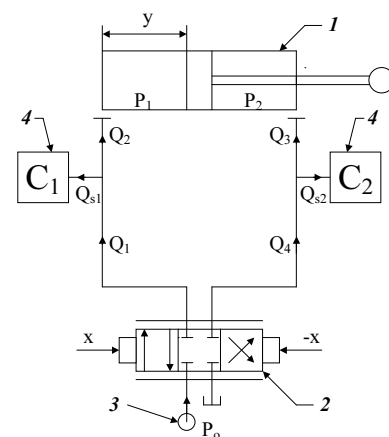
## 1. Wstęp

Przedmiotem poniższej pracy jest linearyzacja modelu matematycznego siłownika hydraulicznego połączonego z ramieniem manipulatora. Linearyzacja układu nieliniowego, polega na aproksymacji funkcji nieliniowych opisujących obiekt funkcjami liniowymi w pewnym zakresie zmienności ich argumentów. Przedstawione w pracy rezultaty stanowią uogólnienie rezultatów otrzymanych w [1], gdzie rozważono prosty model układu hydraulicznego (siłownik sterujący przesuwem elementu o zadanej masie

i obciążonego siłą zewnętrzną). Operację linearyzacji równań stanu można prowadzić zarówno wokół ustalonego punktu pracy, jak i dowolnej trajektorii odniesienia. Zastosowano metodę polegającą na rozwinięciu funkcji nieliniowych występujących w równaniach układu w szereg Taylora w otoczeniu punktu pracy, a następnie uwzględnieniu jedynie wyrazów liniowych. W wyniku linearyzacji otrzymano model quasi-liniowy, którego własności odpowiadają własności modelu nieliniowego w szerokim zakresie zmian sygnałów przemieszczenia suwaka w oknie rozdzielacza  $x$  i kąta pochylenia ramienia  $\varphi$ . Przedyskutowano zastosowanie dynamicznych modeli quasi-liniowych w zagadnieniach identyfikacji parametrów oraz projektowania regulatorów ze zmiennymi parametrami (ze zmienną wiodącą) [2, 3, 4].

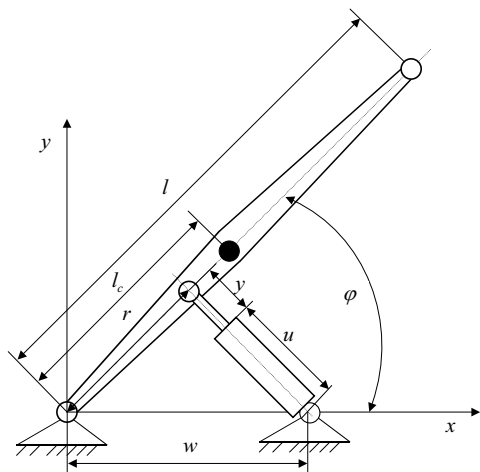
## 2. Model matematyczny

Rysunek 1 przedstawia przykład układu napędowego zasilanego stałym ciśnieniem  $p_o$ , w którym jako element dławiący został zastosowany rozdzielacz przepływowy (2), a jako odbiornik-siłownik hydrauliczny (1). Stałe ciśnienie  $p_o$  zostało wytworzone przez pompę (3). W układzie zastosowano także akumulatory (4).



Rys. 1. Układ hydrauliczny  
Fig. 1. Hydraulic control system

Rysunek 2 przedstawia układ manipulatora z siłownikiem hydraulicznym, który jest modelem płaskim [5, 6]. Prezentowany przykład nie uwzględnia dodatkowych elementów łączących siłownik z ramieniem, przez co określenie własności dynamicznych układu staje się łatwiejsze.



Rys. 2. Model manipulatora z siłownikiem hydraulicznym  
Fig. 2. Model of a manipulator with a hydraulic actuator

Sygnalem sterującym  $x$  jest przemieszczenie suwaka w oknie rozdzielacza. Przyjęto, że sygnał może zmieniać się w przedziale  $-1 \leq x \leq 1$ . Dla  $x = 0$  następuje zamknięcie okna rozdzielacza.

