

ISSN 0509-6669

**PRACE
INSTYTUTU LOTNICTWA**

Kwartalnik naukowy
1 / 2008 (192)

**ANALIZA DRGAŃ PŁYTY
PROSTOKĄTNEJ Z NAKLEJONYMI ELEMENTAMI
PIEZOELEKTRYCZNYMI**

Michał SZMIDT
Instytut Lotnictwa, Warszawa

**Wydanie publikacji jest dofinansowane przez
Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego**

Redaguje kolegium w składzie

Maciej Bossak, Zdobysław Goraj, Marian Jeż, Wojciech Kania, Tadeusz Korsak (sekretarz kolegium),
Antoni Niepokólczycki, Wojciech Potkański, Kazimierz Szumański (przewodniczący kolegium), Zbigniew Wołęjsza

M. Szmidt

ANALIZA DRGAŃ PŁYTY PROSTOKĄTNEJ Z NAKLEJONYMI ELEMENTAMI PIEZOELEKTRYCZNYMI

Streszczenie

W pierwszych punktach pracy przeanalizowane są drgania aluminiowej prostokątnej płyty, pobudzonej do drgań przez symulujące hałas lotniczy jednorodne ciśnienie akustyczne. Wykorzystana jest teoria płyt Kirchhoffa. Przyjęte jest podparcie przegubowe wszystkich brzegów płyty. Wychodząc od równania drgań płyty tworzone są kolejne, coraz bardziej złożone modele drgań uwzględniające wiskotyczne tłumienie w materiale płyty, a także wymuszenie kinematyczne na dwóch jej brzegach. Następnie zbadane są drgania jakie wzbudza naklejony na środku płyty prostokątny piezoaktuator pobudzany sinusoidalnie zmiennym napięciem. Do opisu obciążenia pochodzącego od piezoelementu wykorzystana jest teoria dystrybucji. Masa piezoelementu oraz wpływ warstwy kleju o skończonej sztywności na ścinanie są pominięte. Porównana jest zarówno postać drgań jak i wartość skuteczna prędkości drgań poprzecznych punktów płyty, pobudzanej ciśnieniem akustycznym oraz sterowanym piezoelementem. Zbadana jest także dynamika płyty z piezoaktuatorem wytraconym ze stanu zerowych naprężeń, poprzez gwałtowne przyłożenie niezerowego napięcia. Do rozwiązania równań drgań wykorzystana jest metoda rozdzielania zmiennych Fouriera. Przeprowadzane analizy pozwalają wysnuć wnioski co do słuszności koncepcji aktywnego tłumienia drgań poszycia kadłuba samolotu w celu obniżenia poziomu hałasu w kabinie. Niniejsza praca stanowi merytoryczny wstęp do projektu, mającego na celu opracowanie i realizację koncepcji aktywno-pasywnego tłumienia hałasu w kabinach niewielkich samolotów z napędem śmigłowym.

M. Szmidt

RECTANGULAR PLATE VIBRATION ANALYSIS WITH BONDED PIEZOELECTRIC ELEMENTS

Summary

The vibration of a rectangular aluminium plate excited by the homogenous acoustic pressure simulating aircraft engine noise are studied. The Kirchhoff plate is assumed to be simply supported on all edges. Starting from the plate vibration equation, there are made more and more sophisticated plate vibration models considering viscous damping in the material and kinematic excitation on one pair of plate boundaries. Vibrations excited by sinusoidal voltage applied to piezoactuator bonded to the center of the plate are studied. Partial differential equation of plate motion is solved by means of the Fourier separation variable method. The piezoelement loading is written by means of a distributed theory. The piezoelement mass and the influence of a bonding layer with a finite shear stiffness are neglected. The characteristics of the vibrations and the root mean square of a vibration velocity excited by acoustic pressure and controlled piezoelement are compared. The dynamics of the plate with the piezoactuator equilibrium disturbed by the rapidly applied voltage is examined. Obtained results lead to the conclusions referring to the active damping of a fuselage skin plating vibrations concept of soundproofing. The paper is a preliminary work to the project of developing and realization of the active-passive internal noise muffling concept in the small propeller aircrafts.

М. Шмидт

АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ С НАКЛЕЕННЫМИ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТАМИ

Резюме

В работе проанализовано колебания прямоугольной, алюминиевой плиты вынужденные однородным, акустическим давлением симулирующем авиационный шум. Пользовано теорией плит Кирхгофа. Принято шарнирное утверждение всех берегов плиты. Исходя из уравнения колебаний плиты строятся очередные, всё более сложные модели колебаний, с учётом вискотического демпфирования в материале плиты и кинематических возмущений на двух берегах плиты. Дальше исследуются колебания вынужденные наклеенным на середине плиты прямоугольным пьезоэлементом, возбуждённым синусоидальным электрическим напряжением. Для описания сил от пьезоэлемента пользовано теорией дистрибуции. Массой пьезоэлемента и влиянием слоя клея с конечной жёсткостью, пренебрегалось. Сравниваются вид колебаний и эффективная скорость поперёчных колебаний пунктов на плите при вынуждении акустическим давлением и управляемым пьезоэлементом. Исследуется тоже динамика плиты с пьезоэлементом вытронутым из состояния нулевых напряжений путём внезапного приложения электрического напряжения. Для решения уравнений колебаний использован метод Фурье разделения переменных. Проведённые анализы позволяют выдвинуть итоги относительно справедливости концепции активного демпфирования колебаний обшивки фюзеляжа самолёта с целью снизить уровень шума в кабине. Работа является мериторическим началом проекта цель которого разработать и реализовать концепцию активно-пассивного демпфирования шума в кабине небольшого самолёта с воздушным винтом.

Wydawca

Wydawnictwa Naukowe Instytutu Lotnictwa
Al. Krakowska 110/114, 02-256 Warszawa, Polska,
tel. (48 22) 846 00 11 wew. 442, 417

Opracowanie techniczne i skład: Iwonna Olesińska

Drukarnia: ALKOR, 05-070 Sulejówek, Krucza 4

SPIS TREŚCI

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ	5
1. WPROWADZENIE	6
1.1. Przedmiot pracy	6
1.1.1. Omówienie zagadnienia	6
1.1.2. Aktywne tłumienie drgań za pomocą piezoelementów	6
1.1.3. Obiekt rzeczywisty	7
1.2. Zdefiniowanie celu i zakresu pracy	9
1.2.1. Założenia	9
1.2.2. Sformułowanie zadania	10
2. MODEL DRGANIOWY PŁYTY PODDANEJ WYMUSZENIU AKUSTYCZNEMU	11
2.1. Wyprowadzenie zależności	11
2.2. Rezultaty obliczeń i wnioski	15
3. MODEL DRGANIOWY PŁYTY PODDANEJ WYMUSZENIU AKUSTYCZNEMU Z UWZGLĘDNIENIEM WISKOTYCZNEGO TŁUMIENIA WEWNĘTRZNEGO	18
3.1. Wyprowadzenie zależności	18
3.2. Rezultaty obliczeń i wnioski	23
4. MODEL DRGANIOWY PŁYTY PODDANEJ WYMUSZENIU AKUSTYCZNEMU ORAZ KINEMATYCZNEMU	27
4.1. Wyprowadzenie zależności	27
4.2. Rezultaty obliczeń i wnioski	36
5. MODEL DRGANIOWY PŁYTY PODDANEJ WYMUSZENIU HARMONICZNEMU POCHODZĄCEGO OD NAKLEJONEGO ELEMENTU PIEZOELEKTRYCZNEGO	44
5.1. Wyprowadzenie zależności	44
5.2. Rezultaty obliczeń i wnioski	47
6. MODEL DRGANIOWY PŁYTY PODDANEJ STAŁEMU W CZASIE WYMUSZENIU POCHODZĄCEGO OD NAKLEJONEGO ELEMENTU PIEZOELEKTRYCZNEGO	50
6.1. Wyprowadzenie zależności	50
6.2. Rezultaty obliczeń i wnioski	51
7. PODSUMOWANIE	53
BIBLIOGRAFIA	56

ТРУДЫ ИНСТИТУТА АВИАЦИИ
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ (КВАРТАЛЬНИК)
1/2008 (192)

М. Шмидт

**АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ
С НАКЛЕЕННЫМИ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТАМИ**

Содержание

Список важнейших обозначений	5
1. Введение	6
1.1. Тема работы	6
1.1.1. Описание проблематики	6
1.1.2. Активное демпфирование колебаний с помощью пьезоэлемента	6
1.1.3. Реальный объект	7
1.2. Описание цели и рамок работы	9
1.2.1. Заложения	9
1.2.2. Сформулирование задания	10
2. Модель колебаний плиты под действием акустического возмущения	11
2.1. Выведение формул	11
2.2. Результаты расчётов и итоги	15
3. Модель колебаний плиты под действием акустического возмущения с учётом внутреннего, вискозического демпфирования	18
3.1. Выведение формул	18
3.2. Результаты расчётов и итоги	23
4. Модель колебаний плиты под действием акустического и кинематического возмущения	27
4.1. Выведение формул	27
4.2. Результаты расчётов и итоги	36
5. Модель колебаний плиты под действием гармонического возмущения от наклеенного пьезоэлемента	44
5.1. Выведение формул	44
5.2. Результаты расчётов и итоги	47
6. Модель колебаний плиты под действием постоянного возмущения от наклеенного пьезоэлемента	50
6.1. Выведение формул	50
6.2. Результаты расчётов и итоги	51
7. Подведение итогов	53
Литература	56

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

a	-	długość płyty
b	-	szerokość płyty
h	-	grubość płyty
ρ	-	gęstość materiału płyty
E	-	moduł Younga materiału płyty
λ	-	stała pełzania materiału płyty
ω_{mn}, ω_{ij}	-	$m, n, (i, j)$ częstotliwość drgań własnych płyty
ν	-	liczba Poissona materiału płyty
ν_a	-	liczba Poissona materiału piezoelektryka
D	-	sztywność walcowa płyty
ν	-	częstotliwość wymuszenia akustycznego (hałas śmigła)
p_z	-	wartość ciśnienia akustycznego
$w(x, y, t)$	-	przemieszczenie poprzeczne punktów płaszczyzny środkowej płyty
Δ	-	operator matematyczny
t	-	czas
$W_{mn}(x, y), W_{ij}(x, y)$	-	funkcje własne drgań płyty
$T_{mn}(t), T_{ij}(t)$	-	funkcja zależna od czasu odpowiadająca $m, n, (i, j)$ częstotliwości drgań własnych
a_{pmn}, a_{pij}	-	współczynnik $m, n, (i, j)$ rozwinięcia funkcji w dwuwymiarowy szereg Fouriera
r_1, r_2	-	pierwiastki równania charakterystycznego
$\xi_1(x, t), \xi_2(x, t)$	-	funkcje brzegowe płyty pobudzanej do drgań wymuszeniem kinematycznym
A_1, A_2	-	amplitudy drgań podłużnic (amplitudy funkcji $\xi_1(x, t), \xi_2(x, t)$)
ω_p	-	częstotliwość drgań podłużnic
t_a	-	grubość elementu piezoelektrycznego
a^a	-	długość elementu piezoelektrycznego
b^a	-	szerokość elementu piezoelektrycznego
d_{31}, d_{32}	-	stałe piezoelektryczne
v_{RMS}	-	wartość skuteczna prędkości drgań punktów płyty

1. WPROWADZENIE

1.1. Przedmiot pracy

1.1.1. Omówienie zagadnienia

Niniejsza praca stanowi część projektu mającego na celu wyciszenie kabin niewielkich samolotów o napędzie śmigłowym. Projekt zostanie zrealizowany we współpracy Wydziału Samochodów i Maszyn Roboczych Politechniki Warszawskiej z Instytutem Lotnictwa w Warszawie. Problemem, którego dotyczy ten projekt, jest niskoczęstotliwościowy hałas, obecny we wnętrzach samolotów z napędem śmigłowym. Drgania ścianek kadłuba o częstotliwościach rzędu 50÷200 Hz są trudne lub wręcz niemożliwe do skutecznego wytłumienia tylko metodami pasywnymi (wykładziny dźwiękochłonne i dźwiękoizolacyjne). Ponadto montaż elementów wygłuszających podnosi masę samolotu. Jedną z metod aktywnej walki z hałasem jest tzw. „antyhałas”. Emitowany przez głośniki dźwięk, przesunięty w fazie o połowę okresu w stosunku do sygnału rzeczywistego (mający tę samą amplitudę), w założeniu ma skutkować całkowitą redukcją hałasu. Z sukcesem owa metoda jest stosowana w aktywnych ochronnikach słuchu. Jednak w zastosowaniu do wnętrza kadłuba samolotu nie sprawdziła się. Prace w tym zakresie prowadził The Institute for Aerospace Research (IAR) of the National Research Council Kanada. Ostatecznie IAR opracował i przebadał na pełnowymiarowym modelu kadłuba samolotu system aktywnej redukcji hałasu w oparciu o konstrukcje inteligentne. Wykazano, że możliwa jest redukcja zarówno hałasu jak i drgań całej konstrukcji. Współpraca w tym zakresie odbywała się m.in. z zakładami lotniczymi de Havilland i dotyczyła właśnie samolotów o napędzie turbośmigłowym. W przypadku polskiego projektu uznano, iż rozwiązania należy poszukiwać poprzez hybrydowe, aktywno-pasywne tłumienie hałasu. Efektem wdrożenia opracowanej w ramach projektu metodyki zmniejszenia hałasu będzie zwiększenie konkurencyjności produkowanych w Polsce samolotów.

1.1.2. Aktywne tłumienie drgań za pomocą piezoelementów

Pierwsze wzmianki w literaturze naukowej o zastosowaniu elementów piezoelektrycznych do utworzenia tzw. konstrukcji inteligentnych* w zastosowaniu do aktywnego tłumienia drgań pochodzą z połowy lat 1980. Jest to stosunkowo młoda dziedzina nauki, ale bardzo obiecująca i wciąż dynamicznie rozwijana (Tylikowski, Przybyłowicz [1]). Świadczy o tym również tematyka i poziom zaawansowania prac dotyczących piezoelementów zaprezentowanych na Pierwszym Kongresie Mechaniki Polskiej, który odbył się w sierpniu 2007 roku. Piezoelektryczne elementy są niedrogie, małe, niewiele ważą i mają prostą budowę, przez co nie modyfikują znacząco dynamicznych właściwości macierzystej struktury. Sterowane niedużymi napięciami (poniżej 1kV), cechują się małym poborem mocy (prądy sterowania liczone w mA) oraz dużą sprawnością (rzędu 50%). Szybko reagują na przyłożone napięcie dzięki czemu mogą pracować przy dużych częstotliwościach (do 5000 Hz). Są w stanie generować duże siły (naprężenia około 35 MPa) zapewniając jednocześnie wysoką precyzję odkształcenia względnego (liczone w promilach). Stanowią więc potencjalnie bardzo dobry materiał do konstrukcji zarówno wzbudników jak i czujników drgań. Wiele tytułów interesujących prac z literatury dotyczącej konstrukcji inteligentnych, w szczególności tych konstrukcji, w których zastosowano piezoelementy znajduje się w artykule [2].

* Konstrukcje inteligentne – struktury mające możliwość autodiagnozowania lub autonomicznej zmiany swoich właściwości by dostosować się do zmiennych warunków środowiska w jakim pracują

Piezoelektryczne akulatory i czujniki z powodzeniem zastosowano w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego Bailey i Hubbard [3], a także Newman [4]. Dimitriadis, Fuller i Rogers [5] rozszerzyli jednowymiarową teorię opisującą model belki z naklejonymi akuatorami piezoceramicznymi na cienkie płyty z dwuwymiarowymi piezoelementami.

Model dynamiczny belki podpartej przegubowo z piezo elektrycznym akuatorem naklejonym po jej obydwu stronach (na górnej i dolnej powierzchni) został opracowany przez Tylikowskiego [6]. Również Tylikowski [7] użył dynamicznego modelu belki z naklejonymi akuatorami i sensorami do wprowadzenia strategii kontroli Liapunowa użytecznej zwłaszcza w układach, w których współistnieją akulatory i czujniki. Dynamiczne naprężenia od odkształceń na powierzchni belki zostały wyznaczone z uwzględnieniem sprzężenia dynamicznego pomiędzy belką i akuatorem oraz z uwzględnieniem skończonej grubości (i sztywności) warstwy kleju.

Wpływ obecności warstwy kleju o skończonej sztywności na ścinanie, na charakterystyki częstotliwościowe drgań poprzecznych płyty, naprężeń stycznych w warstwie kleju i przemieszczeń radialnych akuatora, pokazują wyniki analitycznej pracy Tylikowskiego [8]. W innej pracy tego samego autora [9] zbadano wpływ odklejenia się fragmentu piezoakuatora od macierzystej struktury na odpowiedź dynamiczną konstrukcji. Rozpatrzono przypadek belki oraz cienkościennego wału kompozytowego. Całościowy dynamiczny model belki z piezoelektrycznym akuatorem zaproponował Pietrzakowski [10]. Lee i Moon [11] wprowadzili nowe rozłożenie czujników/akuatorów, które mierzą i wywołują poszczególne postacie drgań. Tzou wraz z Fu [12] przeanalizowali modele płyty z posegmentowanymi czujnikami oraz akuatorami i wykazali, iż podział piezoelementów polepsza możliwości obserwacji i kontroli układu. Również Tylikowski [13] zasymulował drgania cienkiej płyty i tarczy z naklejonymi posegmentowanymi piezoakuatorami. Zaprojektowane przez Kumara, Bhalla'ego i Crossa [14] piezoelektryczne akulatory ze stałymi właściwościami w szerokim paśmie częstotliwości, wydają się być właściwymi do zastosowania układach podlegających wymuszeniu stochastycznemu charakteryzującym się występowaniem szerokiego spektrum częstotliwości. Piezoelektryczne włókna wprowadzane w materiały kompozytowe mogą stanowić alternatywę dla stosowanych dotychczas monolitycznych łąt naklejonych na powierzchni struktury macierzystej. Wpływ kształtu na funkcjonalność piezoakuatora został zbadany przez Pourki'ego [15]. W nowatorskiej pracy Tylikowski [16] przeprowadził analizę obszaru stateczności drgań parametrycznych płyty poddanej działaniu sił jawnie zależnych od czasu działających w płaszczyźnie środkowej, z uwzględnieniem sprzężenia elektromechanicznego (napięcia generowanego na akuatorze pod wpływem odkształcenia) tak, by spełnić równanie warstwy wykonanej z materiału piezoelektrycznego.

1.1.3. Obiekt rzeczywisty

Samoloty, o których mowa w poprzednim punkcie, przedstawione są na poniższej fotografii. Są to polskie konstrukcje, zaprojektowane i wytwarzane przez znane i cenione ośrodki myśli technicznej takie jak Instytut Lotnictwa w Warszawie (I-23), Polskie Zakłady Lotnicze w Mielcu (M-28) oraz firmę Margański & Mysłowski z Bielska-Białej. Do analizy wibroakustycznej wybrana została struktura samolotu M-28. Jest to dwusilnikowy górno-płat o napędzie turbośmigłowym, konstrukcji metalowej (nitowanej). Zdecydowały o tym następujące czynniki:

- występuje w wersji transportującej ludzi (19 miejsc pasażerskich),
- jego konstrukcja jest stale dopracowywana,

- jest produktem eksportowym (odbiorcy w USA, Wenezueli, Kolumbii, Wietnamie, Indonezji i Nepalu),
- jest produkowany w największej (spośród wymienionych) liczbie egzemplarzy,
- opis matematyczny struktury metalowej (M-28) jest zdecydowanie prostszy niż kompozytowej (I-23).