Przy budowie modelu zastosowano następujące założenia upraszczające:

- wartość sygnału sterującego (wejściowego) w postaci przemieszczenia  $x$  suwaka jest równa długości odsłoniętej szczeliny dławiącej,
- układ jest zasilany ze stałego źródła ciśnienia, czyli  $p_o = \text{const}$ ,
- objętościowy moduł ściśliwości cieczy jest stały w całym zakresie zmian ciśnienia w układzie,
- ciśnienie wyjściowe z rozdzielacza do zbiornika jest pomijalnie małe w stosunku do ciśnienia panującego w komorach siłownika,
- spadki ciśnienia między pompą a rozdzielaczem są równe zeru.
- pomijamy siły tarcia statycznego,
- uwzględniamy tylko moment bezwładności ramienia, natomiast pomijamy momenty bezwładności siłownika,
- pomijamy luzy w węzłach kinematycznych,
- sztywność konstrukcji jest nieskończenie duża.

Przy powyższych założeniach równania opisujące ciśnienia w komorach siłownika są następujące:

$$\frac{V_{10} + F_1 y}{E_c} \dot{p}_1 = \alpha x \sqrt{|p_o - p_1|} H(x) + \alpha x \sqrt{|p_1|} H(-x) - F_1 \dot{y} - K_v (p_1 - p_2), \quad (1a)$$

$$\frac{V_{20} - F_2 y}{E_c} \dot{p}_2 = -\alpha x \sqrt{|p_2|} H(x) - \alpha x \sqrt{|p_o - p_2|} H(-x) + F_2 \dot{y} + K_v (p_1 - p_2).$$

Siła generowana przez siłownik jest równa  $F_1 p_1 - F_2 p_2 - B \dot{y}$  [4]. Wywoływany przez nią moment jest równoważony przez moment bezwładności i moment wynikający z siły ciężkości, skąd

$$\frac{1}{6} l m (3g \cos \varphi + 2l \ddot{\varphi}) = R(\varphi) (F_1 p_1 - F_2 p_2 - B \dot{y}), \quad (1b)$$

$$R(\varphi) = \frac{r w \sin \varphi}{\sqrt{r^2 + w^2 - 2r w \cos \varphi}},$$

$$y = -u + \sqrt{r^2 + w^2 - 2r w \cos \varphi},$$

gdzie:  $Q_1, Q_4$  – natężenie przepływu cieczy przez rozdzielacz,  $\alpha$  – współczynnik natężenia przepływu cieczy przez okno rozdzielacza przy pełnym jego otwarciu,  $p_o$  – ciśnienie zasilania,  $H(x)$  – funkcja skokowa Heaviside'a,  $V_{10}, V_{20}$  – początkowe objętości części układu,  $E_c$  – współczynnik sprężystości,

$K_v$  – współczynnik strat wolumetrycznych,  $m$  – masa ramienia manipulatora,  $B$  – współczynnik oporu ruchu (tarcia wiskotyczne),  $p_1, p_2$  – ciśnienia na tłoku siłownika,  $F_1, F_2$  – powierzchnie tłoka siłownika,  $l_c, l, r, w, u$  – odpowiednie wielkości geometryczne zdefiniowane na rysunku 2,  $y$  – wysuw tłoka siłownika,  $\varphi$  – kąt obrotu ramienia,  $I$  – moment bezwładności ramienia,  $R(\varphi)$  – ramię działania siły.

W dalszej części pracy w przeprowadzonych symulacjach przyjęto następujące nominalne wartości parametrów:  $\alpha = 1 \cdot 10^{-6} [m^5 / Ns]$ ,  $p_o = 4.6 \cdot 10^7 [N / m^2]$ ,  $K_v = 5 \cdot 10^{-12} [m^5 / Ns]$ ,  $F_1 = 3.5 \cdot 10^{-2} [m^2]$ ,  $F_2 = 3 \cdot 10^{-2} [m^2]$ ,  $E_c = 1.2 \cdot 10^9 [N / m^2]$ ,  $V_{10} = 0.01 [m^3]$ ,  $V_{20} = 0.02875 [m^3]$ ,  $B = 1 \cdot 10^5 [Ns / m]$ ,  $m = 150 [kg]$ ,  $l = 1.5 [m]$ ,  $g = 9.81 [m / s^2]$ ,  $r = 0.462 [m]$ ,  $w = 1.214 [m]$ ,  $u = 0.751 [m]$ .