Fot. 1. Od lewej, od góry kolejno: M-28 Skytruck/Bryza, AT-3, EM-11 Orka, I-23 Manager



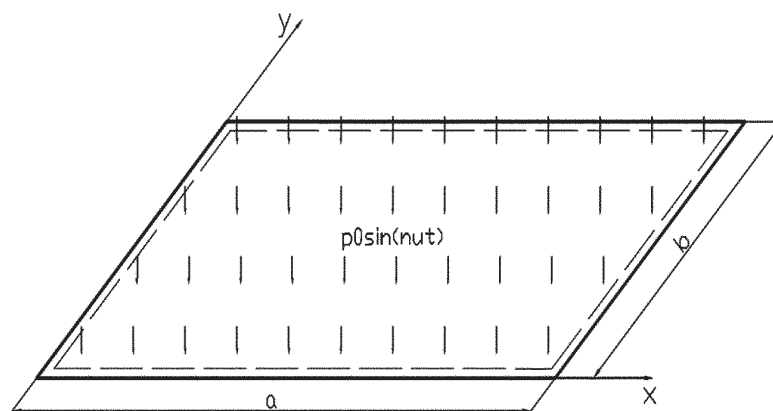
Fot. 2. Prawa burta ogona Irydy. Linie nitów wyznaczają opisywane prostokąty

Po zapoznaniu się z modelem MES konstrukcji tego płatowca zdecydowano, że szczegółowej analizie poddana zostanie aluminiowa płyta (moduł Younga $E = 70,6$ MPa, liczba Poissona $\nu = 0,3$) o grubości $h = 0,59$ mm, i wymiarach 350 mm x 90 mm. Stanowi ona najmniejszą, niejako podstawową „jednostkę” poszycia kadłuba samolotu. A jej wymiary można uznać za typowe (uśrednione) dla większości prostokątów wyznaczonych przez wręgi i podłużnice. Oględziny samolotów Iskra oraz Iryda (fot. 2.) potwierdziły słuszność dokonanego wyboru wskazując jednoznacznie, iż ów element (stosunek boków około 1:4) budowy płatowca, jest charakterystyczny dla poszycia typowej metalowej konstrukcji lotniczej. Oznacza to, że wyniki pracy łatwo będzie można odnieść do innych podobnych samolotów takich, jak wspomniany już AT-3 lub będący stale w użytkowaniu Antonow An-8 (protoplasta M-28).

1.2. Zdefiniowanie celu i zakresu pracy

1.2.1. Założenia

Do analizy wybrano fragment poszycia kadłuba samolotu M-28 (płyta prostokątna). Kabina płatowca nie jest hermetyczna wobec czego nie ma potrzeby uwzględniania (około dwukrotnej dla maksymalnego pułapu wynoszącego 6000 m) różnicy pomiędzy ciśnieniem panującym we wnętrzu samolotu a ciśnieniem atmosferycznym panującym na zewnątrz. W pracy całkowicie pominięto wpływ wszelkich zewnętrznych naprężeń błonowych występujących w rzeczywistości w poszyciu kadłuba. Z literatury [17] wiemy jednak, że w przypadku ściskanych fragmentów poszycia częstości własne drgań tych płyt będą niższe niż częstości własne drgań płyty nie poddanej działaniu sił ściskających. Natomiast w przypadku płyt przenoszących naprężenia rozciągające sytuacja jest odwrotna. Jak już nadmieniono przeanalizujemy drgania aluminiowej płyty prostokątnej o grubości 0,59 mm o wymiarach poprzecznych $a = 350$ mm, $b = 90$ mm. Płyta jest podparta przegubowo na wszystkich brzegach, co zaznaczono na poniższym rysunku schematycznym (rys. 1.1). Przyjęty sposób podparcia (p. przegubowe) nie odzwierciedla wiernie rzeczywistego sposobu mocowania płyty, której brzegi są nitowane do wręg i podłużnic. Wiemy jednak, że w przypadku ustrojów cienkościennych wpływ warunków brzegowych wraz z odległością szybko zanika, czyniąc nasz model pod tym względem wystarczająco dobrym przybliżeniem realnego obiektu.



Rys. 1.1. Analizowana płyta

Do analiz wykorzystamy teorię płyt Kirchhoffa. W tym celu przyjmujemy następujące założenia upraszczające:

- proste prostopadłe do powierzchni środkowej płyty pozostają również prostymi prostopadłymi do odkształconej powierzchni środkowej,
- naprężenia w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej zanedbywalnie małe w porównaniu do innych naprężeń,
- grubość płyty jest wielokrotnie mniejsza od jej pozostałych wymiarów,
- ugięcie płyty jest tego samego rzędu wielkości co grubość płyty,
- przemieszczenia styczne do powierzchni środkowej są znacznie mniejsze od ugięcia w kierunku prostopadłym,
- składowe stanu odkształcenia są małe.

Źródłem hałasu jest śmigło. Częstotliwość tego dźwięku jest iloczynem prędkości obrotowej (wyrażonej w obr/sek) i liczby łopat śmigła. W naszym wypadku przyjmujemy, że wynosi 100 Hz. Fala dźwiękowa jest falą podłużną kulistą. Jednak mając na uwadze niewielkie wymiary płyty w stosunku do odległości jaka dzieli ją od źródła dźwięku (stosunek jak 1:5 lub mniej dla odleglejszych części kadłuba), z dostatecznie dobrym przybliżeniem możemy przyjąć, iż ciśnienie akustyczne jest jednorodne (stałe) wzdłuż wymiarów płyty. O ile nie zaznaczono inaczej, powyższe założenia obowiązywać będą w całej pracy. W rozdziałach, w których analizowane są drgania wywołane naklejonym piezoelementem pominiemy masę piezoceramicznej łaty, a także wpływ warstwy kleju o skończonej sztywności na ścianie.

1.2.2. Sformułowanie zadania

Efektym zrealizowania projektu badawczo rozwojowego będzie zaproponowanie metody zmniejszenia hałasu wewnętrznego poprzez aktywną redukcję drgań ścianek kadłuba płatowca. Sama redukcja drgań osiągnięta zostanie poprzez odpowiednie sterowanie piezoceramicznymi aktuatorami, wzbudzającymi takie drgania płyty, które współistniejąc z drganiami wymuszonymi hałasem od śmigieł poskutkują zmniejszeniem poziomu ciśnienia akustycznego wewnątrz samolotu. Za kryterium oceny poprawy warunków akustycznych w kabinie samolotu przyjęto wartość skuteczną prędkości drgań płyty. Wartość skuteczną niesie informację o energii zjawiska, a jednocześnie ma wymiar wielkości fizycznej – stąd jej duża przydatność w badaniu procesów szybkozmiennych.

Celem pracy było przeanalizowanie drgań płyty prostokątnej, przed naklejeniem piezoelementów oraz po ich naklejeniu, pod kątem możliwości zastosowania zaproponowanej metody redukcji hałasu.

2. MODEL DRGANIOWY PŁYTY PODDANEJ WYMUSZENIU AKUSTYCZNEMU

2.1. Wyprowadzenie zależności

W tym punkcie zajmiemy się drganiami płyty, o której była mowa w punkcie 1. Jej sztywność walcową oznaczono przez D . Nie uwzględniamy tłumienia wewnętrznego. Równanie różniczkowe wymuszonych drgań płyty bez tłumienia ma postać:

$$D\Delta^2 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = p(x, y, t). \quad (2.1)$$

W tym przypadku wymuszenie stanowi ciśnienie akustyczne jednorodne względem zmiennych x, y ($p_z = const$), zmieniające się w czasie z częstotliwością ν

$$p(x, y, t) = p_z \sin(\nu t). \quad (2.2)$$

Równanie (2.1) jest równaniem niejednorodnym o jednorodnych warunkach brzegowych ((2.6), (2.7)). Można je rozwiązać metodą rozdzielania zmiennych (Fouriera).

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y), \quad (2.3)$$

funkcje własne $W_{mn}(x, y)$ przewidziano w postaci

$$W_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (2.4)$$

Spełniają one dobrze założenia tj. zerowe przemieszczenia poprzeczne płyty na brzegach i brak momentu reakcyjnego na brzegach. Przemieszczenia opisuje zależność (2.4), natomiast momenty gnące dane są wzorami

$$\begin{aligned} M_x &= D \left(\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \right), \\ M_y &= D \left(\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Powyższe założenia można zapisać w postaci odpowiednich (jednorodnych) warunków brzegowych

$$\begin{aligned} W_{mn}(0, y) &= 0, & W_{mn}(a, y) &= 0, \\ W_{mn}(0, y) &= 0, & W_{mn}(b, y) &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_{mn}(0, y)}{\partial x^2} &= 0, & \frac{\partial^2 W_{mn}(a, y)}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 W_{mn}(0, y)}{\partial y^2} &= 0, & \frac{\partial^2 W_{mn}(b, y)}{\partial y^2} &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

po podstawieniu zależności (2.3) do równania (2.1) i obliczeniu odpowiednich pochodnych cząstkowych lewą stroną równania można zapisać w postaci

$$L = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D\alpha_{mn} T_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \rho h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 T_{mn}(t)}{dt^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.8)$$

gdzie

$$\alpha_{mn} = \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right]. \quad (2.9)$$

Prawą stronę równania rozwinieemy w szereg Fouriera

$$p_z(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{p_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.10)$$

współczynniki $a_{p_{mn}}$ są określone zależnością

$$a_{p_{mn}} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p_z(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (2.11)$$

po dwukrotnym scałkowaniu po obszarze $[0, a] \times [0, b]$, otrzymujemy

$$a_{p_{mn}} = \frac{4p_z(\cos(m\pi) - 1)(\cos(n\pi) - 1)}{mn\pi^2}. \quad (2.12)$$

Zatem można zapisać prawą stronę równania w następującej postaci

$$P = \sin(\nu t) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4p_z(\cos(m\pi) - 1)(\cos(n\pi) - 1)}{mn\pi^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (2.13)$$

Obydwie strony równania można pomnożyć przez funkcje ortogonalne $\frac{4}{ab} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right)$, a następnie dwukrotnie scałkować po obszarze $[0, a] \times [0, b]$, co prowadzi do warunku

$$\begin{aligned} n &= i, \\ m &= j, \end{aligned} \quad (2.14)$$

wobec czego, lewa strona wygląda następująco:

$$L = \alpha_{ij} D T_{ij}(t) \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin^2\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{j\pi y}{b}\right) dx dy + \rho h \frac{d^2 T_{ij}(t)}{dt^2} \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin^2\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{j\pi y}{b}\right) dx dy \quad (2.15)$$

a prawa strona równania

$$P = \sin(\nu t) \frac{4p_z(\cos(i\pi) - 1)(\cos(j\pi) - 1)}{ij\pi^2} \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin^2\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{j\pi y}{b}\right) dx dy. \quad (2.16)$$

Całka

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{j\pi y}{b}\right) dx dy = \frac{ab}{4}, \quad (2.17)$$

zatem równanie (2.1) przyjmuje postać

$$\alpha_{ij} D T_{ij}(t) + \rho h \frac{d^2 T_{ij}(t)}{dt^2} = \frac{4p_z(\cos(i\pi) - 1)(\cos(j\pi) - 1)}{ij\pi^2} \sin(\nu t). \quad (2.18)$$

Do równania wstawić można co następuje:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} D &= k \\ \rho h &= m \\ T_{ij}(t) &= y \\ \frac{4p_z (\cos(i\pi) - 1)(\cos(j\pi) - 1)}{ij\pi^2} &= F \end{aligned} \quad (2.19)$$

by otrzymać równanie oscylatora harmonicznego (bez tłumienia) z wymuszeniem:

$$ky + my'' = F \sin(\nu t). \quad (2.20)$$

Jest to równanie niejednorodne, wobec czego jego rozwiązanie przyjmiemy jako sumę całki ogólnej równania jednorodnego i całki szczególnej równania niejednorodnego.

$$y = y_1 + y_2. \quad (2.21)$$

Całkę ogólną y_1 RJ równania (2.20) wyznaczmy posługując się podstawieniem Eulera

$$y = e^{rx}. \quad (2.22)$$

Równanie charakterystyczne ma wyznacznik ujemny, więc otrzymujemy dwa różne pierwiastki zespolone

$$\begin{aligned} r_1 &= i\sqrt{\frac{k}{m}}, \\ r_2 &= -i\sqrt{\frac{k}{m}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Zatem całka ogólna y_1 równania (2.20) jest równa

$$y_1 = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad (2.24)$$

Całki szczególnej y_2 RN szukamy metodą przewidywań

$$y_2 = C_3 \sin(\nu t) + C_4 \cos(\nu t) \quad (2.25)$$

po podstawieniu powyższego do równania (2.20) otrzymujemy

$$\left[C_3(k - m\nu^2)\right] \sin(\nu t) + \left[C_4(k - m\nu^2)\right] \cos(\nu t) = F \sin(\nu t) \quad (2.26)$$

Wynika z powyższego, iż jeśli F oraz $(k - m\nu^2)$ są różne od zera, to stałe

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{F}{k - m\nu^2} \\ C_4 &= 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Powyższe założenia oznaczają, iż równanie opisuje drgania wymuszone, a częstotliwość wymuszenia musi być różna od częstotliwości drgań własnych układu (rezonans). Do wyrażenia (2.24) w miejsce pierwiastka $\sqrt{\frac{k}{m}}$ wstawmy ω . Możemy już zapisać całkę ogólną równania (2.20). Ma ona postać:

$$y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{F}{k - m\nu^2} \sin(\nu t). \quad (2.28)$$

Stałe C_1 oraz C_3 wyznaczmy przyjmując następujące warunki początkowe

$$\begin{aligned} y(t=0) &= 0 \\ y'(t=0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

wynika stąd, że

$$\begin{aligned} C_1 &= 0, \\ C_2 &= -\frac{F\nu}{k - m\nu^2} \frac{1}{\omega}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Co pozwala zapisać gotowe rozwiązanie równania (2.20)

$$y = \frac{F}{k - m\nu^2} \left(\sin(\nu t) - \frac{\nu}{\omega} \sin(\omega t) \right), \quad (2.31)$$

czyli, jeśli cofnąć podstawienia (2.19), znaleźliśmy rozwiązanie równania (2.18)

$$T_{ij}(t) = \frac{4p_z(\cos(i\pi) - 1)(\cos(j\pi) - 1)}{ij\pi^2 \rho h(\omega_{ij}^2 - \nu^2)} \left(\sin(\nu t) - \frac{\nu}{\omega_{ij}} \sin(\omega_{ij} t) \right). \quad (2.32)$$

W metodzie Fouriera poszukujemy rozwiązania będącego iloczynem funkcji $T(t)$ i $W(x, y)$. Ponieważ rozwiązaliśmy zarówno zagadnienie brzegowe ($W(x, y)$), jak i początkowe ($T(t)$), możemy już zapisać kompletne rozwiązanie równania opisującego poprzeczne przemieszczenia punktów drgającej płyty. Ma ono następującą postać

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4p_z(\cos(i\pi) - 1)(\cos(j\pi) - 1)}{ij\pi^2 \rho h(\omega_{ij}^2 - \nu^2)} \left(\sin(\nu t) - \frac{\nu}{\omega_{ij}} \sin(\omega_{ij} t) \right) \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right). \quad (2.33)$$

Ostatnim etapem jest obliczenie wartości skutecznej prędkości drgań płyty. Jak już wspomnieliśmy w rozdziale pierwszym, zdecydowano się na tę wielkość, ponieważ pozwala bezpośrednio analizować proces drganiowy pod względem energetycznym. Jej kwadrat natomiast, czyli wartość średniokwadratowa (zwana również „amplitudą mocy”), jest wprost proporcjonalny do mocy źródła dźwięku. Wielkość ta zdefiniowana jest jako pierwiastek ze średniokwadratowej (w przedziale czasu od t_1 do t_2) wartości prędkości, scałkowanej po obszarze płyty $[axb]$.

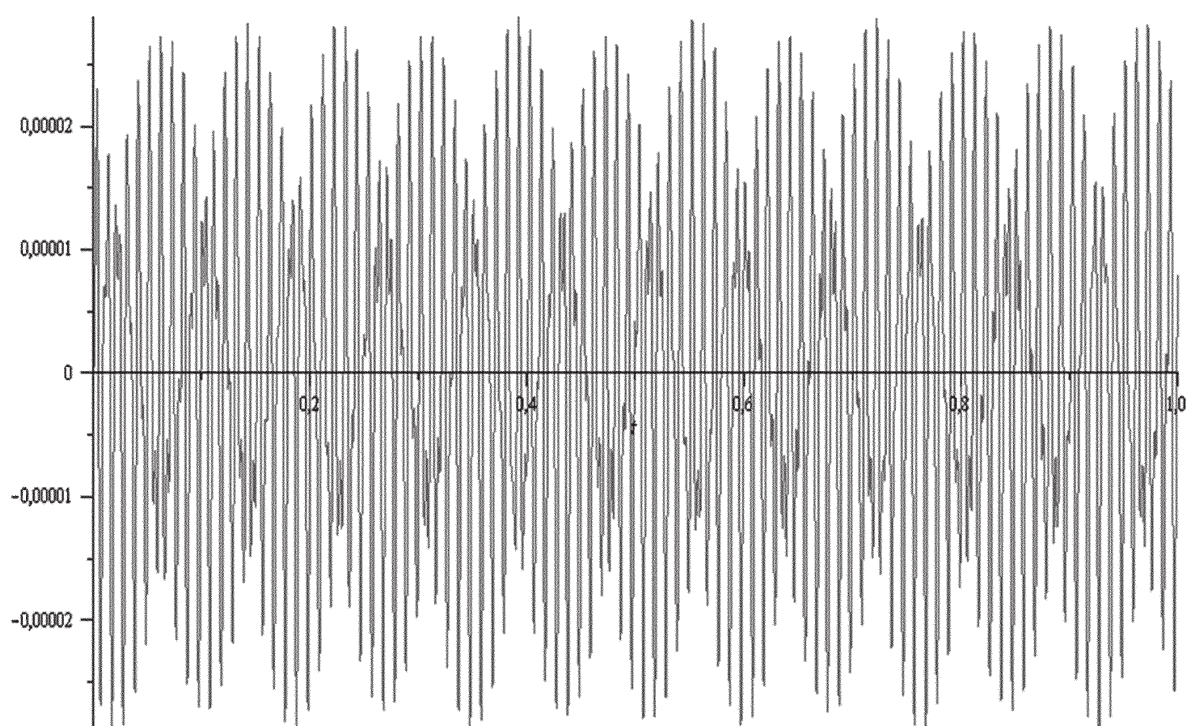
$$v_{RMS} = \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \int_0^b v^2(x, y, t) dx dy dt}{ab(t_2 - t_1)}}. \quad (2.34)$$

Procedura ze skryptu najpierw (numerycznie) oblicza v_{RMS}^2 , a następnie z wyznaczonej liczby wyciągany jest pierwiastek. Zwróćmy uwagę, że rozwiązanie $w(x, y, t)$ jest sumą $i \cdot j$ funkcji własnych. Zatem $v(x, y, t)$ również jest sumą $i \cdot j$ funkcji własnych. Oznacza to, że być w zgodzie z definicją v_{RMS} musimy najpierw obliczyć sumę złożoną z $i \cdot j$ funkcji własnych $v(x, y, t)$ a dopiero potem ją podnieść do kwadratu i scałkować po dx, dy, dt . Jednak taka kolejność wykonywania działań okazuje się być znacznie bardziej czasochłonna, niż na pozór błędna metoda: obliczenia sumy kwadratów (zamiast kwadratu sumy).

Jednak, gdy zauważymy, że wszystkie całki „mieszane” gdzie $i = j$ są zerowe, to mamy pewność, iż ten sposób obliczania v_{RMS} jest poprawny. Dzieje się tak, ponieważ dla $i = j$ funkcje $\sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right)$ oraz $\sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right)$ są wzajemnie ortogonalne. Powyższy tok rozumowania został sprawdzony i jego słuszność potwierdzona numerycznym eksperymentem. Uzyskano w ten sposób przynajmniej o rząd wielkości krótszy czas obliczeń v_{RMS} .

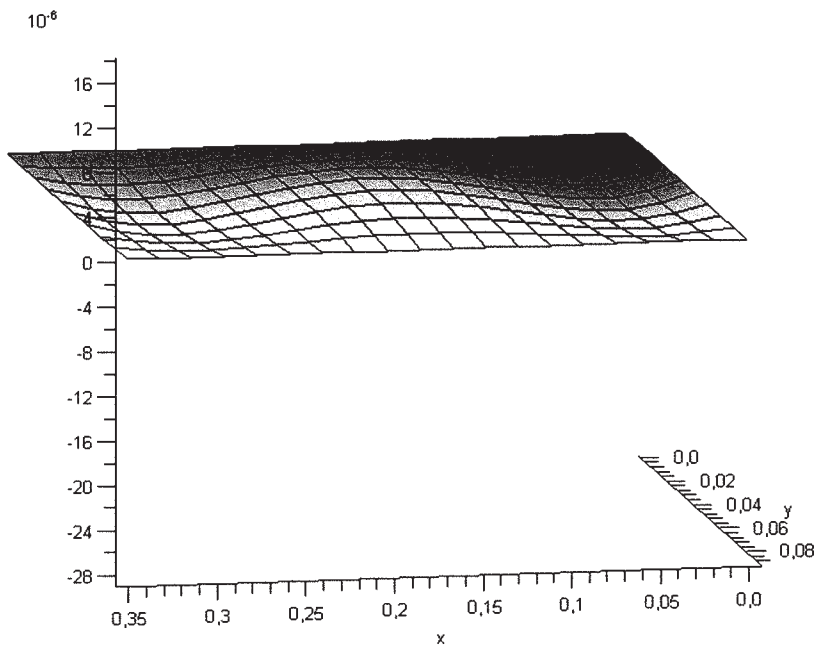
2.2. Rezultaty obliczeń i wnioski

Na poniższych wykresach na osiach pionowych odłożone zostało wychylenie poprzeczne punktów płyty w metrach. Przebieg czasowy położenia punktu środkowego płyty, przy wymuszeniu akustycznym 120 dB o częstotliwości 100 Hz, przedstawiony jest na poniższym rysunku ($i \cdot j = 100$). Przebieg czasowy wychylenia punktu środkowego płyty jest funkcją okresową (o częstotliwości 12 Hz), lecz nie jest funkcją trygonometryczną – zatem nie możemy go nazwać dudnieniem pomimo, że powstał w wyniku złożenia dwóch funkcji trygonometrycznych: drgań własnych płyty (187,9 Hz) oraz wymuszenia akustycznego.



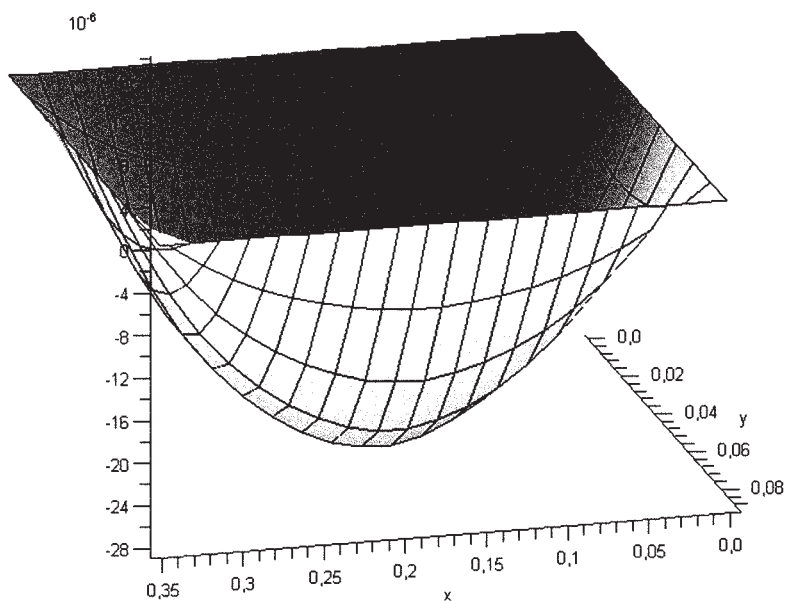
Rys. 2.1. Wychylenie punktu środkowego płyty w funkcji czasu

Postać drgań płyty ($i \cdot j = 100$) pokazana jest na rysunkach 2.2 oraz 2.3. Dominuje pierwsza postać drgań własnych, choć widoczny jest także nieznaczny udział również piątej (trzy półfale po x , jedna po y) postaci drgań własnych (rys. 2.2).



Rys. 2.2. Piąta postać drgań własnych płyty

Rys. 2.3. Pierwsza, dominująca postać drgań własnych płyty



Obliczenia v_{RMS} ze względu na czasochłonność ich wykonania zostały przeprowadzone dla $i \cdot j = 25$ funkcji własnych. Średnia z przedziału czasu od 10. do 12. sekundy drgań przy wymuszeniu 100 Hz v_{RMS} wynosi 0,005851 m/s. Parametry obliczeń dobrane tak, by błąd względny nie przekraczał 2 %. Pozostałe wyniki przedstawiono w tabeli.

Tab. 2.1. Zestawienie v_{RMS} w zależności od częstotliwości wymuszającej

Częstotliwość wymuszenia [Hz]	Wartość v_{RMS} [m/s]
50	0,00226
60	0,00281
70	0,00342
80	0,00410
90	0,00490
100	0,00585
110	0,00701
120	0,00849
130	0,01043
140	0,01315
150	0,01726
180	0,09089
185	0,25008
187,87	60,8044
190	0,35450
200	0,06278
220	0,02496
240	0,01672

Drgania wzrastają wraz ze wzrostem częstotliwości wymuszającej. Dla wymuszenia 187,87 Hz (pierwsza częstotliwość własna) uzyskujemy rezonans, wówczas obliczona wg powyższego algorytmu v_{RMS} osiąga 60,8 m/s.

Wnioski

Przy założonych parametrach fizycznych układu, wzbudzana jest głównie pierwsza postać drgań własnych (rys. 2.3). Rokuje to dobrze w kierunku aktywnej redukcji drgań. Mianowicie, najprawdopodobniej wystarczy umieszczenie na płycie tylko jednego aktuatora, co jest istotnym uproszczeniem zarówno układu sterowania, jak i montażu. Przełoży się to wprost na koszt i łatwość zaaplikowania zaproponowanej metodyki redukcji hałasu w rzeczywistej konstrukcji.

3. MODEL DRGANIOWY PŁYTY PODDANEJ WYMUSZENIU AKUSTYCZNEMU Z UWZGLĘDNIENIEM WISKOTYCZNEGO TŁUMIENIA WEWNĘTRZNEGO

3.1. Wyprowadzenie zależności

W drugim drganiowym modelu płyty uwzględnimy wiskotyczne tłumienie wewnętrzne. W tym celu do równania (2.1) dodany zostanie człon odpowiedzialny za uwzględnienie tarcia w materiale. Płyta, jak nadmieniono w rozdziale pierwszym, wykonana jest z blachy aluminiowej, więc wpływ tłumienia wewnętrznego nie powinien być bardzo duży. Jednak możemy oczekiwać, że drgania układu nie będą już narastały do nieskończoności w przypadku równości częstotliwości wymuszającej i którejś z częstotliwości drgań własnych. Przyjmujemy, że wartość stałej pełzania λ nie jest zależna od wychylenia (brak nieliniowości). Oczywiście także i tym razem korzystamy z metody rozdzielania zmiennych Fouriera przyjmując, że rozwiązanie dane jest iloczynem (2.3) funkcji zależnej od czasu i funkcji brzegowej. Założenia się nie zmieniają, więc warunki brzegowe (2.6) i (2.7) zachowują ważność, a co za tym idzie nie ma potrzeby zmiany postaci funkcji $W(x, y)$ (2.4).

$$D\Delta^2 w(x, y, t) + \lambda D\Delta^2 \left[\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} \right] + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = p(x, y, t). \quad (3.1)$$

Prawa strona równania drgań płyty nie ulega zmianie. Po wymnożeniu przez funkcje ortogonalne i scałkowaniu po obszarze płyty jest dana zależnością:

$$P = \frac{4p_z (\cos(i\pi) - 1)(\cos(j\pi) - 1)}{ij\pi^2} \sin(\nu t). \quad (3.2)$$

Natomiast lewa strona równania (3.1) została rozbudowana o człon związany z tłumieniem. Obecnie dana jest sumą trzech składników, można zatem dalej zajmować się jedynie owym nowym członem

$$L' = \lambda D\Delta^2 \left[\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} \right], \quad (3.3)$$

a resztę składników sumy, bez powtarzania obliczeń, przepisać z poprzedniego modelu. Po podstawieniu (2.3) do powyższego, otrzymujemy

$$L' = \lambda D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} \frac{dT_{mn}(t)}{dt} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (3.4)$$

Pomnóżmy powyższe przez funkcje ortogonalne $\frac{4}{ab} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right)$, a następnie dwukrotnie scałkujemy po obszarze $[0, a] \times [0, b]$, co sprowadzi (uwzględniając warunek (2.14)) wyrażenie (3.4) do postaci

$$L' = \frac{4\lambda D}{ab} \alpha_{ij} \int_0^a \int_0^b \frac{dT_{ij}(t)}{dt} \sin^2\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{j\pi y}{b}\right) dx dy. \quad (3.5)$$

Wykorzystując (2.17) zapiszemy

$$L' = \alpha_{ij} D \lambda \frac{dT_{ij}(t)}{dt}, \quad (3.6)$$

i dodajmy ten składnik do lewej strony równania (2.18), by otrzymać pełną lewą stronę równania (3.1)

$$L = \alpha_{ij} D T_{ij}(t) + \alpha_{ij} D \lambda \frac{dT_{ij}(t)}{dt} + \rho h \frac{d^2 T_{ij}(t)}{dt^2}. \quad (3.7)$$

Możemy już zapisać równanie (3.1) w całości

$$\alpha_{ij} D T_{ij}(t) + \alpha_{ij} D \lambda \frac{dT_{ij}(t)}{dt} + \rho h \frac{d^2 T_{ij}(t)}{dt^2} = \frac{4p_z(\cos(i\pi) - 1)(\cos(j\pi) - 1)}{ij\pi^2} \sin(\nu t). \quad (3.8)$$

Ponownie dokonajmy podstawienia (2.19) uzupełniając je tylko o stałą tłumienia

$$c = \alpha_{ij} D \lambda. \quad (3.9)$$

W wyniku czego otrzymaliśmy równanie drgań wymuszonych oscylatora harmonicznego z tłumieniem wiskotycznym.

$$ky + cy' + my'' = F \sin(\nu t). \quad (3.10)$$

Również i tym razem rozwiązanie powyższej zależności przewidujemy w postaci (2.21). Znajdźmy wpierw całkę ogólną. W tym celu dokonajmy podstawienia Eulera (2.22), które doprowadzi nas do równania charakterystycznego o postaci

$$mr^2 + cr + k = 0. \quad (3.11)$$

Wyznacznik tego równania może przyjmować wszystkie trzy wartości (ujemną, zerową lub dodatnią), a którą z nich przyjmie zależec będzie od wartości stałej pełzania λ . Rozpatrzmy te przypadki:

a) wyznacznik ujemny – tłumienie podkrytyczne

$$\Delta = c^2 - 4mk < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < \sqrt{\frac{4\rho h}{D\alpha_{ij}}} = \frac{2}{\omega_{ij}}, \quad (3.12)$$

wówczas otrzymujemy dwa różne pierwiastki zespolone

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-c + i\sqrt{4km - c^2}}{2m}, \\ r_2 &= \frac{-c - i\sqrt{4km - c^2}}{2m}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

a zatem całka ogólna ma postać

$$y_{1a} = e^{-\frac{c}{2m}t} \left(C_1^a \cos\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t\right) + C_2^a \sin\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t\right) \right). \quad (3.14)$$

b) wyznacznik zerowy – tłumienie krytyczne

$$\Delta = c^2 - 4mk = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < \sqrt{\frac{4\rho h}{D\alpha_{ij}}} = \frac{2}{\omega_{ij}}. \quad (3.15)$$

Wówczas równanie (3.11) ma jeden pierwiastek podwójny

$$r_{1,2} = -\frac{c}{2m}, \quad (3.16)$$

a całka ogólna równa się

$$y_{1b} = e^{-\frac{c}{2m}t} (C_1^b t + C_2^b). \quad (3.17)$$

c) wyznacznik dodatni – tłumienie nadkrytyczne

$$\Delta = c^2 - 4mk > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda > \sqrt{\frac{4\rho h}{D\alpha_{ij}}} = \frac{2}{\omega_{ij}}, \quad (3.18)$$

oznacza, iż są dwa różne pierwiastki rzeczywiste

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}, \\ r_2 &= \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

prowadzące do całki ogólnej jak następuje

$$y_{1c} = C_1^c e^{-\frac{c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}t} + C_2^c e^{-\frac{c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}t}. \quad (3.20)$$

Znajdziemy teraz metodą przewidywań całkę szczególną równania niejednorodnego (3.10). Tak, jak w poprzednim przypadku, tak i teraz przewidujemy ją w postaci (2.25). Po obliczeniu pochodnych i ich podstawieniu otrzymujemy wyrażenie

$$(kC_3 - c\nu C_4 - m\nu^2 C_3) \sin(\nu t) + (kC_4 + c\nu C_3 - m\nu^2 C_4) \cos(\nu t) = F \sin(\nu t), \quad (3.21)$$

dzięki któremu możemy zapisać układ dwóch równań pozwalający na wyznaczenie stałych C_3 oraz C_4

$$\begin{cases} kC_3 - c\nu C_4 - m\nu^2 C_3 = F \\ kC_4 + c\nu C_3 - m\nu^2 C_4 = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

stałe te wynoszą

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{F}{(k - m\nu^2) + \frac{c^2\nu^2}{k - m\nu^2}}, \\ C_3 &= \frac{-F \frac{c\nu}{k - m\nu^2}}{(k - m\nu^2) + \frac{c^2\nu^2}{k - m\nu^2}}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

a wówczas całka szczególna RN (3.9) przyjmuje postać

$$y_2 = \frac{F}{(k - m\nu^2) + \frac{c^2\nu^2}{k - m\nu^2}} \left(\sin(\nu t) - \frac{c\nu}{k - m\nu^2} \cos(\nu t) \right), \quad (3.24)$$

współ z każdą z trzech (3.14), (3.17) oraz (3.20) całek ogólnych RJ tworzy trzy kompletne rozwiązania RN . Wyznamy teraz brakujące stałe całek ogólnych. W tym celu musimy obliczyć pierwsze pochodne rozwiązania równania (3.10), dla wszystkich trzech przypadków

$$\begin{aligned}
y'_a &= \frac{F\nu}{(k - m\nu^2) + \frac{c^2\nu^2}{k - m\nu^2}} \left(\cos(\nu t) + \frac{c\nu^2}{k - m\nu^2} \sin(\nu t) \right) + \\
&- \frac{c}{2m} e^{-\frac{c}{2m}t} \left(C_1^a \cos\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t\right) + C_2^a \sin\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t\right) \right) + \\
&- e^{-\frac{c}{2m}t} \left(-C_1^a \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} \sin\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t\right) + C_2^a \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} \cos\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t\right) \right) \\
y'_b &= \frac{F\nu}{(k - m\nu^2) + \frac{c^2\nu^2}{k - m\nu^2}} \left(\cos(\nu t) + \frac{c\nu^2}{k - m\nu^2} \sin(\nu t) \right) + \\
&- \frac{c}{2m} e^{-\frac{c}{2m}t} (C_1^b t + C_2^b) + e^{-\frac{c}{2m}t} C_1^b \\
y'_c &= \frac{F\nu}{(k - m\nu^2) + \frac{c^2\nu^2}{k - m\nu^2}} \left(\cos(\nu t) + \frac{c\nu^2}{k - m\nu^2} \sin(\nu t) \right) + \\
&+ C_1^c \frac{c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} e^{-\frac{c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}t} + C_2^c \frac{c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} e^{-\frac{c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}t}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

przyjmując zerowe warunki początkowe (2.29) możemy wyznaczyć ich wartości

$$\begin{aligned}
C_1^a &= \frac{Fcv}{k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4 + c^2\nu^2}, \\
C_2^a &= \frac{\frac{Fc}{\sqrt{4km - c^2}}(c^2 + 2m^2\nu^2 - 2km)}{k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4 + c^2\nu^2} \\
C_1^b &= \frac{\frac{F\nu \left[c(c + \sqrt{c^2 - 4km}) + 2m(m\nu^2 - k) \right]}{(c - \sqrt{c^2 - 4km})}}{k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4 + c^2\nu^2}, \\
C_2^b &= \frac{Fcv}{k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4 + c^2\nu^2}, \\
C_1^c &= \frac{2F\nu m^2}{\sqrt{c^2 - 4km} (c^2 - c\sqrt{c^2 - 4km} + 2\nu^2 m^2 - 2km)},
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$C_2^c = \frac{2F\nu m^2 \sqrt{c^2 - 4km}}{-4km \left(6c^2 - c\sqrt{c^2 - 4km} + 2m^2\nu^2 - 2km\right) + c^2 \left(2m^2\nu^2 - c^2 + c\sqrt{c^2 - 4km}\right)}.$$

Nie cofając podstawień (2.19) (3.9) zapiszmy gotowe rozwiązanie równania (3.8)

$$\begin{aligned} T_{ij}^{podkr}(t) &= \frac{F}{(k - m\nu^2) + \frac{c^2\nu^2}{k - m\nu^2}} \left(\sin(\nu t) - \frac{c\nu}{k - m\nu^2} \cos(\nu t) \right) + \\ &+ \frac{Fc}{k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4 + c^2\nu^2} e^{-\frac{c}{2m}t} \left[\nu \cos\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t\right) + \right. \\ &\left. \frac{(c^2 + 2m^2\nu^2 - 2km)}{\sqrt{4km - c^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t\right) \right], \\ T_{ij}^{kr}(t) &= \frac{F}{(k - m\nu^2) + \frac{c^2\nu^2}{k - m\nu^2}} \left(\sin(\nu t) - \frac{c\nu}{k - m\nu^2} \cos(\nu t) \right) + \\ &+ \frac{F\nu \cdot e^{-\frac{c}{2m}t}}{k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4 + c^2\nu^2} \left(\frac{c(c + \sqrt{c^2 - 4km}) + 2m(m\nu^2 - k)}{(c - \sqrt{c^2 - 4km})} t + c \right), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} T_{ij}^{nadkr}(t) &= \frac{F}{(k - m\nu^2) + \frac{c^2\nu^2}{k - m\nu^2}} \left(\sin(\nu t) - \frac{c\nu}{k - m\nu^2} \cos(\nu t) \right) + \\ &+ \frac{2F\nu m^2}{\sqrt{c^2 - 4km} \left(c^2 - c\sqrt{c^2 - 4km} + 2\nu^2 m^2 - 2km \right)} e^{-\frac{c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}t} + \\ &- \frac{2F\nu m^2 \sqrt{c^2 - 4km}}{4km \left(6c^2 - c\sqrt{c^2 - 4km} + 2m^2\nu^2 - 2km \right) - c^2 \left(2m^2\nu^2 - c^2 + c\sqrt{c^2 - 4km} \right)} e^{-\frac{c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}t}. \end{aligned}$$