### 3. Linearyzacja układu

Równanie układu manipulatora z siłownikiem hydraulicznym (1) możemy zapisać w postaci równań stanu

$$\dot{z} = Az + b(z)x + d, \quad \omega = c^T z, \quad \omega = \dot{\varphi}, \quad (2)$$

gdzie:

$$z = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \omega \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{K_v}{\beta_1} & \frac{K_v}{\beta_1} & \frac{-F_1 r w \sin \varphi}{\beta_1 \sqrt{r^2 + w^2 - 2r w \cos \varphi}} \\ \frac{K_v}{\beta_2} & -\frac{K_v}{\beta_2} & \frac{F_2 r w \sin \varphi}{\beta_2 \sqrt{r^2 + w^2 - 2r w \cos \varphi}} \\ \frac{F_1 R(\varphi)}{I} & \frac{-F_2 R(\varphi)}{I} & \frac{-R(\varphi) B r w \sin \varphi}{I \sqrt{r^2 + w^2 - 2r w \cos \varphi}} \end{pmatrix},$$

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-0.5 g l m \cos \varphi}{I} \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\beta_1} \sqrt{p_o - p_1} \\ -\frac{\alpha}{\beta_2} \sqrt{p_2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dla } x \geq 0,$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\beta_1} \sqrt{p_1} \\ -\frac{\alpha}{\beta_2} \sqrt{p_o - p_2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dla } x < 0,$$

$$\beta_1 = \frac{V_{10}}{E_c}, \quad \beta_2 = \frac{V_{20}}{E_c},$$

$$I = \frac{m l^2}{3}.$$

Naszym celem jest w przybliżeniu dokonanie linearyzacji równania (2) w otoczeniu punktu równowagi  $x = x_0$  i  $\varphi = \varphi_0$ . Wtedy w przybliżeniu tłok porusza się ze stałą prędkością, przy stałych wartościach ciśnień w komorach siłownika. Z warunku  $\dot{z} = 0$  otrzymujemy równanie

$$Az_0 + b(z_0) \cdot x_0 + d = 0, \quad (3)$$

gdzie  $z_0 = z_0(x_0, \varphi_0)$  jest ustaloną wartością stanu  $z$  dla zadanych wartości  $x_0$  i  $\varphi_0$ . Równanie można rozwiązać analitycznie w przypadku, gdy  $K_v = 0$ . W przypadku ogólnym gdy  $K_v \neq 0$  równanie możemy rozwiązać numerycznie.

W równaniach stanu układu (2), wektor  $b$  jest nieliniową funkcją ciśnień  $p_1$  i  $p_2$ . Dokonując linearyzacji  $b(z)$  w punkcie równowagi  $z = z_0$  metodą rozwinięcia w szereg Taylora otrzymujemy

$$b(z) = b(z_0) + \frac{\partial b}{\partial z} \Big|_{z=z_0} (z - z_0),$$

$$\dot{z} = Az + (b(z_0) + \frac{\partial b}{\partial z} (z - z_0))x + d \cong \tilde{A}z + \tilde{b}x + d, \quad (4)$$

$$\omega = c^T z,$$

gdzie

$$\tilde{A} = A + \frac{\partial b}{\partial z} \Big|_{z=z_0} x_0,$$

$$\tilde{b} = b(z_0) - \frac{\partial b}{\partial z} \Big|_{z=z_0} z_0.$$

W równaniach (4) macierz  $\tilde{A}$  i wektor  $\tilde{b}$  jest funkcją stanu  $z_0$ , a więc pośrednio funkcją przesunięcia suwaka rozdzielacza  $x_0$  i położenia kąтового ramienia  $\varphi_0$ . Wprowadzając pojęcie operatora różniczkowania  $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$  równania układu (4) w pobliżu położenia równowagi możemy zapisać w postaci

$$\omega = T_{x_0, \varphi_0}(\mathcal{D})x + k_1(x_0, \varphi_0),$$

$$T_{x_0, \varphi_0}(\mathcal{D}) = c^T (\mathcal{D}I - \tilde{A})^{-1} \tilde{b},$$