By otrzymać wyrażenia opisujące poprzeczne przemieszczenia punktów płyty wystarczy powyższe równania uzupełnić o funkcje własne (2.4)

$$\begin{aligned} w^{podkr}(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \frac{Fc}{k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4 + c^2\nu^2} \cdot \\ &\cdot e^{-\frac{c}{2m}t} \left[\nu \cos\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t\right) + \frac{(c^2 + 2m^2\nu^2 - 2km)}{\sqrt{4km - c^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t\right) \right], \end{aligned}$$

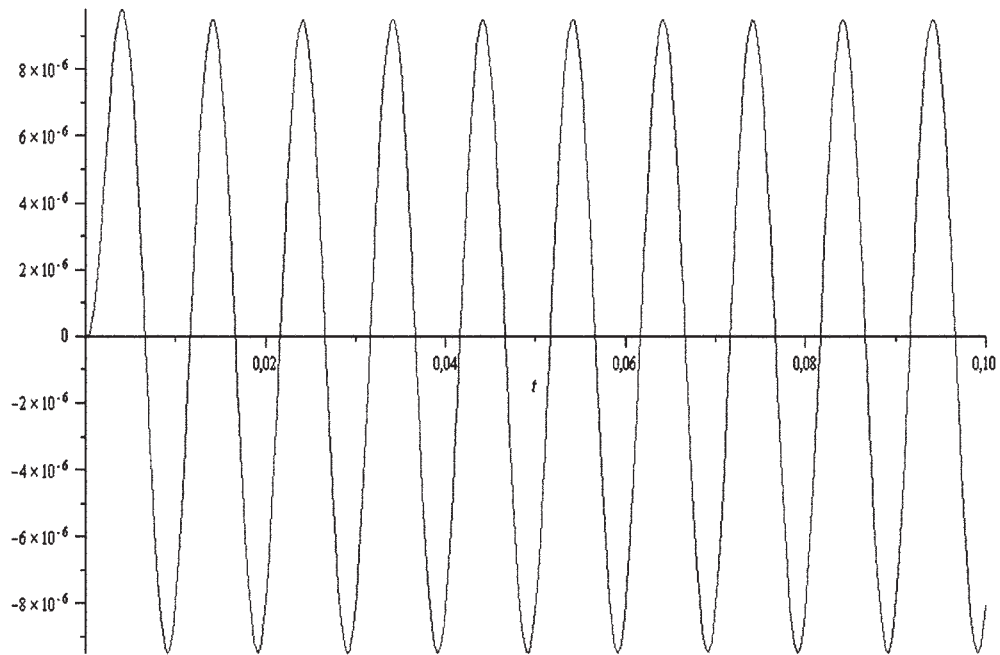
$$w^{kr}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \frac{F\nu \cdot e^{-\frac{c}{2m}t}}{k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4 + c^2\nu^2} \cdot \left[\frac{c\left(c + \sqrt{c^2 - 4km}\right) + 2m\left(m\nu^2 - k\right)}{\left(c - \sqrt{c^2 - 4km}\right)} t + c \right], \quad (3.28)$$

$$w^{nadkr}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \cdot \left(\begin{aligned} & \frac{2F\nu m^2}{\sqrt{c^2 - 4km} \left(c^2 - c\sqrt{c^2 - 4km} + 2\nu^2 m^2 - 2km \right)} e^{-\frac{c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}t} + \\ & - \frac{2F\nu m^2 \sqrt{c^2 - 4km}}{4km \left(6c^2 - c\sqrt{c^2 - 4km} + 2m^2\nu^2 - 2km \right) - c^2 \left(2m^2\nu^2 - c^2 + c\sqrt{c^2 - 4km} \right)} e^{-\frac{c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}t} \end{aligned} \right).$$

Stałą pełzania λ określimy za pomocą ilorazu $\frac{h}{\omega_{ij}}$, gdzie $2h = \frac{c}{m}$ (2.19), (3.9). Jeśli chcemy wykonać obliczenia dla tłumienia podkrytycznego, ów iloraz musi zawierać się w przedziale $< 0,1$ [18]. Dla tłumienia krytycznego iloraz równa się dokładnie jedności, natomiast w przypadku tłumienia nadkrytycznego, jest większy od jedności. Z inżynierskiego punktu widzenia tłumienie w aluminiowej płycie należy przyjąć jako słabe podkrytyczne. Jednak prowadząc rozważania czysto teoretyczne w niniejszym rozdziale rozpatrzmy również drgania silniej tłumione. W tym momencie stała pełzania λ staje się funkcją indeksów i i j . Dla pierwszej częstości własnej, przy $\frac{h}{\omega_{ij}} = 0,05$ przyjmuje wartość 0,00008471 s.

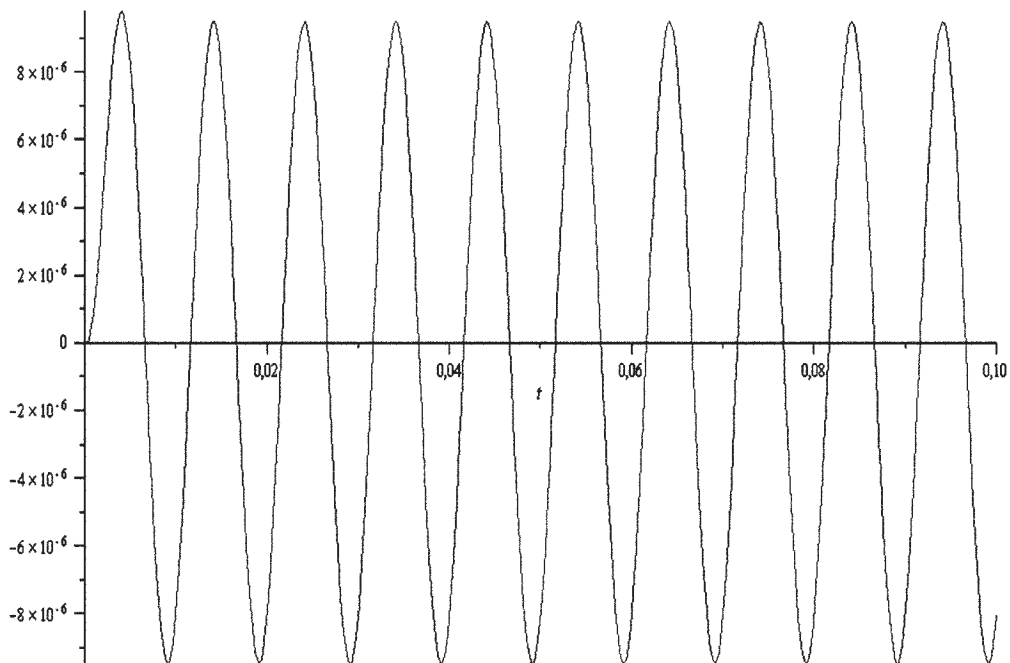
3.2. Rezultaty obliczeń i wnioski

Na osiach pionowych odłożono wychylenie poprzeczne punktów płyty w metrach. Przebieg czasowy położenia punktu środkowego płyty przy wymuszeniu akustycznym 120 dB o częstotliwości 100 Hz, oraz $\lambda_{1,1} = 0,00008471$ s przedstawiony jest na poniższym rysunku ($i \cdot j = 100$). Widoczne są szybko gasnące drgania własne. Drgania ustalone odbywają się z częstotliwością 100 Hz.



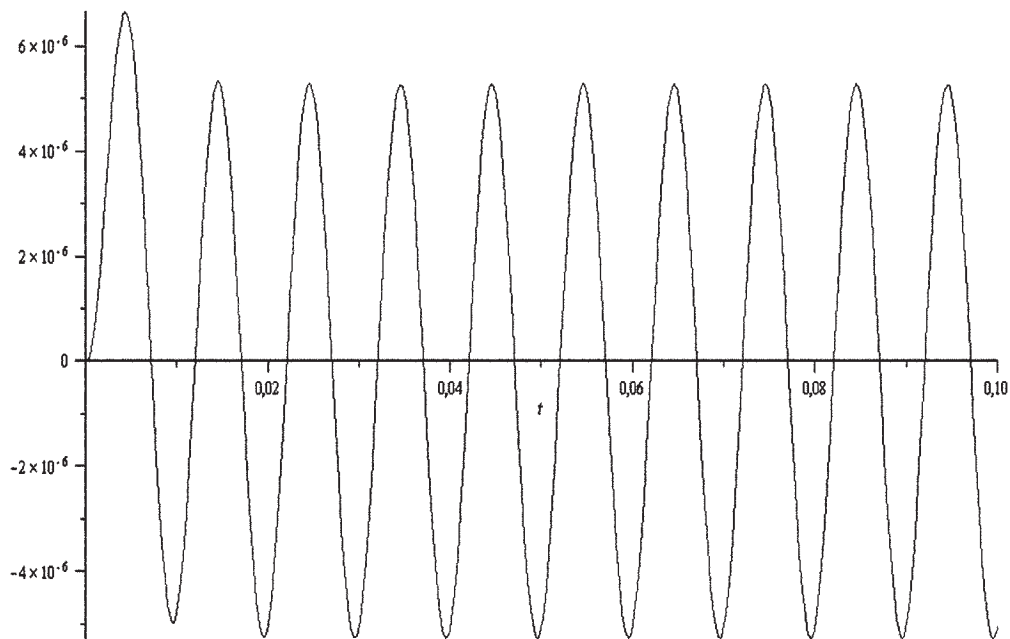
Rys. 3.1. Wychylenie punktu środkowego płyty w funkcji czasu (tłumienie słabe podkrytyczne)

Dla tłumienia krytycznego te same przebiegi wyglądają następująco



Rys. 3.2. Wychylenie punktu środkowego płyty w funkcji czasu (tłumienie krytyczne)

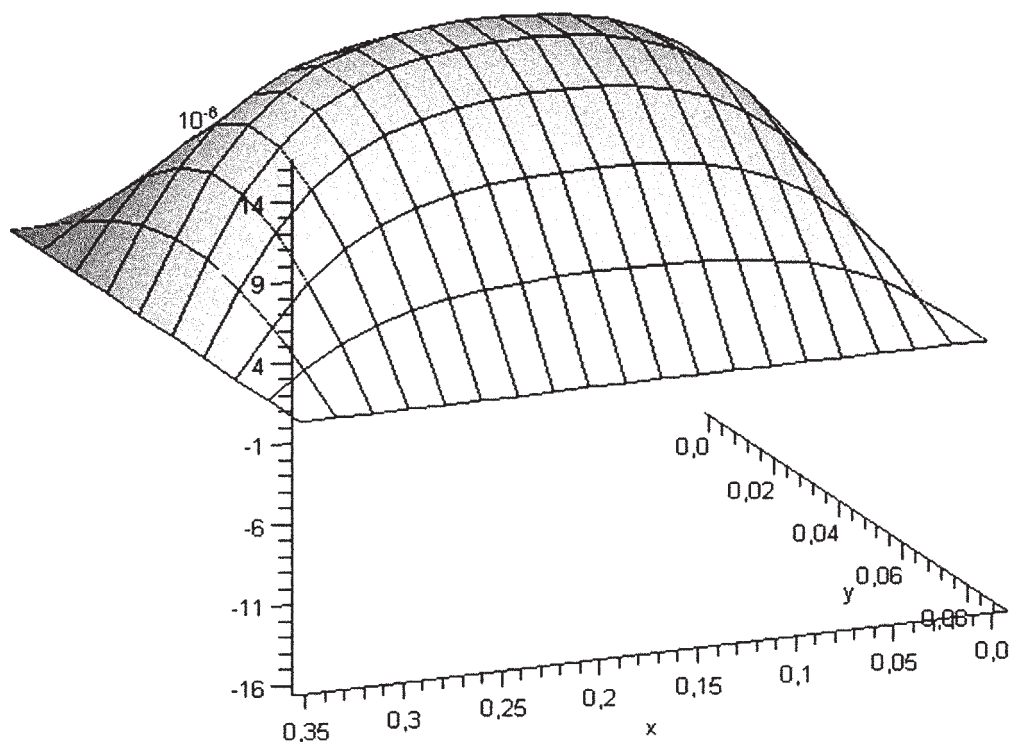
a dla tłumienia nadkrytycznego $\left(\frac{h}{\omega_{ij}} = 2 \right)$.



Rys. 3.3. Wychylenie punktu środkowego płyty w funkcji czasu (tłumienie nadkrytyczne)

Widać jak amplituda wychyleń punktu środkowego płyty nieznacznie maleje wraz ze wzrostem tłumienia. Od około 16 μm , dla tłumienia słabego podkrytycznego, przez około 10 μm dla tłumienia krytycznego, do około 5 μm dla tłumienia nadkrytycznego.

Postać drgań płyty ($i \cdot j = 100$) przedstawiono na rysunku 3.4. Poza pierwszą postacią drgań własnych praktycznie nie ujawniają się inne (wyższe). Tłumienie jest słabe podkrytyczne. Przy większej wartości stałej pełzania postać drgań jest taka sama.



Rys. 3.4. Postać drgań płyty

Obliczenia v_{RMS} ze względu na czasochłonność ich wykonania zostały przeprowadzone dla $i \cdot j = 25$ funkcji własnych. Średnia z przedziału czasu od 10. do 12. sekundy drgań przy wymuszeniu 100 Hz v_{RMS} wynosi 0,014020 m/s. Pozostałe wyniki w tabeli:

Tab. 3.1. Zestawienie v_{RMS} w zależności od częstotliwości wymuszającej

Częstotliwość wymuszenia [Hz]	Wartość v_{RMS} [m/s]
50	0,00170
60	0,00211
70	0,00257
80	0,00308
90	0,00368
100	0,00439
110	0,00525
120	0,00635
130	0,00778
140	0,00976
150	0,01269
180	0,04468
185	0,05621
187,87	0,05883
190	0,05739
200	0,036675
220	0,01788
240	0,01230

Tłumienie wewnętrzne znacznie zmniejszyło amplitudę drgań w rezonansie. Drgania płyty powoli narastają wraz ze wzrostem częstotliwości. Krok obliczeń 10 Hz zapewnia wystarczającą rozdzielczość dopóki nie zbliżymy się do rezonansu. W otoczeniu pierwszej częstotliwości własnej obserwujemy rezonans. Jest „rozmyty” właśnie ze względu na występujące w układzie tłumienie.

Wnioski

Już nawet niewielkie tłumienie wewnętrzne (słabe podkrytyczne) wystarcza, by rezonans charakteryzował się drganiami tylko o rząd wielkości większymi, niż przy częstotliwościach wymuszających znacznie odbiegających od pierwszej własnej. Bez tłumienia różnica była aż o cztery rzędy wielkości.

4. MODEL DRGANIOWY PŁYTY PODDANEJ WYMUSZENIU AKUSTYCZNEMU ORAZ KINEMATYCZNEMU

4.1. Wyprowadzenie zależności

W niniejszym punkcie zajmiemy się analizą drgań płyty Levy'ego, tj. płyty swobodnie podpartej na dwóch przeciwległych brzegach i o swobodnych (w naszym wypadku poddanych wymuszeniu kinematycznemu drganiami podłużnic) pozostałych dwóch brzegach. Tłumienie wewnętrzne w tym i każdym kolejnym rozdziale zostanie uwzględnione. Częstości drgań podłużnic przyjmiemy jako równe pierwszym częstościom własnym drgań belki, przegubowo podpartej na obydwu swych końcach o sztywności giętnej takiej, jak sztywności giętnej każdej z podłużnic. Gotowe rozwiązanie tego zagadnienia znaleźć można w monografii Osińskiego [18]. Częstość ta dana jest wzorem

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{EI k_1^4}{\rho F}}, \quad (4.0)$$

gdzie

- k_1 – pierwiastek równania charakterystycznego wynosi π/a ($k_1 = 8,98 \text{ m}^{-1}$),
- E – jest modułem Young'a materiału podłużnicy aluminium PA7 ($E = 71 \text{ MPa}$),
- ρ – jej gęstością ($\rho = 2799 \text{ kg/m}^3$),
- I – geometrycznym modułem bezwładności przekroju poprzecznego belki liczonego względem osi obojętnej zginania ($I = 0,27 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4$),
- F – polem przekroju poprzecznego belki ($F = 6,13 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$).

Wyznaczona z powyższego pierwsza częstość drgań własnych ω_1 równa się 85 Hz. Gdyby przyjąć model belki o końcach utwierdzonych wówczas ω_1 by wynosiła 193 Hz. Podłużnice nie są bezpośrednio sztywno związane z wręgami, w związku z czym zdecydowano, że bliższy rzeczywistości jest model „przegubowy”. Amplitudę drgań podłużnic przyjmiemy arbitralnie na poziomie wyznaczonej w poprzednim rozdziale amplitudy drgań wywołanych wymuszeniem akustycznym, tj. 0,01 mm. Na jednym brzegu będzie to 0,01 mm, a na drugim 90% tej wartości, by zasymulować naturalne dla rzeczywistych struktur niesymetryczności. Dwa brzegi pozostające w spoczynku odpowiadają krańcom płyty podpartej na wręgach. Drgania wręgi, czyli profilu tworzącego zamkniętą krzywoliniową obręcz, same w sobie stanowią nietrywialne zagadnienie, nazbyt skomplikowane, by zostały uwzględnione w niniejszej analizie.

Nie pomijamy dotychczasowego wymuszenia ciśnieniem akustycznym. Także i tym razem skorzystamy z metody rozdzielenia zmiennych Fouriera przyjmując, że rozwiązanie dane jest iloczynem (2.3) funkcji zależnej od czasu i funkcji brzegowej. Założenia się zmieniły, więc warunki brzegowe również musimy zmienić. Dla boków o długości b zachowują ważność warunki (2.6) i (2.7), natomiast dla boków o długości a zachowuje ważność jedynie warunek (2.7). Natomiast warunek na przemieszczenia przyjmijmy w postaci dwóch funkcji

$$\begin{aligned} \xi_1(x, t) &= A_1 \sin(\omega_p) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) & \text{dla } y = 0, \\ \xi_2(x, t) &= A_2 \sin(\omega_p) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) & \text{dla } y = b, \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdzie ω_p jest obliczoną pierwszą częstotliwością własną drgań podłużnicy, natomiast A_1 , A_2 są założonymi amplitudami drgań tych belek. Samo równanie opisujące drgania płyty nie ulega zmianie (3.1), lecz w tej sytuacji staje się ono równaniem niejednorodnym z niejednorodnymi warunkami brzegowymi (4.1). By je rozwiązać musimy sprowadzić je do równania o jednorodnych warunkach brzegowych. Uczynimy to dokonując podstawienia

$$w(x, y, t) = \xi_1(x, t) + \frac{\xi_2(x, t) - \xi_1(x, t)}{b} y + w_{nowe}(x, y, t), \quad (4.2)$$

gdzie $w_{nowe}(x, y, t)$ ma postać (2.3). Po obliczeniu odpowiednich pochodnych i przeniesieniu na prawą stronę równania członów związanych z wymuszeniem kinematycznym otrzymujemy „nowe” równanie drgań płyty, którego tym razem warunki brzegowe są jednorodne (2.6), (2.7).

$$D\Delta^2 w_{nowe}(x, y, t) + \lambda D\Delta^2 \left[\frac{\partial w_{nowe}(x, y, t)}{\partial t} \right] + \rho h \frac{\partial^2 w_{nowe}(x, y, t)}{\partial t^2} = p(x, y, t) + \left(A_1 + \frac{A_2 - A_1}{b} y \right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \left(\rho h \omega_p^2 \sin(\omega_p t) - D \frac{\pi^4}{a^4} \sin(\omega_p t) - \lambda \omega_p D \frac{\pi^4}{a^4} \cos(\omega_p t) \right). \quad (4.3)$$

Następnie rozwińmy w szereg Fouriera prawą stronę tego równania. W tym celu skorzystamy ze wzorów (2.10) i (2.11). Jeśli skorzystamy z rozdzielności mnożenia względem dodawania, to nie będziemy musieli liczyć całki z całego wyrażenia, a jedynie z jego nowej części, którą następnie dodamy (całka sumy = sumie całek) do członu związanego z ciśnieniem akustycznym (już rozwinięty w szereg (2.13)). Okazuje się jednak, iż gdy do wzoru (2.11) podstawimy człony odpowiedzialne za wymuszenie kinematyczne to po wykonaniu obliczeń otrzymamy zero. Jest to spowodowane tym, że one już są rozwinięte w szereg (jednowyrazowy). Rozpatrzmy więc dwa następujące przypadki:

- a) gdy $m > 1$, a n dowolne,
- b) gdy $m = 1$, a n dowolne.

W pierwszym przypadku, jak już nadmieniliśmy, człony odpowiedzialne za wymuszenie kinematyczne się zerują, co w prostej linii prowadzi dokładnie do rozwiązania z punktu trzeciego. Niżej zajmiemy się tylko przypadkiem, gdy $m > 1$, a n jest dowolną liczbą całkowitą z przedziału $> 1, \infty$). Po rozwinięciu w szereg (pamiętając, że $m > 1$) człon pochodzący od wymuszenia ciśnieniem akustycznym przyjmuje postać

$$p_{akust}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{8p_z(\cos(n\pi) - 1)}{n\pi^2} \sin\left(\frac{1\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (4.4)$$

Rozwińmy teraz człon o swojej genezie w wymuszeniu kinematycznym. Ponownie skorzystamy w tym celu ze wzorów (2.10), (2.11)

$$p_{kin}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(A_1 - A_2 \cos(n\pi))}{n\pi} \sin\left(\frac{1\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (4.5)$$

Zgodnie ze schematem postępowania kolejnym etapem jest pomnożenie obydwu (na razie tylko prawej) stron równania przez funkcje ortogonalne $\frac{4}{ab} \sin\left(\frac{1\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$, a następnie scałkowanie wyrażenia po obszarze płyty. Prowadzi to do warunku $n = j$. Całka

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2\left(\frac{1\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy = \frac{ab}{4} \quad (4.6)$$

W rezultacie otrzymujemy „nową” prawą stronę równania drgań płyty

$$P_{nowe} = \frac{-8p_z(\cos(j\pi) - 1)\sin(\nu t) + 2\pi(A_1 - A_2 \cos(j\pi))\left(\rho h \omega_p^2 \sin(\omega_p t) - D \frac{\pi^4}{a^4} \sin(\omega_p t) - \lambda \omega_p D \frac{\pi^4}{a^4} \cos(\omega_p t)\right)}{j\pi^2} \quad (4.7)$$

Z lewą stroną równania (4.3) postępujemy analogicznie jak z lewą stroną równania (3.1). Po przekształceniach otrzymujemy

$$L_{nowe} = \alpha_{1j} D T_{1j}(t) + \alpha_{1j} D \lambda \frac{dT_{1j}(t)}{dt} + \rho h \frac{d^2 T_{1j}(t)}{dt^2}, \quad (4.8)$$

następnie dokonamy podstawienia

$$\begin{aligned} \alpha_{1j} D &= k, \\ \rho h &= m, \\ \alpha_{1j} D \lambda &= c, \\ T_{1j}(t) &= y(t), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} -\frac{8p_z(\cos(j\pi) - 1)}{j\pi^2} &= F_{akust}, \\ \frac{2(A_1 - A_2 \cos(j\pi))\left(\rho h \omega_p^2 - D \frac{\pi^4}{a^4}\right)}{j\pi} &= F_{kin1}, \\ \frac{2(A_1 - A_2 \cos(j\pi))\lambda \omega_p D \frac{\pi^4}{a^4}}{j\pi} &= F_{kin2}, \end{aligned}$$

by zapisać równanie (4.3) w postaci sprowadzonej do równania opisującego model o jednym stopniu swobody

$$ky + cy' + my'' = F_{akust} \sin(\nu t) + F_{kin1} \sin(\omega_p t) + F_{kin2} \cos(\omega_p t). \quad (4.10)$$

Rozwiązanie tego równania składa się z sumy całki ogólnej i szczególnej. Całka ogólna (równania jednorodnego) w zależności od charakteru tłumienia rozbija się na trzy przypadki, dokładnie takie same jak w poprzednim punkcie ((3.13), (3.16), (3.19)). Całkę szczególną y_2 znajdziemy metodą przewidywań

$$y_2 = C_3 \sin(\nu t) + C_4 \cos(\nu t) + C_5 \sin(\omega_p t) + C_6 \cos(\omega_p t). \quad (4.11)$$

Gdy podstawimy powyższe oraz odpowiednie pochodne do (4.10), a następnie uporządkujemy wyrazy, z tożsamości otrzymamy układ czterech liniowych równania z czterema niewiadomymi pozwalający obliczyć wartości wszystkich czterech stałych C_3, C_4, C_5, C_6

$$\begin{cases} kC_4 + c\nu C_3 - m\nu^2 C_4 = 0, \\ kC_3 - c\nu C_4 - m\nu^2 C_3 = F_{akust}, \\ kC_5 - c\omega_p C_6 - m\omega_p^2 C_5 = F_{kin1}, \\ kC_6 + c\omega_p C_5 - m\omega_p^2 C_6 = F_{kin2}, \end{cases} \quad (4.12)$$

stąd

$$\begin{cases} C_3 = \frac{F_{akust}(k - m\nu^2)}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4}, \\ C_4 = -\frac{F_{akust}c\nu}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4}, \\ C_5 = -\frac{F_{kin1}(k - m\omega_p^2) + c\omega_p F_{kin2}}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4}, \\ C_6 = -\frac{F_{kin1}(k - m\omega_p^2) + c\omega_p F_{kin2}}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4}. \end{cases} \quad (4.13)$$

Podstawmy wyliczone stałe do wyrażenia (4.11) a następnie, dodajmy tak obliczoną całkę szczególną, do każdej z trzech całek ogólnych równania (4.10). Otrzymaliśmy tym samym trzy (zależne od charakteru tłumienia) rozwiązania tegoż równania. W przypadku tłumienia podkrytycznego

$$\begin{aligned} y_a = & \frac{F_{akust}((k - m\nu^2) - c\nu)}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} \cdot (\sin(\nu t) + \cos(\nu t)) + \\ & - \frac{F_{kin1}(k - m\omega_p^2) + c\omega_p F_{kin2}}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \cdot (\sin(\omega_p t) - \cos(\omega_p t)) + \\ & + e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \left[C_1^a \cos\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}t\right) + C_2^a \sin\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}t\right) \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

tłumienia krytycznego

$$\begin{aligned} y_a = & \frac{F_{akust}((k - m\nu^2) - c\nu)}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} \cdot (\sin(\nu t) + \cos(\nu t)) + \\ & - \frac{F_{kin1}(k - m\omega_p^2) + c\omega_p F_{kin2}}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \cdot (\sin(\omega_p t) - \cos(\omega_p t)) + \\ & + e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot (C_1^b t + C_2^b), \end{aligned} \quad (4.15)$$

i tłumienia nadkrytycznego

$$\begin{aligned}
y_c = & \frac{F_{akust} \left((k - m\nu^2) - c\nu \right)}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} \cdot (\sin(\nu t) + \cos(\nu t)) + \\
& - \frac{F_{kin1} (k - m\omega_p^2) + c\omega_p F_{kin2}}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \cdot (\sin(\omega_p t) - \cos(\omega_p t)) + \\
& + C_1^c e^{-\frac{c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t} + C_2^c e^{-\frac{c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Brakujące stałe $C_1^a, C_2^a, C_1^b, C_2^b, C_1^c, C_2^c$ parami wyznaczymy korzystając z warunków początkowych

$$\begin{aligned}
y^a(t=0) = 0, & & y^b(t=0) = 0, & & y^c(t=0) = 0, \\
y^{a'}(t=0) = 0, & & y^{b'}(t=0) = 0, & & y^{c'}(t=0) = 0,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

skąd

$$\begin{aligned}
C_1^a = & \frac{F_{akust} c\nu}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} - \frac{F_{kin1} c\omega_p + F_{kin2} (m\omega_p^2 - k)}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4}, \\
C_2^a = & \frac{F_{akust} (c^2\nu^2 - 2m\nu(k - m\nu^2))}{\sqrt{4km - c^2} (c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4)} - \frac{F_{kin1} \omega_p (2m(m\omega_p^2 - k) + c^2) + F_{kin2} c(k - m\omega_p^2)}{\sqrt{4km - c^2} (c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4)}, \\
C_1^b = & \frac{F_{akust} \left(\nu(k - m\nu^2) + \frac{c^2}{2m} \nu \right)}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} + \\
& - \frac{\left(F_{kin1} (k - m\omega_p^2) + F_{kin2} c\omega_p \right) \omega_p + \frac{c}{2m} \left(F_{kin2} (m\omega_p^2 - k) + F_{kin1} c\omega_p \right)}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4}, \\
C_2^b = & \frac{c\nu F_{akust}}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} + \frac{F_{kin2} (m\omega_p^2 - k) + F_{kin1} c\omega_p}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4}, \\
C_1^c = & \frac{F_{akust} \left[\frac{1}{2c} \left(2m(k - m\nu^2) + (c - \sqrt{c^2 - 4km})c\nu \right) - c\nu \right]}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} + \\
& - \frac{\frac{1}{2c} \left[\left(2m\omega_p - (c - \sqrt{c^2 - 4km}) \right) \cdot \left(F_{kin1} (k - m\omega_p^2) + F_{kin2} c\omega_p \right) \right] + F_{kin1} (k - m\omega_p^2) + F_{kin2} c\omega_p}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4}, \\
C_2^c = & \frac{1}{2c} \left[\frac{F_{akust} \left[2m(k - m\nu^2) + (c - \sqrt{c^2 - 4km})c\nu \right]}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} + \right. \\
& \left. - \frac{\left[2m\omega_p - (c - \sqrt{c^2 - 4km}) \right] \left[F_{kin1} (k - m\omega_p^2) + F_{kin2} c\omega_p \right]}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \right].
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Tym samym znaleźliśmy wszystkie stałe potrzebne do zapisania rozwiązania równania 4.10.

$$\begin{aligned}
y_a = & \frac{F_{akust} \left((k - m\nu^2) - c\nu \right)}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} \cdot (\sin(\nu t) + \cos(\nu t)) + \\
& - \frac{F_{kin1}(k - m\omega_p^2) + c\omega_p F_{kin2}}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \cdot (\sin(\omega_p t) - \cos(\omega_p t)) + e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \\
& \left[\left[\frac{F_{akust} c\nu}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} - \frac{F_{kin1}c\omega_p + F_{kin2}(m\omega_p^2 - k)}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \right] \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}t\right) + \right. \\
& \left. + \left[\frac{F_{akust}(c^2\nu^2 - 2m\nu(k - m\nu^2))}{\sqrt{4km - c^2}(c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4)} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{F_{kin1}\omega_p(2m(m\omega_p^2 - k) + c^2) + F_{kin2}c(k - m\omega_p^2)}{\sqrt{4km - c^2}(c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4)} \right] \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}t\right) \right] \quad (4.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_b = & \frac{F_{akust} \left((k - m\nu^2) - c\nu \right)}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} \cdot (\sin(\nu t) + \cos(\nu t)) + \\
& - \frac{F_{kin1}(k - m\omega_p^2) + c\omega_p F_{kin2}}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \cdot (\sin(\omega_p t) - \cos(\omega_p t)) + \\
& + e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \left[\left[\frac{F_{akust} \left(\nu(k - m\nu^2) + \frac{c^2}{2m}\nu \right)}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{(F_{kin1}(k - m\omega_p^2) + F_{kin2}c\omega_p)\omega_p + \frac{c}{2m}(F_{kin2}(m\omega_p^2 - k) + F_{kin1}c\omega_p)}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \right] \cdot t + \right. \\
& \left. + \frac{c\nu F_{akust}}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} + \frac{F_{kin2}(m\omega_p^2 - k) + F_{kin1}c\omega_p}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \right] \quad (4.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_c = & \frac{F_{akust} \left((k - m\nu^2) - c\nu \right)}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} \cdot (\sin(\nu t) + \cos(\nu t)) + \\
& - \frac{F_{kin1}(k - m\omega_p^2) + c\omega_p F_{kin2}}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \cdot (\sin(\omega_p t) - \cos(\omega_p t)) + e^{-\frac{c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}t} \cdot \\
& \left[\frac{F_{akust} \left[\frac{1}{2c} \left(2m(k - m\nu^2) + (c - \sqrt{c^2 - 4km})c\nu \right) - c\nu \right]}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} + \right. \\
& \left. \frac{\frac{1}{2c} \left[(2m\omega_p - (c - \sqrt{c^2 - 4km})) \cdot (F_{kin1}(k - m\omega_p^2) + F_{kin2}c\omega_p) \right] + F_{kin1}(k - m\omega_p^2) + F_{kin2}c\omega_p}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4}}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \right] + \\
& + \frac{1}{2c} \left[\frac{F_{akust} [2m(k - m\nu^2) + (c - \sqrt{c^2 - 4km})c\nu]}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} + \right. \\
& \left. \frac{[2m\omega_p - (c - \sqrt{c^2 - 4km})][F_{kin1}(k - m\omega_p^2) + F_{kin2}c\omega_p]}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \right] \cdot e^{-\frac{c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}t} \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Aby otrzymać explicite rozwiązania zagadnienia początkowego równania (4.3), należałoby cofnąć podstawienia (4.9). Nie uczynimy tego, ponieważ bezcelowe jest wprowadzanie niepotrzebnie rozbudowanych wzorów. Pamiętajmy tylko, że $y_a \equiv T_{1j}^{podkr}$, $y_b \equiv T_{1j}^{kr}$, a $y_c \equiv T_{1j}^{nadkr}$, natomiast pod oznaczeniami m , k , c kryją się odpowiednio: bezwładność, sztywność i tłumienie układu. Jeśli pomnożymy rozwiązanie zagadnienia początkowego przez odpowiednie rozwiązania zagadnienia brzegowego (zgodnie z 2.3) otrzymamy pełne rozwiązanie $w_{nowe}(x, y, t)$. Zwróćmy uwagę, iż w myśl podstawienia (2.3) kompletne rozwiązanie tego modelu stanowi suma rozwiązania $w_{nowe}(x, y, t)$ oraz funkcji wymuszającej. Zapiszmy więc finalne rozwiązanie modelu opisujące drgania płyty pobudzonej jednocześnie wymuszeniem kinematycznym i akustycznym. Dla $i = 1$ oraz j dowolnego naturalnego przyjmuje ono postać następującą (4.22)

$$w^{podkr}(x, y, t) = A_1 \sin(\omega_p) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \frac{A_2 \sin(\omega_p) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) - A_1 \sin(\omega_p) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{b} y +$$

$$\sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^{\infty} \left[\sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \cdot \left[\frac{F_{akust}((k - m\nu^2) - c\nu)}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} \cdot (\sin(\nu t) + \cos(\nu t)) + \frac{F_{kin1}(k - m\omega_p^2) + c\omega_p F_{kin2}}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \cdot (\sin(\omega_p t) - \cos(\omega_p t)) + e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \left[\frac{F_{akust}c\nu}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} - \frac{F_{kin1}c\omega_p + F_{kin2}(m\omega_p^2 - k)}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \right] \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}t\right) + \left[\frac{F_{akust}(c^2\nu^2 - 2m\nu(k - m\nu^2))}{\sqrt{4km - c^2}(c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4)} + \frac{F_{kin1}\omega_p(2m(m\omega_p^2 - k) + c^2) + F_{kin2}c(k - m\omega_p^2)}{\sqrt{4km - c^2}(c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4)} \right] \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}t\right) \right] \right] \quad (4.22)$$

A dla i naturalnych różnych od 1 oraz j dowolnego naturalnego, przyjmuje postać dokładnie jak w modelu bez wymuszenia kinematycznego tj. (4.23)

$$w^{podkr}(x, y, t) = \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \frac{4p_z(\cos(i\pi) - 1)(\cos(j\pi) - 1)}{ij\pi^2(\alpha_{ij}D(1 + \nu\lambda) - \rho h\nu^2)}$$

$$\left(\sin(\nu t) - \frac{2\nu e^{-\frac{\omega_{ij}^2\lambda}{2}t}}{\omega_{ij}\sqrt{(4 - \omega_{ij}^2\lambda^2)}} \sin\left(\omega_{ij}t\sqrt{(4 - \omega_{ij}^2\lambda^2)}\right) \right) \quad (4.23)$$