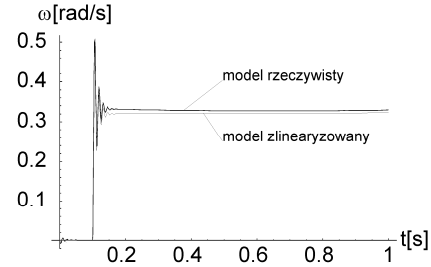
$$k_1(x_0, \varphi_0) = c^T (\mathcal{D}I - \tilde{A})^{-1} d \Big|_{\mathcal{D}=0}. \quad (5)$$

Z postaci wektora  $c$  (dwa pierwsze elementy zerowe) oraz wektora  $\tilde{b}$  (podobnie jak wektora  $b$  ostatni element zerowy) wynika, że transmitancja  $T_{x_0, \varphi_0}(\mathcal{D})$  ma postać

$$T_{x_0, \varphi_0}(\mathcal{D}) = \frac{b_0 \mathcal{D} + b_1}{\mathcal{D}^3 + a_1 \mathcal{D}^2 + a_2 \mathcal{D} + a_3}. \quad (6)$$

Współczynniki transmitancji (6) i współczynnik  $k_1$  są funkcjami punktu pracy  $x_0, \varphi_0$ .

Rysunek 3 przedstawia odpowiedź skokową modelu układu rzeczywistego i odpowiedź skokową transmitancji trzeciego rzędu  $T_{x_0, \varphi_0}(\mathcal{D})$ . Odpowiedź układu jak i transmitancji (5) ma charakter oscylacyjny, ale odpowiedź transmitancji  $T_{x_0, \varphi_0}(\mathcal{D})$  osiąga stan równowagi po znacznie dłuższym czasie niż model rzeczywistego układu.



Rys. 3. Prędkość kątową ramienia manipulatora dla modelu matematycznego i modelu (5)

Fig. 3. Angular velocity of the robot arm the accurate model and model (5)

Sugeruje to istnienie w transmitancji  $T_{x_0, \varphi_0}(\mathcal{D})$  bieguna, który nie ma swojego odwzorowania w rzeczywistych właściwościach układu siłownika. Istotnie analiza zer i biegunów transmitancji  $T_{x_0, \varphi_0}(\mathcal{D})$  dla przykładowych wartości  $x_0$  i  $\varphi_0$  (Tab. 1) pokazuje, że zero transmitancji jest bliskie jednemu z jej biegunów. Oznacza to, że transmitancja  $T_{x_0, \varphi_0}(\mathcal{D})$  może być aproksymowana transmitancją drugiego rzędu, otrzymaną przez skrócenie zera i rzeczywistego bieguna.

Tab. 1. Zero i bieguny dla układu hydraulicznego połączonego z ramieniem manipulatora

Tab. 1. Zero and poles for the arm-actuator system

$x$	$\varphi$ [rad]	Zero transmitancji	Biegun rzeczywisty transmitancji	Bieguny zespolone transmitancji
0.1	0.1	-0.542848	-0.619611	-2.93752-94.9809i -2.93752+94.9809i
0.1	1	-0.668031	-0.639404	-92.0108-480.549i -92.0108+480.549i
1	0.1	-5.44881	-6.22391	-7.3879-94.9323i -7.3879+94.9323i
1	1	-6.70999	-6.42093	-94.8266-481.076i -94.8266+481.076i

Zatem przyjmujemy

$$T_{x_0, \varphi_0}(\mathcal{D}) = \frac{b_0}{\mathcal{D}^2 + a_1 \mathcal{D} + a_2}, \quad (7)$$