Analogicznie wygląda rozwiązanie dla tłumienia krytycznego (4.24)

$$\begin{aligned}
w^{kr}(x, y, t) = & A_1 \sin(\omega_p) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \frac{A_2 \sin(\omega_p) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) - A_1 \sin(\omega_p) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{b} y + \\
& \left. \begin{aligned}
& \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \cdot \\
& \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{F_{akust} \left((k - m\nu^2) - c\nu \right)}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} \cdot (\sin(\nu t) + \cos(\nu t)) + \right. \\
& \left. \frac{F_{kin1} (k - m\omega_p^2) + c\omega_p F_{kin2}}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \cdot (\sin(\omega_p t) - \cos(\omega_p t)) + \right. \\
& \left. + e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \left[\frac{F_{akust} \left(\nu(k - m\nu^2) + \frac{c^2}{2m}\nu \right)}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\left(F_{kin1} (k - m\omega_p^2) + F_{kin2} c\omega_p \right) \omega_p + \frac{c}{2m} \left(F_{kin2} (m\omega_p^2 - k) + F_{kin1} c\omega_p \right)}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \right] \cdot t + \right. \\
& \left. \left. + \frac{c\nu F_{akust}}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} + \frac{F_{kin2} (m\omega_p^2 - k) + F_{kin1} c\omega_p}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \right\} \right\} \quad (4.24)
\end{aligned}
\end{aligned}$$

oraz dla i naturalnego różnego od 1 oraz j dowolnego naturalnego (4.25)

$$w^{kr}(x, y, t) = \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \frac{4p_z (\cos(i\pi) - 1)(\cos(j\pi) - 1)}{ij\pi^2 (\alpha_{ij} D(1 + \nu\lambda) - \rho h\nu^2)} \left(\sin(\nu t) - \nu t e^{-\frac{\omega_{ij}^2 \lambda}{2} t} \right) \quad (4.25)$$

i nadkrytycznego

$$\begin{aligned}
 w^{nadkr}(x, y, t) = & A_1 \sin(\omega_p) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \frac{A_2 \sin(\omega_p) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) - A_1 \sin(\omega_p) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{b} y + \\
 & \left. \begin{aligned}
 & \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \cdot \\
 & \left[\frac{F_{akust}((k - m\nu^2) - c\nu)}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} \cdot (\sin(\nu t) + \cos(\nu t)) + \right. \\
 & \left. - \frac{F_{kin1}(k - m\omega_p^2) + c\omega_p F_{kin2}}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \cdot (\sin(\omega_p t) - \cos(\omega_p t)) + e^{-\frac{c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t} \cdot \right. \\
 & \left. \left[\frac{F_{akust} \left[\frac{1}{2c} (2m(k - m\nu^2) + (c - \sqrt{c^2 - 4km})c\nu) - c\nu \right]}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} \right] + \right. \\
 & \left. - \frac{\frac{1}{2c} \left[(2m\omega_p - (c - \sqrt{c^2 - 4km})) \cdot (F_{kin1}(k - m\omega_p^2) + F_{kin2}c\omega_p) \right] + F_{kin1}(k - m\omega_p^2) + F_{kin2}c\omega_p}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \right]}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \right] \\
 & + \frac{1}{2c} \left[\frac{F_{akust} [2m(k - m\nu^2) + (c - \sqrt{c^2 - 4km})c\nu]}{c^2\nu^2 + k^2 - 2km\nu^2 + m^2\nu^4} + \right. \\
 & \left. - \frac{[2m\omega_p - (c - \sqrt{c^2 - 4km})] [F_{kin1}(k - m\omega_p^2) + F_{kin2}c\omega_p]}{c^2\omega_p^2 + k^2 - 2km\omega_p^2 + m^2\omega_p^4} \right] \cdot e^{-\frac{c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

a dla i naturalnego różnego od 1 oraz j dowolnego naturalnego

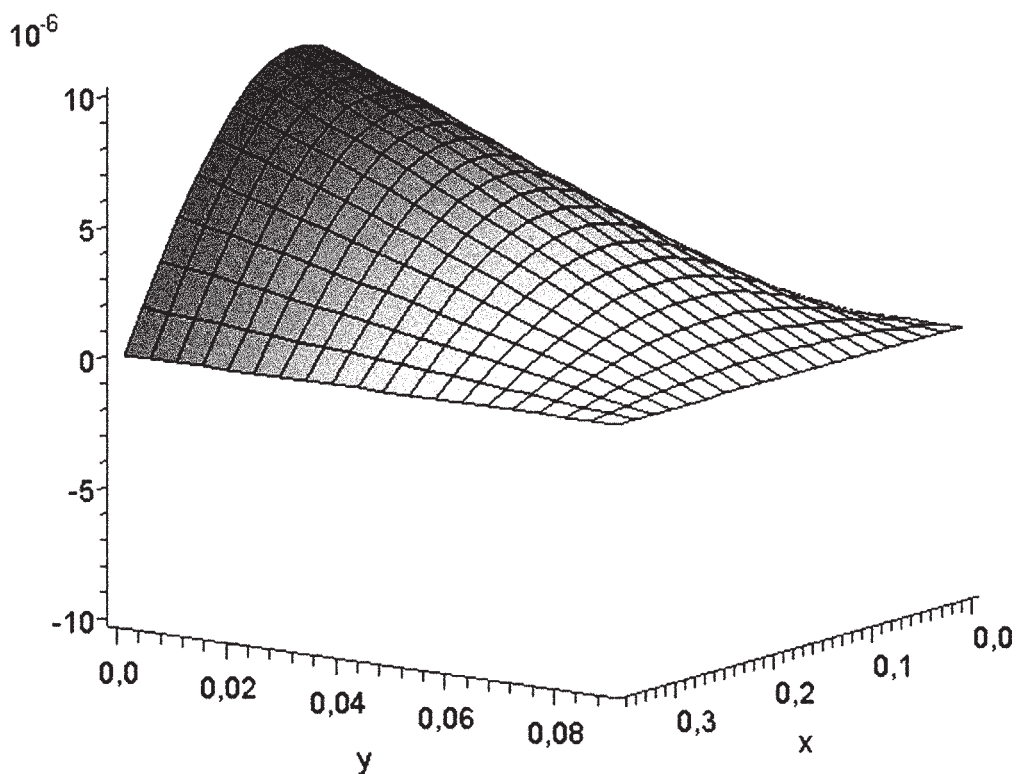
$$\begin{aligned}
 w^{nadkr}(x, y, t) = & \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \frac{4p_z (\cos(i\pi) - 1)(\cos(j\pi) - 1)}{ij\pi^2 (\alpha_{ij} D(1 + \nu\lambda) - \rho h\nu^2)} \\
 & \left(\sin(\nu t) - \frac{\nu}{\omega_{ij} \sqrt{(\lambda^2 \omega_{ij}^2 - 4)}} \left(e^{-\frac{\omega_{ij}^2}{2}(\lambda - \sqrt{(\lambda^2 \omega_{ij}^2 - 4)})t} - e^{-\frac{\omega_{ij}^2}{2}(\lambda + \sqrt{(\lambda^2 \omega_{ij}^2 - 4)})t} \right) \right) \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

Uwaga

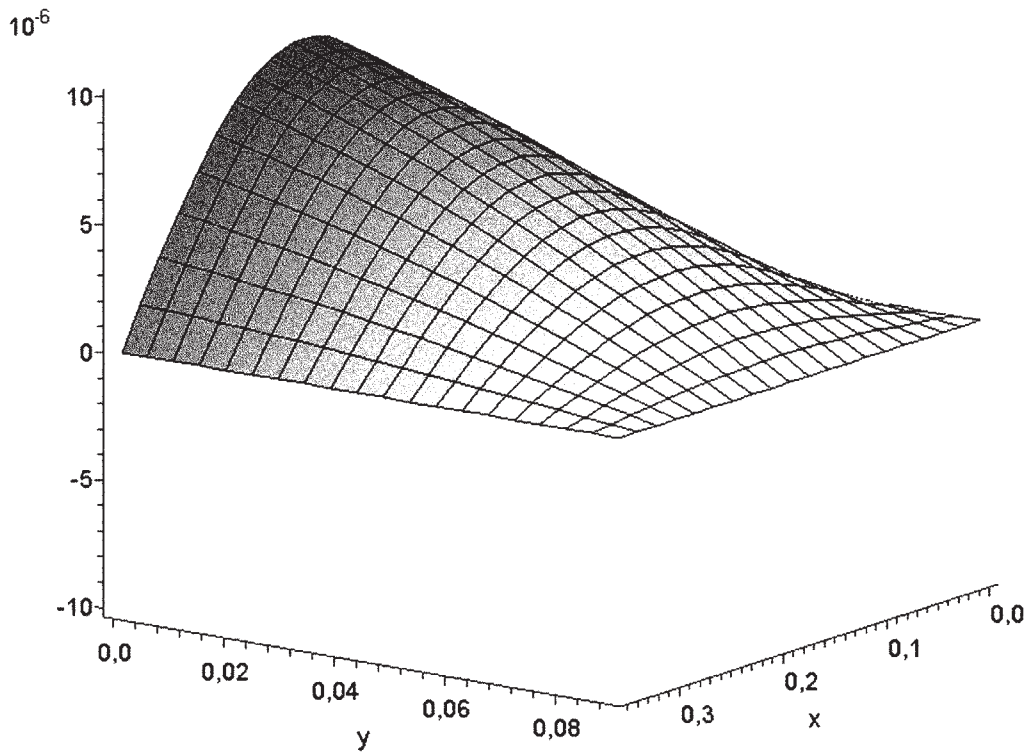
Ten model drganiowy płyty, pomimo chwilowego zaniechania wymuszenia kinematycznego, ściśle – przyjęcia amplitud drgań podłużnic $A_1, A_2 = 0$, dawał rezultaty nie dokładnie takie same, jak model bez wymuszenia na brzegach. Spowodowane jest to błędem w tej części wyprowadzonych wzorów na ugięcie płyty dla $i = 1$, w których występuje wymuszenie akustyczne. Doprowadzono w sztuczny sposób do pełnej zgodności obydwu modeli sumując wszystkie rozwiązania dla modelu bez wymuszenia kinematycznego (z punktu trzeciego), a w członach rozwiązania z wymuszeniem kinematycznym wprowadzono $F_{akust} = 0$. Zważywszy na to, że pełne rozwiązanie jest sumą wszystkich powyższych składników, a równania różniczkowe są liniowe, postępowanie takie nie jest błędne.

4.2. Rezultaty obliczeń i wnioski

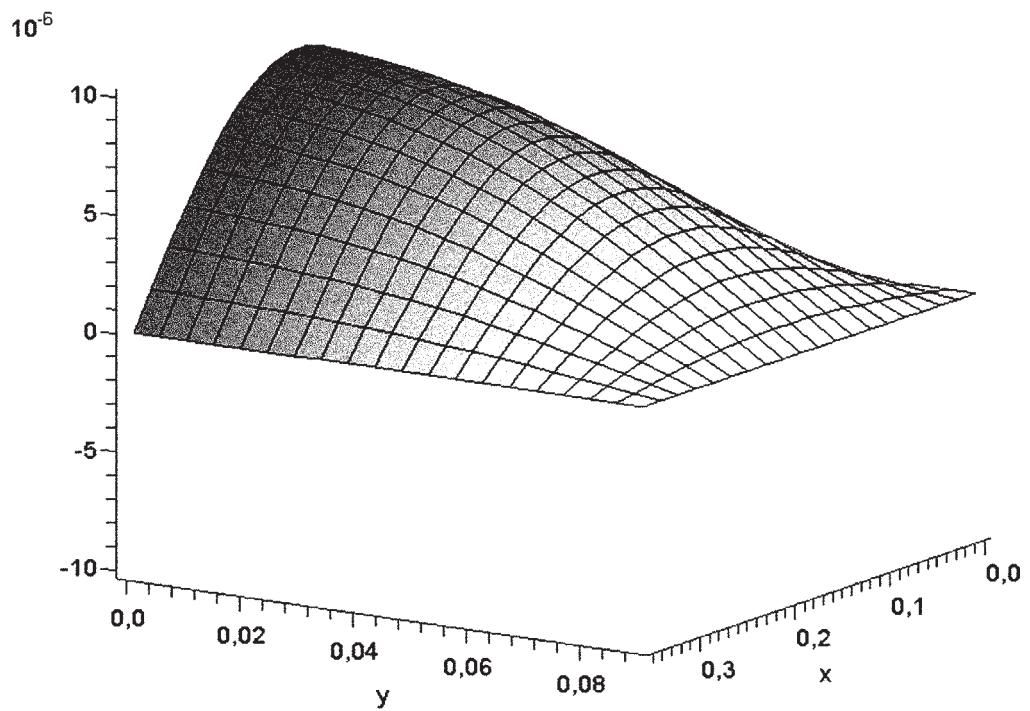
Na poniższych wykresach przedstawiona jest postać drgań płyty wywołanych wymuszeniem kinematycznym na jednym tylko jej brzegu. Amplituda wymuszenia to $10\ \mu\text{m}$, a jego częstotliwość zmienia się od 40 Hz do 5000 Hz. Tak szerokie spektrum, pozwala na dokonanie interesujących obserwacji. Widzimy, że dla 40 Hz a nawet 60 Hz, odkształcenie (postać drgań) płyty ma charakter quasi-statyczny tj. powierzchnia odkształconej płyty jest nadal prostokreślna. Dopiero od 80 Hz wyraźnie zaczyna zarysowywać się łuk, w jaki wygina się płyta, której postać drgań odpowiada pierwszej postaci drgań własnych. Pierwszą pełną półfalę obserwujemy dopiero przy wymuszeniu około 150 Hz. Analizując liczbę półfal w jakie wygina się płyta możemy zaproponować „empiryczny” wzór pozwalający prognozować liczbę tychże półfal, w zależności od częstotliwości wymuszenia kinematycznego jednego jej brzegu. Niestety trudności w ustaleniu dokładnych częstotliwości, dla których można zaobserwować wyraźne linie węzłowe (niezbędne do zliczenia półfal) to uniemożliwił. Linie zerowych wychyleń widoczne na rysunkach 4.10÷4.12 nie są liniami węzłowymi, gdyż w trakcie drgań nie zachowują stałego położenia.



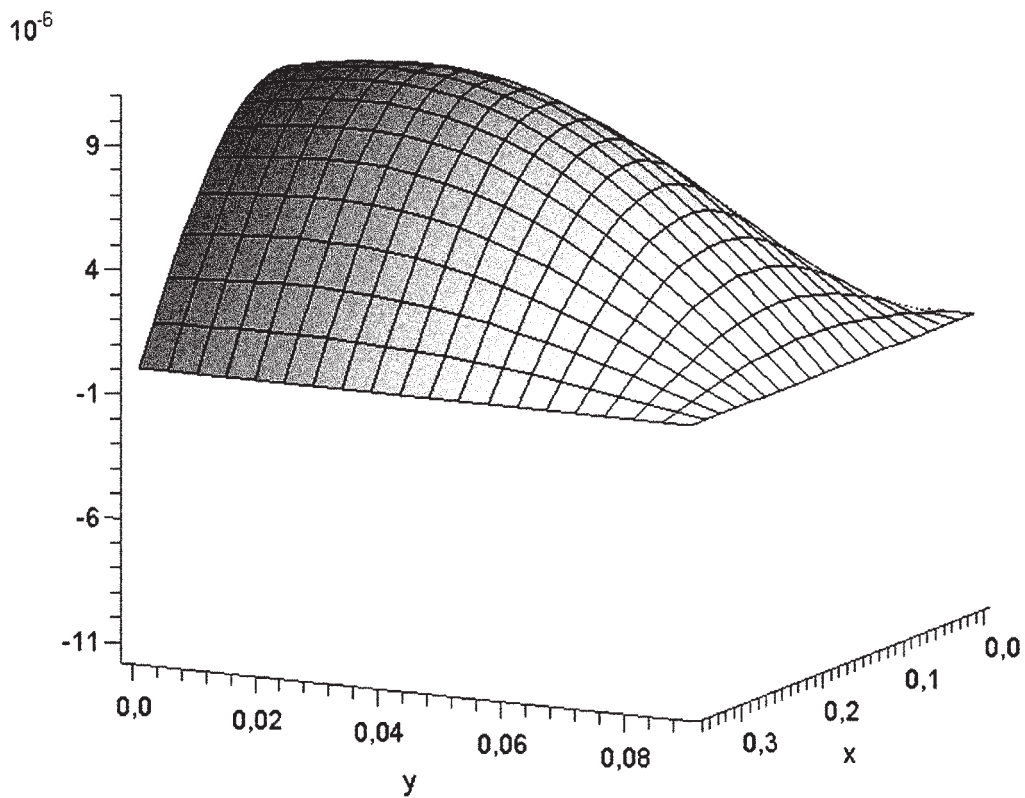
Rys. 4.1. Postać drgań płyty pobudzanej na jednym brzegu (częstotliwość wymuszenia 40 Hz)



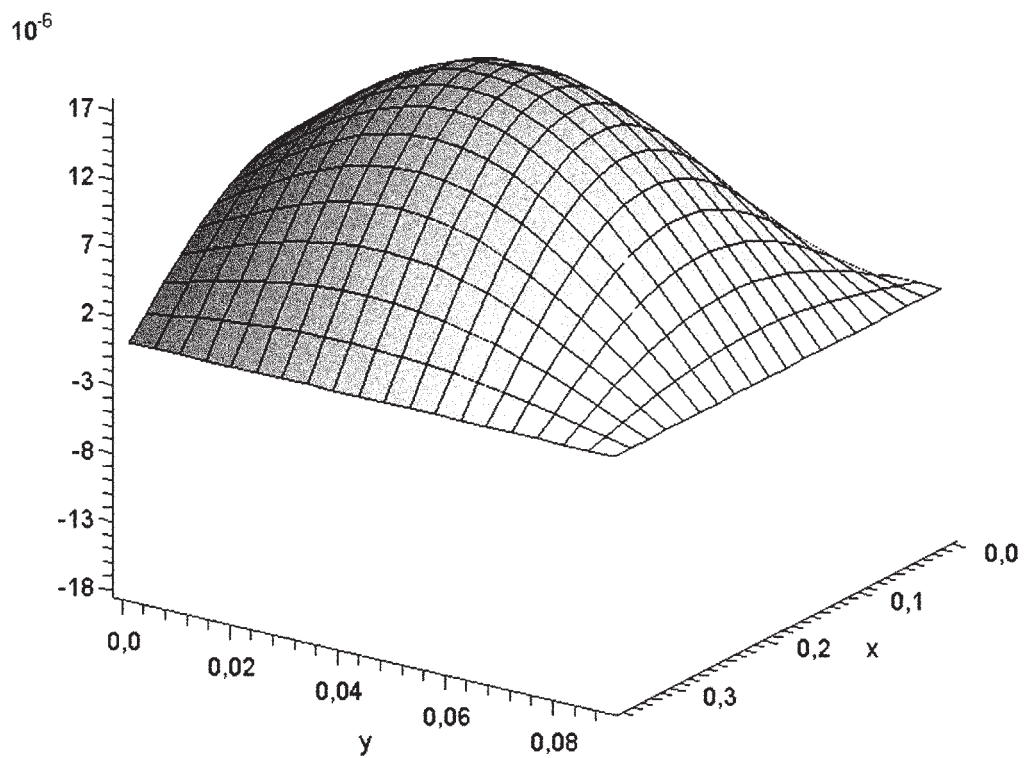
Rys. 4.2. Postać drgań płyty pobudzanej na jednym brzegu (częstotliwość wymuszenia 60 Hz)



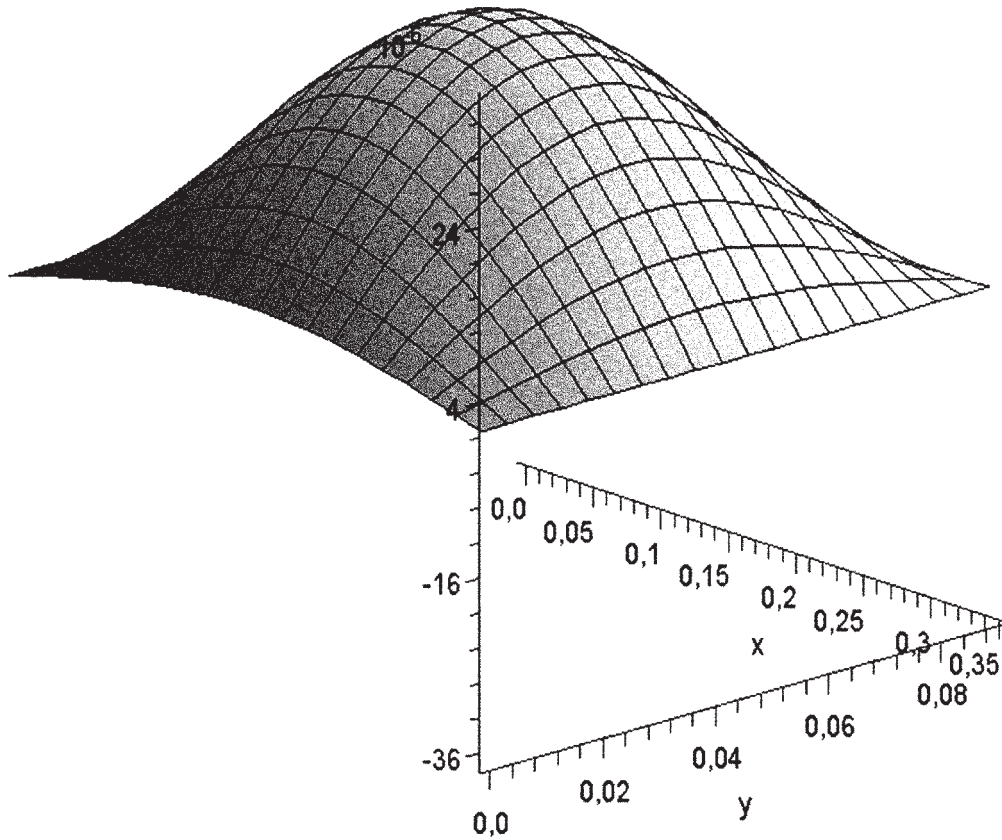
Rys. 4.3. Postać drgań płyty pobudzanej na jednym brzegu (częstotliwość wymuszenia 80 Hz)



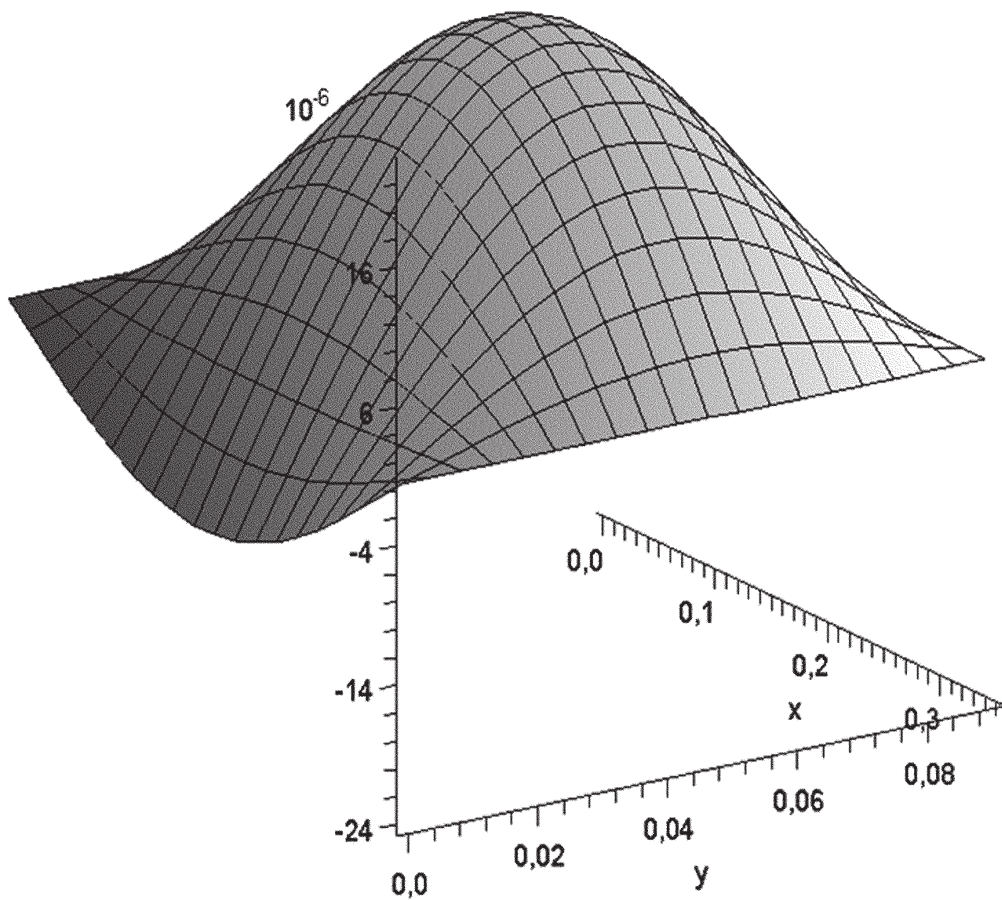
Rys. 4.4. Postać drgań płyty pobudzanej na jednym brzegu (częstotliwość wymuszenia 100 Hz)



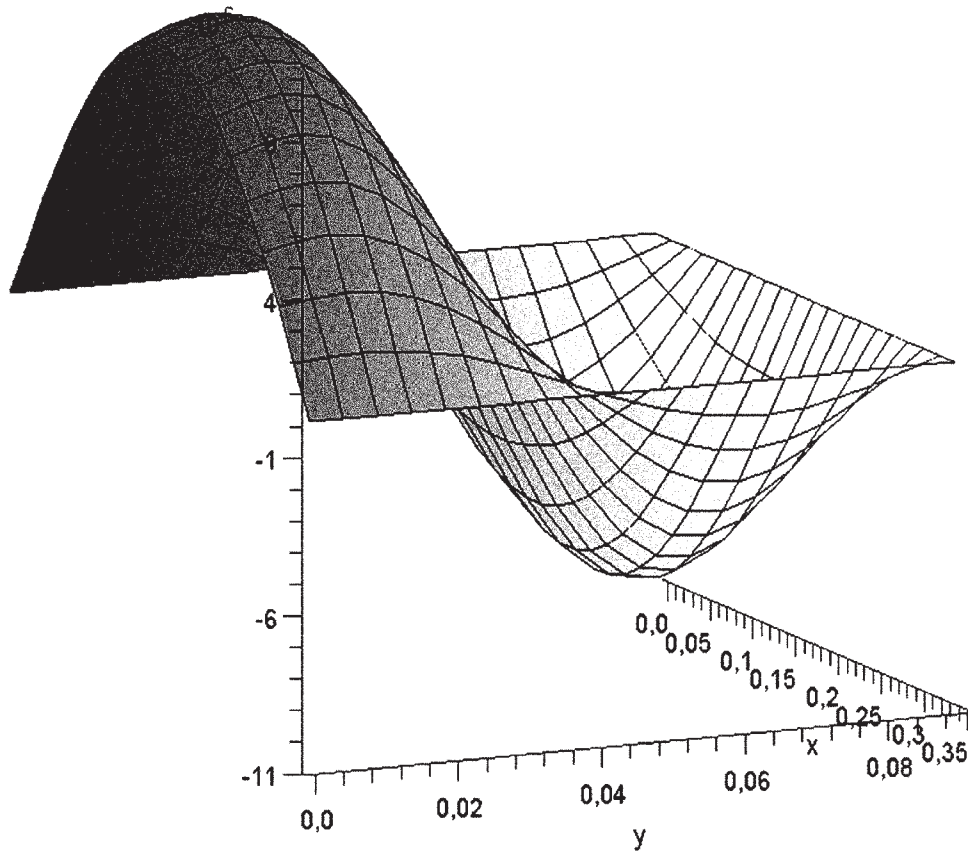
Rys. 4.5. Postać drgań płyty pobudzanej na jednym brzegu (częstotliwość wymuszenia 125 Hz)



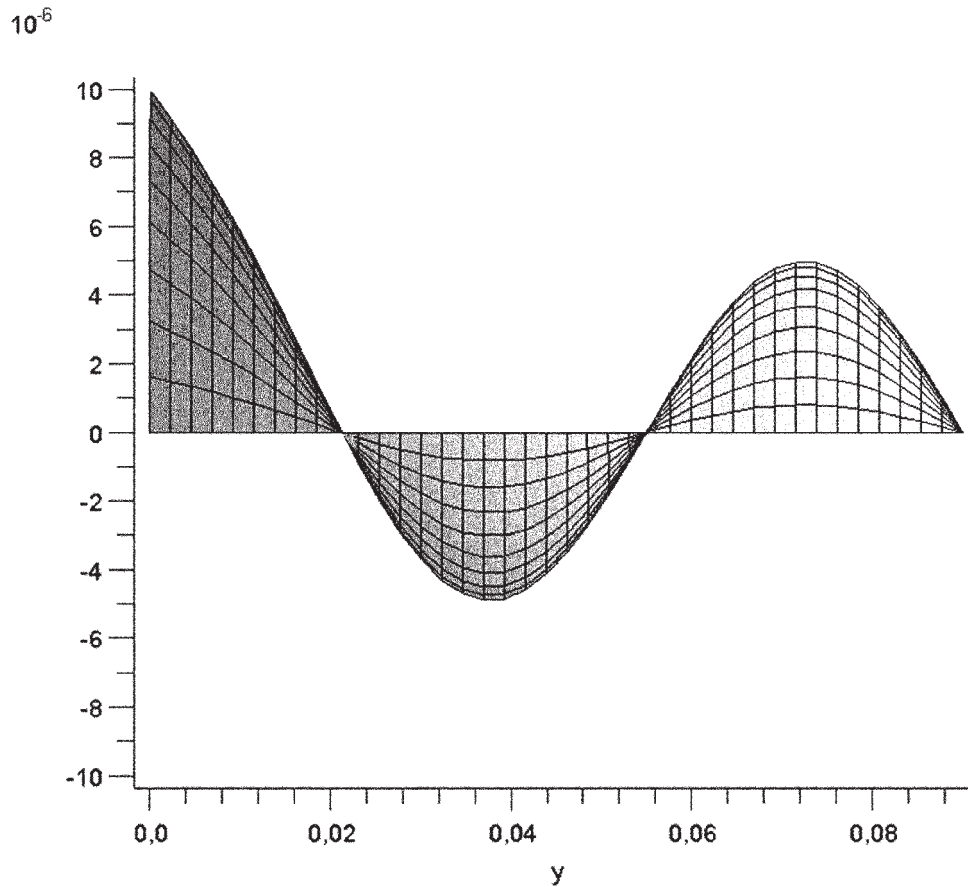
Rys. 4.6. Postać drgań płyty pobudzanej na jednym brzegu (częstotliwość wymuszenia 150 Hz)



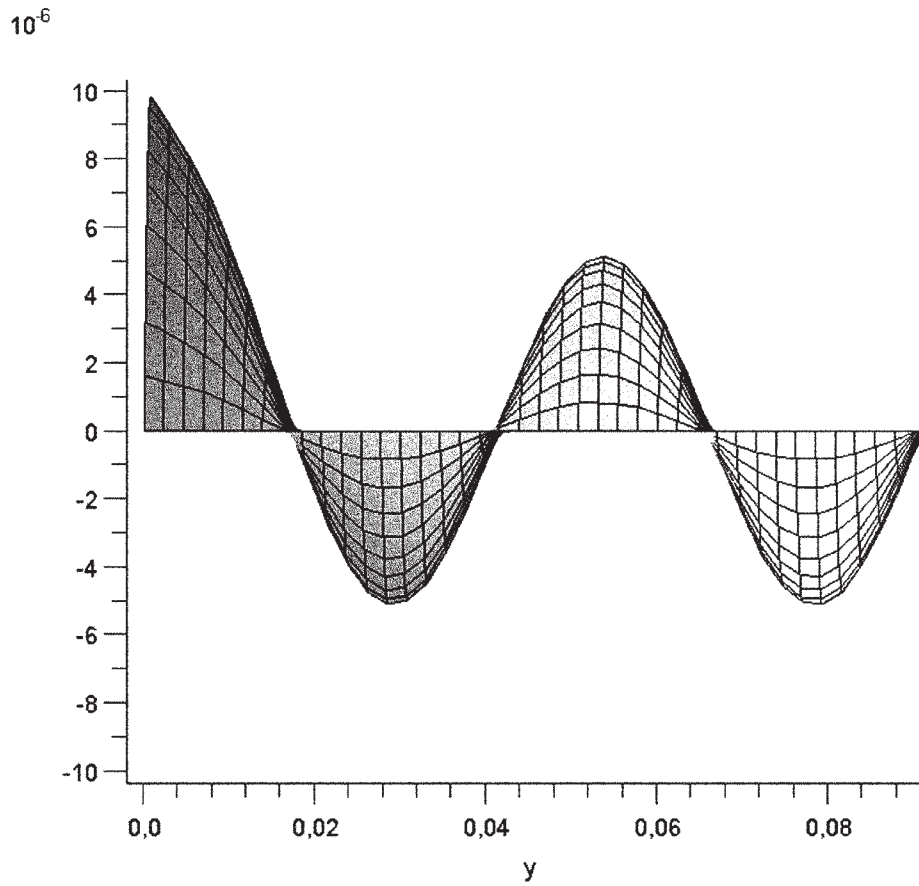
Rys. 4.7. Postać drgań płyty pobudzonej na jednym brzegu (częstotliwość wymuszenia 200 Hz)



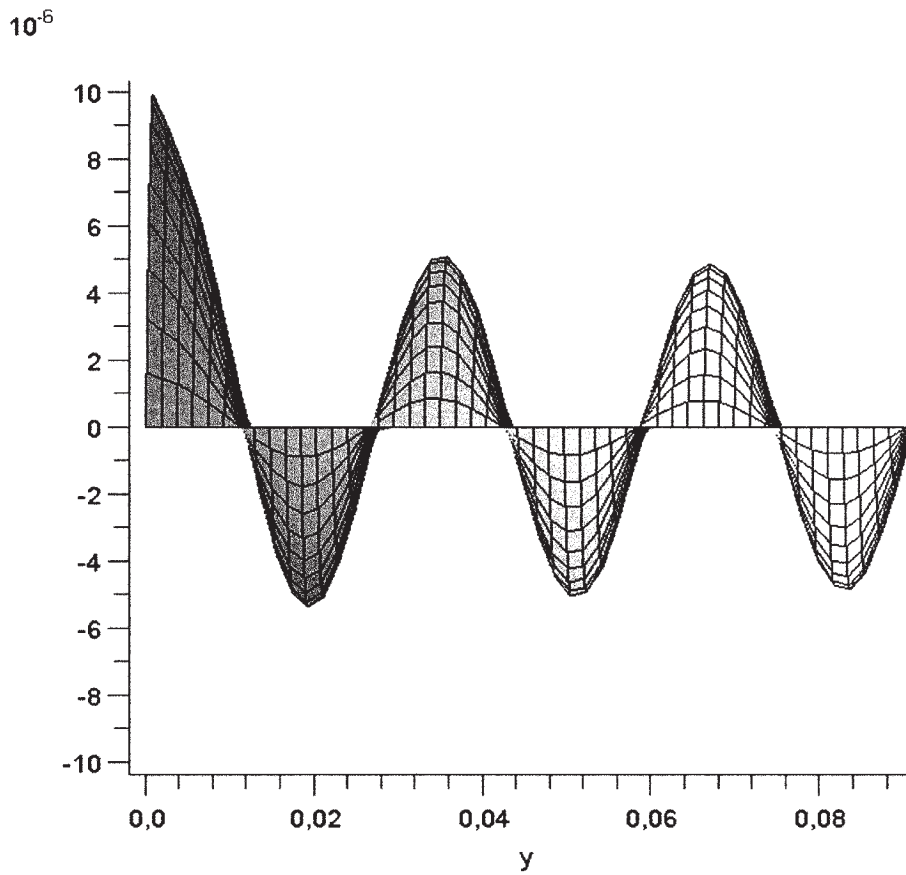
Rys. 4.8. Postać drgań płyty pobudzonej na jednym brzegu (częstotliwość wymuszenia 500 Hz)



Rys. 4.9. Postać drgań płyty pobudzonej na jednym brzegu (częstotliwość wymuszenia 1000 Hz)

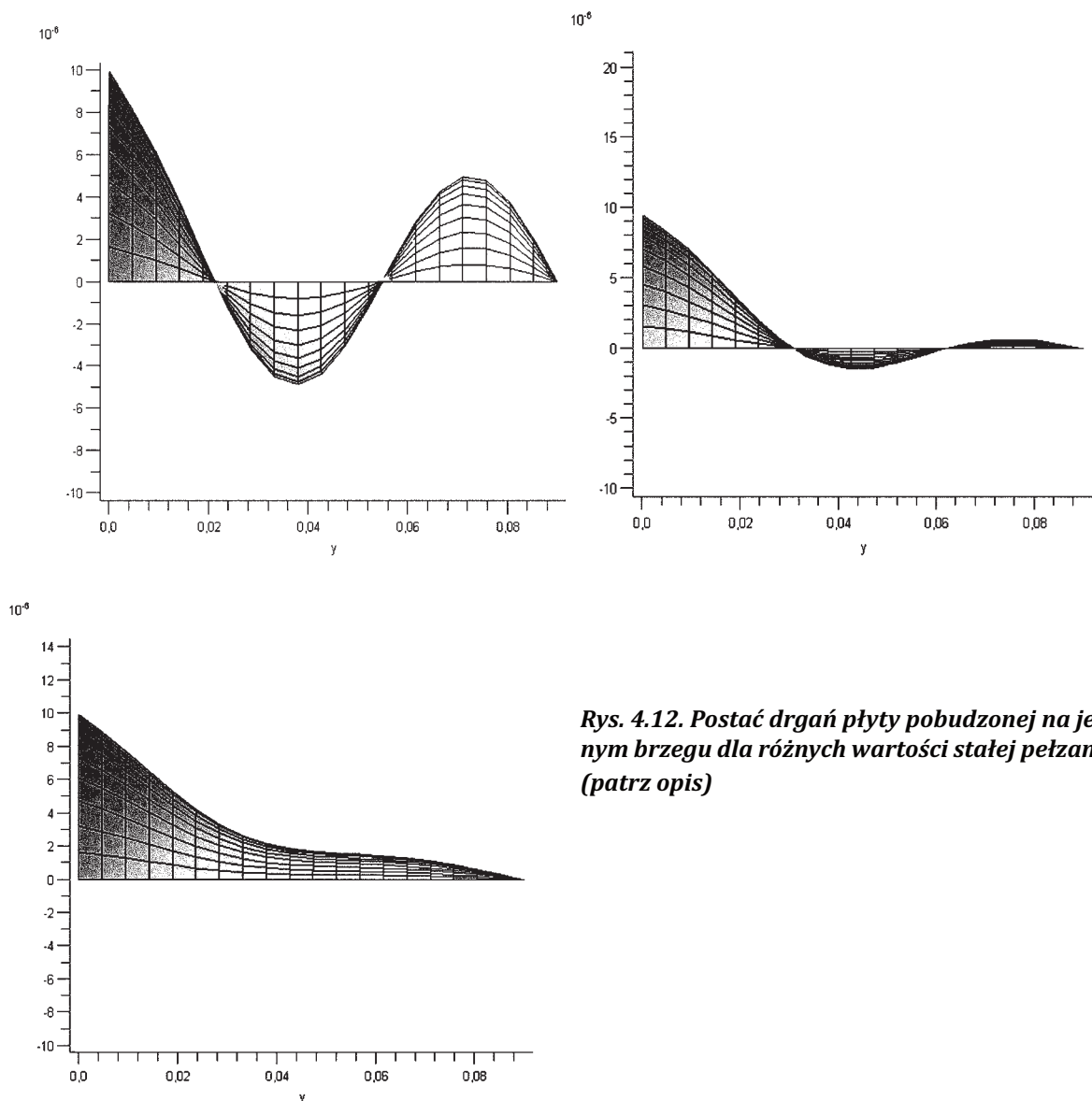


Rys. 4.10. Postać drgań płyty pobudzonej na jednym brzegu (częstotliwość wymuszenia 2000 Hz)



Rys. 4.11. Postać drgań płyty pobudzonej na jednym brzegu (częstotliwość wymuszenia 5000 Hz)

Poniżej widzimy trzy wykresy postaci drgań płyty obrazujące jak silny jest wpływ stałej tłumienia. W przypadku pierwszym mamy do czynienia ze słabym tłumieniem podkrytyczny $\frac{h}{\omega_{ii}} = 0,05$, w drugim $\frac{h}{\omega_{ii}} = 0,5$, a w trzecim z tłumieniem krytycznym $\frac{h}{\omega_{ii}} = 1$ (kolejno $\lambda = 0,0000847$ s, $\lambda = 0,0008471$ s, $\lambda = 0,0016942$ s). Widać wyraźnie jak w miarę wzrostu tłumienia coraz słabsze drgania osiągają drugiego (specjalnie w tym celu, chwilowo nie pobudzanego) brzegu płyty. Jest to swego rodzaju dynamiczne usztywnienie płyty. Im większe tłumienie, tym bardziej lokalny charakter mają drgania płyty. Zjawisko to będzie jeszcze lepiej widoczne w kolejnym punkcie.