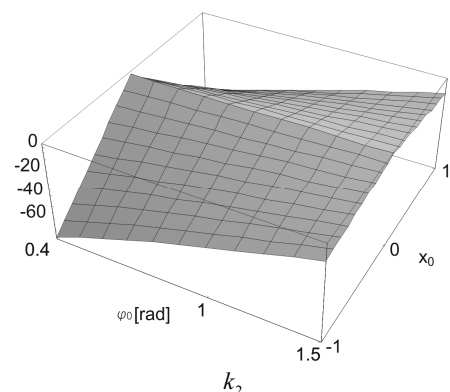
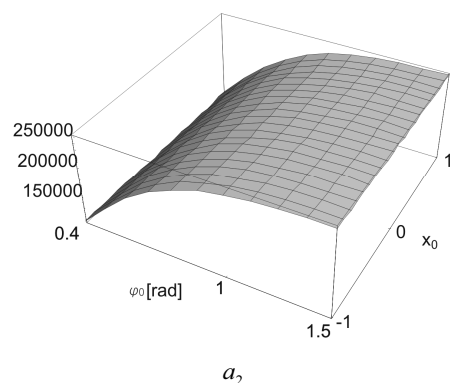
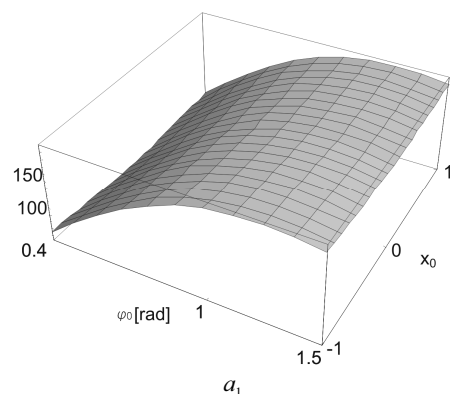
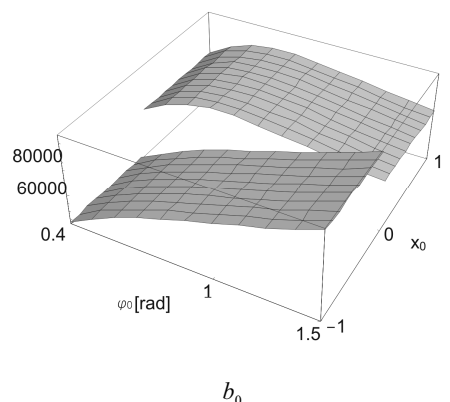
gdzie parametry  $b_0, a_1$  i  $a_2$  są funkcją  $x_0$  i  $\varphi_0$ .

#### 4. Model quasi-liniowy

Z (5) i (7) wynika, że w otoczeniu wybranego punktu  $x_0$  i  $\varphi_0$  równania obiektu możemy zastąpić równaniem różniczkowym liniowym postaci

$$\ddot{\omega} + a_1 \dot{\omega} + a_2 \omega = b_0 x + k_2, \quad z \quad k_2 = k_1 a_2. \quad (8)$$

Zbadamy jak parametry modelu  $a_1, a_2, b_0$  i  $k_2$  zależą od punktu pracy. Obliczenia przeprowadzono w zakresie zmienności wartości  $x_0$  i  $\varphi_0$  ( $-1 \leq x_0 \leq 1, 0.4 < \varphi_0 < 1.5$ ). Na rysunku 4 przedstawiono wykresy przestrzenne współczynników modelu w funkcji  $x_0, \varphi_0$ .



Rys. 4. Wykresy 3D współczynników modelu (7)  
Fig. 4. 3D diagrams of the model (7) coefficients

Bliższa analiza otrzymanych zależności pokazuje, że współczynniki  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_0$  i  $k_2$  w każdym z obszarów  $-1 \leq x_0 < 0$ ,  $0 < x_0 \leq 1$  mogą być z dobrym przybliżeniem aproksymowane za pomocą funkcji o następujących postaciach z odpowiednio dobranymi współczynnikami

$$b_0(x_0, \varphi_0) \cong \begin{cases} b_0^+ + b_1^+ x_0^2 + b_2^+ \varphi_0 + b_3^+ \varphi_0^2 & \text{dla } x_0 \geq 0 \\ b_0^- + b_1^- x_0^2 + b_2^- \varphi_0 + b_3^- \varphi_0^2 & \text{dla } x_0 < 0, \end{cases}$$

$$a_1(x_0, \varphi_0) \cong \begin{cases} a_{10}^+ + a_{11}^+ x_0 + a_{12}^+ \varphi_0 + a_{13}^+ \varphi_0^2 + a_{14}^+ \varphi_0^3 & \text{dla } x_0 \geq 0 \\ a_{10}^- + a_{11}^- x_0 + a_{12}^- \varphi_0 + a_{13}^- \varphi_0^2 + a_{14}^- \varphi_0^3 & \text{dla } x_0 < 0, \end{cases}$$

$$a_2(x_0, \varphi_0) \cong \begin{cases} a_{20}^+ + a_{21}^+ x_0 + a_{22}^+ \varphi_0 + a_{23}^+ \varphi_0^2 & \text{dla } x_0 \geq 0 \\ a_{20}^- + a_{21}^- x_0 + a_{22}^- \varphi_0 + a_{23}^- \varphi_0^2 & \text{dla } x_0 < 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$k_2(x_0, \varphi_0) \cong \begin{cases} k_{21}^+ x_0 + k_{22}^+ \varphi_0 + k_{23}^+ x_0 \varphi_0 & \text{dla } x_0 \geq 0 \\ k_{21}^- x_0 + k_{22}^- \varphi_0 + k_{23}^- x_0 \varphi_0 & \text{dla } x_0 < 0. \end{cases}$$

Po podstawieniu wartości (9) do równania (8), a następnie pominięciu indeksów przy zmiennych  $x_0$  i  $\varphi_0$  otrzymujemy model quasi-liniowy układu postaci:

$$\ddot{\omega} + (a_{10}^+ + a_{11}^+ x + a_{12}^+ \varphi + a_{13}^+ \varphi^2 + a_{14}^+ \varphi^3) \dot{\omega} + (a_{20}^+ + a_{21}^+ x + a_{22}^+ \varphi + a_{23}^+ \varphi^2) \omega = (b_0^+ + b_1^+ x^2 + b_2^+ \varphi + b_3^+ \varphi^2) x + k_{21}^+ x + k_{22}^+ \varphi + k_{23}^+ x \varphi \quad (10)$$

dla  $x \geq 0$ ,

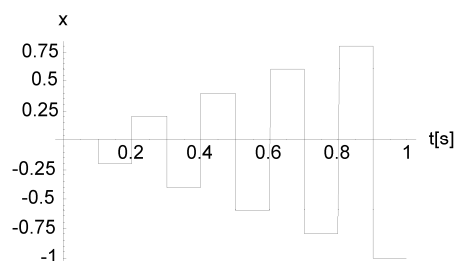
$$\ddot{\omega} + (a_{10}^- + a_{11}^- x + a_{12}^- \varphi + a_{13}^- \varphi^2 + a_{14}^- \varphi^3) \dot{\omega} + (a_{20}^- + a_{21}^- x + a_{22}^- \varphi + a_{23}^- \varphi^2) \omega = (b_0^- + b_1^- x^2 + b_2^- \varphi + b_3^- \varphi^2) x + k_{21}^- x + k_{22}^- \varphi + k_{23}^- x \varphi$$

dla  $x < 0$ .

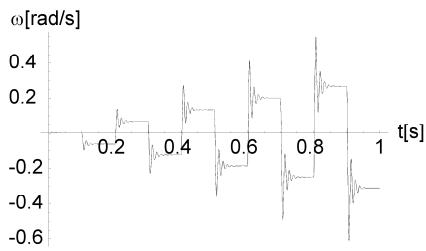
Model ten (10) aproksymuje model rzeczywisty (1a, 1b) w szerokim zakresie zmienności  $x$  i  $\varphi$ .

## 5. Symulacja

Poniżej porównano wyniki symulacji modelu układu rzeczywistego (1a, 1b) i układu quasi-liniowego (10). Na rysunku 5 przedstawiono sygnał wejściowy w postaci ciągu schodków o narastającej amplitudzie. Umożliwia to porównanie układów w szerokim zakresie zmian sygnału  $x$  i  $\varphi$ . Rysunek 6 przedstawia wykres prędkości dla obu układów (1a, 1b) i (10). Widać, że układ quasi-liniowy wiernie odwzorowuje model układu rzeczywistego.



Rys. 5. Sygnał wejściowy  $x$   
Fig. 5. Input signal  $x$



Rys. 6. Prędkość kątowna ramienia manipulatora dla modelu matematycznego (linia ciągła) i modelu quasi-liniowego (linia przerywana)

Fig. 6. Angular velocity of the robot arm for the accurate (solid line) and quasi-linear (broken line) model

## 6. Zastosowanie

Model quasi-liniowy (10) z parametrami jest oczywiście również modelem nieliniowym. Powstaje pytanie jaki jest sens zastępowania jednego modelu nieliniowego innym modelem nieliniowym. Podamy dwa przykłady zastosowań. Po pierwsze zwróćmy uwagę że model quasi-liniowy jest liniowy względem parametrów obiektu. Model taki może być wykorzystany w procesach identyfikacji metodą najmniejszych kwadratów, która jest jedną z najbardziej efektywnych metod identyfikacji. W tym celu równania (10) możemy przedstawić w postaci równania regresji liniowej:

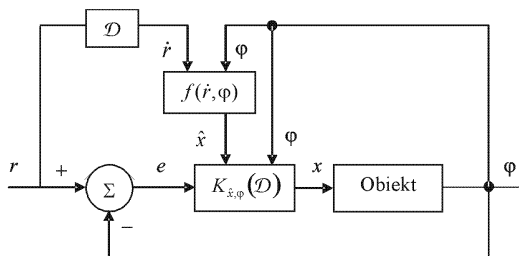
$$\zeta = \theta^T \phi, \quad (11)$$

przyjmując:

$$\theta = [b_0^+ \ b_1^+ \ b_2^+ \ b_3^+ \ a_{10}^+ \ a_{11}^+ \ a_{12}^+ \ a_{13}^+ \ a_{14}^+ \ a_{20}^+ \ a_{21}^+ \ a_{22}^+ \ a_{23}^+ \ k_{21}^+ \ k_{22}^+ \ k_{23}^+ \ b_0^- \ b_1^- \ b_2^- \ b_3^- \ a_{10}^- \ a_{11}^- \ a_{12}^- \ a_{13}^- \ a_{14}^- \ a_{20}^- \ a_{21}^- \ a_{22}^- \ a_{23}^- \ k_{21}^- \ k_{22}^- \ k_{23}^-]^T,$$

$$\phi = [H(x)x, H(x)x^2, H(x)x\phi, H(x)x\phi^2, -H(x)\dot{\omega}, -H(x)x\dot{\omega}, -H(x)\phi\dot{\omega}, -H(x)\phi^2\dot{\omega}, -H(x)\phi^3\dot{\omega}, -H(x)\omega, -H(x)x\omega, -H(x)\phi\omega, -H(x)\phi^2\omega, H(x)x, H(x)\phi, H(x)x\phi, H(-x)x, H(-x)x^2, H(-x)x\phi, H(-x)x\phi^2, -H(-x)\dot{\omega}, -H(-x)x\dot{\omega}, -H(-x)\phi\dot{\omega}, -H(-x)\phi^2\dot{\omega}, -H(-x)\phi^3\dot{\omega}, -H(-x)\omega, -H(-x)x\omega, -H(-x)\phi\omega, -H(-x)\phi^2\omega, H(-x)x, H(-x)\phi, H(-x)x\phi]^T,$$

$$\zeta = \mathcal{D}^2 \omega.$$



Rys. 7. Schemat układu sterowania z regulatorem niestacjonarnym  
Fig. 7. Control systems with non-stationary regulator

Otrzymany model quasi-liniowy może być również wykorzystany przy projektowaniu układu regulacji. Do sterowania układem, którego własności zależą od punktu pracy mogą być stosowane regulatory odporne. Są to regulatory ze stałymi parametrami zapewniającym właściwą pracę układu w różnych punktach pracy układu. Wykorzystując model quasi-liniowy możemy zastosować inne podejście. Dla ustalonego punktu pracy  $x_0$  i  $\phi_0$  wyznaczamy regulator wykorzystując klasyczne metody projektowania regula-

torów dla układów liniowych. Oznaczmy transmitancję tego regulatora przez  $K_{x,\phi}(\mathcal{D})$ , przy czym współczynniki regulatora zależą od  $x_0, \phi_0$ . W celu implementacji równania regulatora wyznaczmy ocenę wartości  $\phi$  i parametrów sygnału zadanego  $r$ .

W otoczeniu punktu pracy  $(x_0, \phi_0)$  przybliżoną wartość prędkości  $\omega_0$  możemy uzyskać z równania

$$a_2(x_0, \phi_0)\omega_0 = b(x_0, \phi_0)x_0 + k_2(x_0, \phi_0).$$

Rozwiązując to równanie względem  $x_0$  otrzymujemy  $x_0 = f(\omega_0, \phi_0)$  dla pewnej funkcji  $f$ . Stosujemy następujące prawo sterowania

$$x = K_{x,\phi}(\mathcal{D}),$$

$$\hat{x} = f(\dot{r}, \phi).$$

Otrzymany regulator jest regulatorem nieliniowym. Biezące parametry transmitancji  $K$  zależą od kąta nachylenia  $\phi$  i oceny przemieszczenia suwaka  $\hat{x}$ .

Regulator taki z reguły zapewnia lepszą jakość regulacji niż regulator odporny, w którym parametry są stałe.

## 7. Wnioski

Po przeprowadzeniu linearyzacji modelu matematycznego manipulatora połączonego z siłownikiem hydraulicznym uzyskano postać uproszczoną (7), która dobrze odwzorowuje zachowanie się modelu układu rzeczywistego (1a, 1b). Dla modelu quasi-liniowego drugiego rzędu i modelu matematycznego układu siłownika hydraulicznego sygnały prędkości pokrywają się z dobrą dokładnością (rys. 6), dlatego w tym przypadku uproszczenie do postaci quasi-liniowej (10) jest uzasadnione. Postać quasi-liniowa może znaleźć swoje zastosowanie w procesach identyfikacji i projektowaniu układów regulacji. Dobre wyniki syntezy hydraulicznych układów synchronizacji przemieszczeń otrzymuje się na podstawie uproszczonych zlinearyzowanych modeli matematycznych. W rezultacie tego dynamiczne zachowanie się tych układów niewiele odbiega od dynamicznego zachowania się układów liniowych. Dzięki temu syntezę można przeprowadzić na podstawie modelu zlinearyzowanego.

## 8. Literatura

- [1] Cedro L., Janecki D.: Linearyzacja modelu matematycznego siłownika hydraulicznego, AUTOMATION 2006.
- [2] Thompson D. F., Pruyun J. S. Shukla A.: Feedback design for robust tracking and robust stiffness in flight control actuators using a modified QFT technique, INT J. Control 1999 vol 72 no 16 1480-1497.
- [3] Giergiel J., Uhl T.: Identyfikacja układów mechanicznych, PWN Warszawa 1990.
- [4] Dudczak A.: Model symulacyjny, identyfikacja dynamiki koparki jednonaczyniowej, dostosowanej do automatyzacji wykopów szerokoprzestrzennych w aspekcie bezpieczeństwa pracy, IMBiGS, Warszawa 1992.
- [5] Kozłowski K., Dutkiewicz P., Wróblewski W.: Modelowanie i sterowanie robotów, PWN, Warszawa 2003.
- [6] Garbaciak A.: Studium projektowania układów hydraulicznych, Ossolineum, Kraków, 1997.