Rys. 4.12. Postać drgań płyty pobudzonej na jednym brzegu dla różnych wartości stałej pełzania (patrz opis)

Obliczenia v_{RMS} ze względu na czasochłonność ich wykonania, zostały przeprowadzone dla $i \cdot j = 25$ funkcji własnych. Częstotliwość wymuszenia akustycznego 100 Hz. Średnia z przedziału czasu od 10. do 10,1. sekundy. Jak wynika z poprzedniego rozdziału wartość skuteczna prędkości drgań płyty bez wymuszenia kinematycznego wynosi 0,00439 m/s, a v_{RMS} płyty poddanej takiemu wymuszeniu (o częstotliwości 85 Hz) 0,00448 m/s. Wzrost jest zaledwie około 2%. Gdybyśmy przyjęli model podłużnicy o końcach utwierdzonych (a nie podpartych przegubowo), wówczas częstotliwość wymuszająca brzegi płyty wzrosłaby z 85 Hz do 193 Hz powodując tym samym (przy zachowanej tej samej 0,01 mm amplitudzie) wzrost v_{RMS} o 381% aż do wartości 0,01671 m/s.

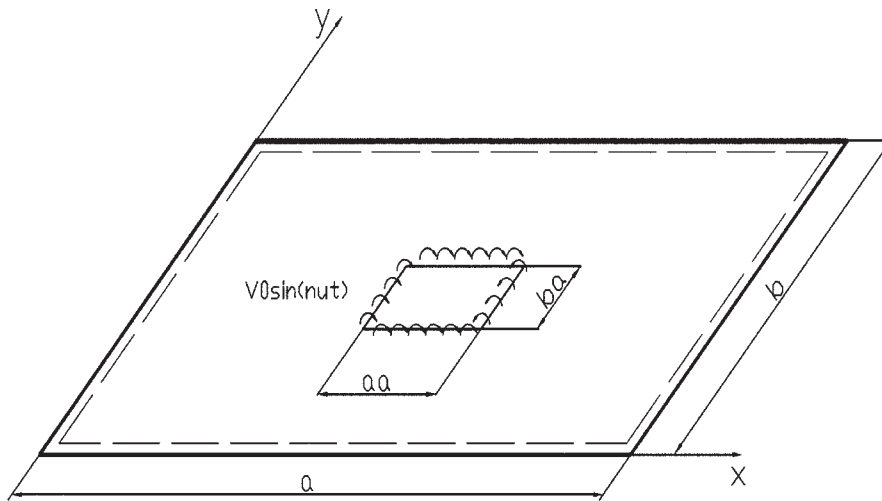
Wnioski

Powyższe spostrzeżenie jest bardzo ważne, gdyż wprost prowadzi do istotnego wniosku, iż dokładna identyfikacja drgań podłużnic, będzie ważnym etapem realizowanego projektu.

5. MODEL DRGANIOWY PŁYTY PODDANEJ WYMUSZENIU HARMONICZNEMU POCHODZĄCEGO OD NAKLEJONEGO ELEMENTU PIEZOELEKTRYCZNEGO

5.1. Wyprowadzenie zależności

W niniejszym punkcie zajmiemy się analizą drgań płyty pobudzonej do drgań naklejonym na jej środku jednym prostokątnym piezoelementem. Napięcie na piezoelektryku będzie zmieniało się sinusoidalnie z częstotliwością ν . Wymiary poprzeczne łatki to $1/10$ odpowiedniego wymiaru gabarytowego płyty. Symbolicznie przedstawiona jest na poniższym rysunku (5.1).



Rys. 5.1. Płyta z naklejonym piezoelementem

Jej grubość zostanie dobrana tak, by wartość skuteczna prędkości wzbudzonych drgań była równa v_{RMS} drgań wywołanych hałasem. Piezoelektryk zostanie opisany funkcją kształtu $F^a(x, y)$. Jej wartości to 1 tam, gdzie znajduje się akuator oraz 0 na całym pozostałym obszarze płyty. Funkcja kształtu wyrażona jest za pomocą funkcji Heaviside'a w następujący sposób

$$F^a(x, y) = \left[H\left(y - \frac{b}{2} + \frac{b^a}{2}\right) - H\left(y - \frac{b}{2} - \frac{b^a}{2}\right) \right] \cdot \left[H\left(x - \frac{a}{2} + \frac{a^a}{2}\right) - H\left(x - \frac{a}{2} - \frac{a^a}{2}\right) \right]. \quad (5.1)$$

Do równania opisującego drgania płyty piezoelektryk zostanie wprowadzony jako skupiony moment gnący rozłożony równomiernie na brzegach naklejonej łatki (rys. 5.1).

$$D\Delta^2 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + \lambda D \Delta^2 \left[\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \right] + \frac{\partial^2 M_x^a(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^a(x, y, t)}{\partial y^2} = 0. \quad (5.2)$$

Jeśli przeniesiemy nowe człony na prawą stronę, lewa strona stanie się dokładnie taka sama jak w rozwiązany już modelu z punktu drugiego. Wobec tego poniżej zajmiemy się tylko nową prawą stroną równania (5.2). Składające się na nią momenty gnące M_x i M_y , które faktycznie stanowią wymuszenie siłowe. Opiszemy je w ten oto sposób

$$\begin{bmatrix} M_x^a(x, y, t) \\ M_y^a(x, y, t) \end{bmatrix} = C_0 \frac{V(t)}{h_a} F^a(x, y) \cdot \begin{bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

gdzie C_0 jest stałą uwzględniającą elektromechaniczne sprzężenie pomiędzy materiałem płyty i naklejoną łątą z piezoceramiki. Wyznamy ją z zależności

$$C_0 = -E_a \frac{(1 + \nu_a)}{1 - \nu} \frac{P}{1 + \nu_a - (1 + \nu_a)P} \frac{1}{6} h^2, \quad (5.4)$$

gdzie

$$P = \frac{E_a}{E} \frac{1 - \nu^2}{1 - \nu_a^2}. \quad (5.5)$$

$V(t)$ jest sinusoidalnie zmiennym w czasie zewnętrznym napięciem ($V(t) = V_0 \sin(\nu t)$) przyłożonym do elektrod aktuatora, a d_{31} i d_{32} to odpowiednie stałe piezoelektryczne. Obliczmy teraz potrzebne drugie pochodne momentów gnących. W tym celu należy dwukrotnie zróżniczkować funkcję kształtu

$$\begin{aligned} \frac{dF^a(x, y)}{dx} &= \left[H\left(y - \frac{b}{2} + \frac{b^a}{2}\right) - H\left(y - \frac{b}{2} - \frac{b^a}{2}\right) \right] \cdot \left[\delta\left(x - \frac{a}{2} + \frac{a^a}{2}\right) - \delta\left(x - \frac{a}{2} - \frac{a^a}{2}\right) \right] \cdot 1, \\ \frac{dF^a(x, y)}{dx^2} &= \left[H\left(y - \frac{b}{2} + \frac{b^a}{2}\right) - H\left(y - \frac{b}{2} - \frac{b^a}{2}\right) \right] \cdot \left[\delta'\left(x - \frac{a}{2} + \frac{a^a}{2}\right) - \delta'\left(x - \frac{a}{2} - \frac{a^a}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (5.6)$$

i analogicznie

$$\frac{d^2 F^a(x, y)}{dy^2} = \left[\delta'\left(y - \frac{b}{2} + \frac{b^a}{2}\right) - \delta'\left(y - \frac{b}{2} - \frac{b^a}{2}\right) \right] \cdot \left[H\left(x - \frac{a}{2} + \frac{a^a}{2}\right) - H\left(x - \frac{a}{2} - \frac{a^a}{2}\right) \right]. \quad (5.7)$$

Jeśli wykorzystamy tzw. ciągowe podejście do dystrybucji i przyjrzymy się uważnie powyższym wyrażeniom, zauważymy, iż momenty gnące wprowadzone w płytę przez naklejony na nią piezoelektryk zostały sprowadzone do pary nieskończenie wielkich leżących nieskończenie blisko siebie wektorów. Taka jest interpretacja matematyczna, zaś interpretacja mechaniczna to stwierdzenie, że są to ściśle zgodne z definicją momenty gnące (rozłożone równomiernie na brzegach piezoelektrycznej łąty). Zapiszmy prawą stronę równania drgań płyty

$$P = -C_0 \frac{V_0 \sin(\nu t)}{h_a} (d_{31} + d_{32}) \left\{ \left[H\left(y - \frac{b}{2} + \frac{b^a}{2}\right) - H\left(y - \frac{b}{2} - \frac{b^a}{2}\right) \right] \cdot \left[\delta'\left(x - \frac{a}{2} + \frac{a^a}{2}\right) - \delta'\left(x - \frac{a}{2} - \frac{a^a}{2}\right) \right] + \left[\delta'\left(y - \frac{b}{2} + \frac{b^a}{2}\right) - \delta'\left(y - \frac{b}{2} - \frac{b^a}{2}\right) \right] \cdot \left[H\left(x - \frac{a}{2} + \frac{a^a}{2}\right) - H\left(x - \frac{a}{2} - \frac{a^a}{2}\right) \right] \right\}. \quad (5.8)$$

A następnie zgodnie ze wzorem (2.10) rozwińmy w szereg Fouriera. Współczynnik a_{pmn} wyznaczymy z zależności (2.11). Wymaga to pomnożenia przez $\frac{4}{ab} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

a następnie dwukrotnego scałkowania otrzymanego wyrażenia po obszarze płyty $[a, b]$. W celu obliczenia całki podwójnej wyłączymy stałe przed znak całek, a same całki po zmiennej x i zmiennej y obliczymy osobno. Zaczniemy od obliczenia całki z pochodnej delty Dirac'a. Wykorzystując własności całkowania przez części możemy zapisać

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) \cdot \delta'(x) dx = [f(x)\delta(x)]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f'(x) \cdot \delta(x) dx, \quad (5.9)$$

gdzie

$$\left[f(x)\delta(x) \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 0 \quad (5.10)$$

a pozostała całka zgodnie z definicją delty Dirac'a

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f'(x) \cdot \delta(x) dx = f'(0). \quad (5.11)$$

Co oznacza, że szukana całka wyraża się wzorem

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) \cdot \delta'(x) dx = f'(0). \quad (5.12)$$

Wykorzystaliśmy powyżej tzw. podejście Schwartz'a do dystrybucji. Prowadzi to do wyniku

$$-\frac{2m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi a^a}{2a}\right) \quad \text{oraz} \quad -\frac{2n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi b^a}{2b}\right). \quad (5.13)$$

Następnie obliczymy całkę po zmiennej y z części wyrażenia zawierającego funkcję Heaviside'a. Gdy przyjrzymy się mu, zauważymy, że należy po prostu obliczyć całkę z $\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$, na odcinku od $0,5b - 0,5b^a$ do $0,5b + 0,5b^a$, gdyż tylko na tym odcinku wartość wyrażenia z funkcją Heaviside'a jest różna od zera, a ściśle: równa się jedności. Wynik tego całkowania ma następującą postać

$$\frac{2b}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi b^a}{2b}\right) \quad \text{oraz} \quad \frac{2a}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi a^a}{2a}\right). \quad (5.14)$$

Podsumowując powyższe przekształcenia oraz porządkując wyrazy, możemy zapisać prawą stronę równania drgań płyty rozwiniętą w szereg Fouriera

$$P = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{16C_0 V_0 \sin(\nu t)}{h_a} (d_{31} + d_{32}) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{m\pi a^a}{2a}\right) \sin\left(\frac{n\pi b^a}{2b}\right) \left(\frac{m^2 b^2 + n^2 a^2}{mnab}\right)}. \quad (5.15)$$

Zgodnie ze schematem postępowania pomnożymy teraz obie strony równania przez funkcje ortogonalne $\frac{4}{ab} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right)$, a następnie scałkujemy po obszarze płyty. Prowadzi to do warunku

$$\begin{aligned} n &= i, \\ m &= j. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Całka

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{j\pi y}{b}\right) dx dy = \frac{ab}{4}. \quad (5.17)$$

Ostatecznie prawa strona równania (4.2) przyjmuje postać

$$P = 16C_0 \frac{V_0 \sin(\nu t)}{h_a} (d_{31} + d_{32}) \left(\frac{i^2 b^2 + j^2 a^2}{ijab} \right) \sin\left(\frac{i\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{i\pi a^a}{2a}\right) \sin\left(\frac{j\pi b^a}{2b}\right). \quad (5.18)$$

Jak już nadmieniliśmy, po przeniesieniu na prawą stronę równania drgań płyty członów związanych z wymuszeniem, lewa strona tegoż równania jest dokładnie taka sama jak w punkcie drugim. Przyjęliśmy napięcie sinusoidalnie zmienne w czasie z częstotliwością ν . Stąd prosty wniosek, iż nie musimy rozwiązywać równania na nowo, a możemy przyjąć rozwiązanie analogicznego równania z rozdziału drugiego za zachowujące ważność (zależności (3.27)). Musimy tylko pamiętać, by zaktualizować podstawienia (2.19), przyjmując

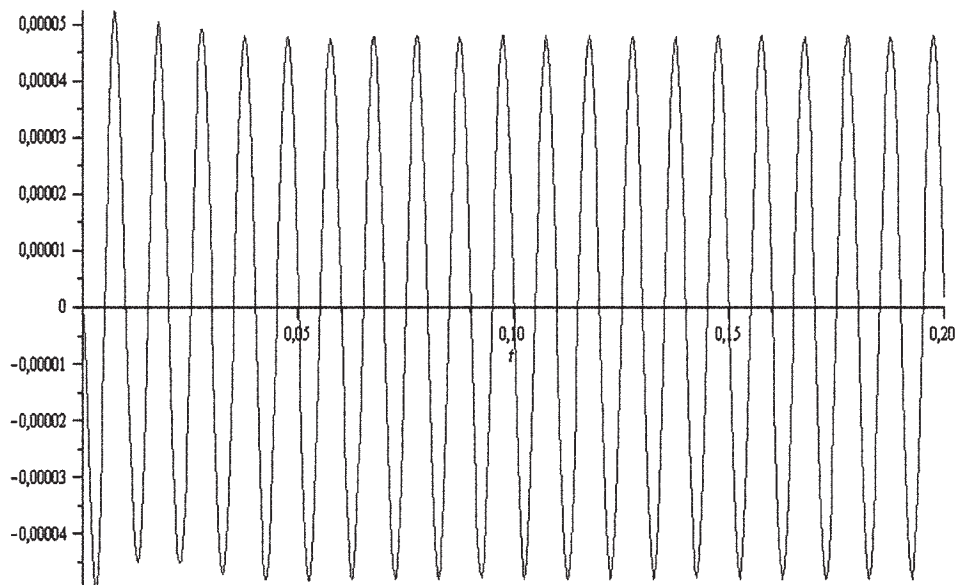
$$F = \frac{16V_0 C_0}{h_a} (d_{31} + d_{32}) \left(\frac{i^2 b^2 + j^2 a^2}{ijab} \right) \sin\left(\frac{i\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{i\pi a^a}{2a}\right) \sin\left(\frac{j\pi b^a}{2b}\right) \quad (5.19)$$

oraz dokonać podstawienia (3.8).

5.2. Rezultaty obliczeń i wnioski

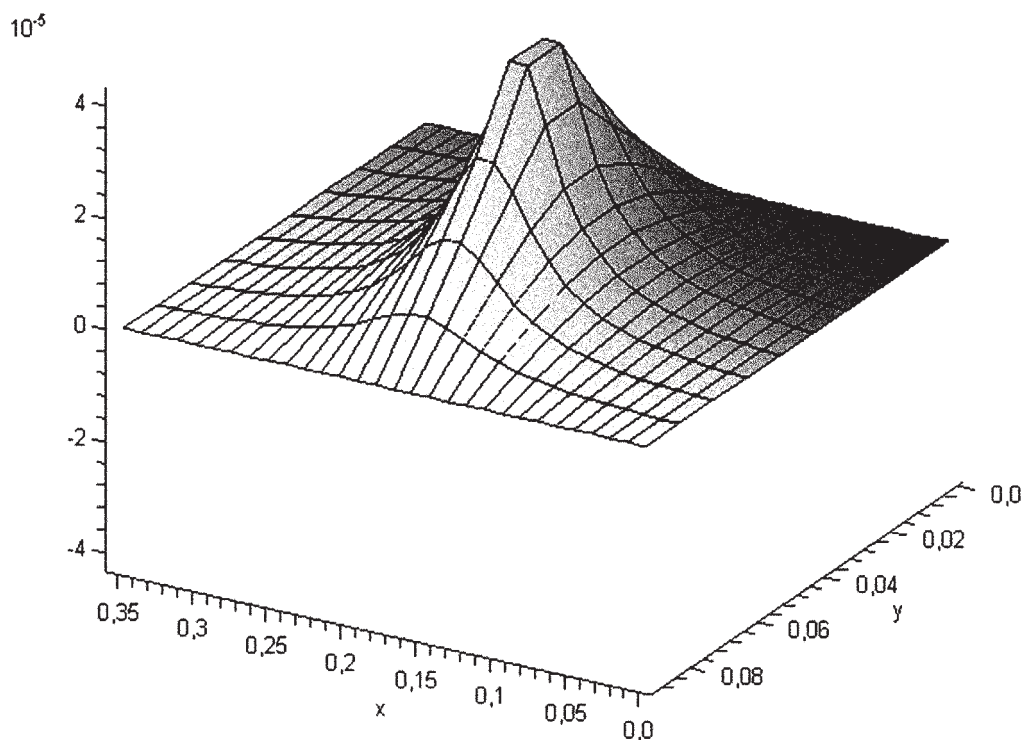
Na poniższych wykresach na osiach pionowych odłożone zostało wychylenie poprzeczne punktów płyty w metrach. Rozważmy następujący przypadek. Parametry piezoceramicznej łąty: $d_{31} = d_{32} = 1,71 \cdot 10^{-10}$ m/V, $V = 80$ V, $\nu = 100$ Hz, $C_0 = -6,4 \cdot 10^4$, tłumienie słabe podkrytyczne $\left(\frac{h}{\omega_{ij}} = 0,05 \right)$. Przebieg czasowy położenia punktu środkowego płyty przy

wymuszeniu piezoelektrycznym przedstawiony jest na poniższym rysunku ($i \cdot j = 100$). Widoczne są szybko gasnące drgania własne płyty. Drgania ustalone odbywające z częstotliwością wymuszenia zaobserwować można już od 0,1. sekundy procesu.



Rys. 5.2. Wychylenie punktu środkowego płyty w funkcji czasu

Postać drgań płyty $i \cdot j = 100$ przedstawiono na rysunku 5.2. Największe drgania występują w obszarze pod aktuatorem. Wychylenia punktu środkowego są trzykrotnie większe niż wychylenia tegoż punktu wywołane hałasem. Amplituda drgań pozostałych punktów płyty szybko maleje, aż do zera w miejscach podparcia (rys. 5.2).



Rys. 5.3. Postać drgań płyty pobudzonej naklejonym piezoelektrykiem

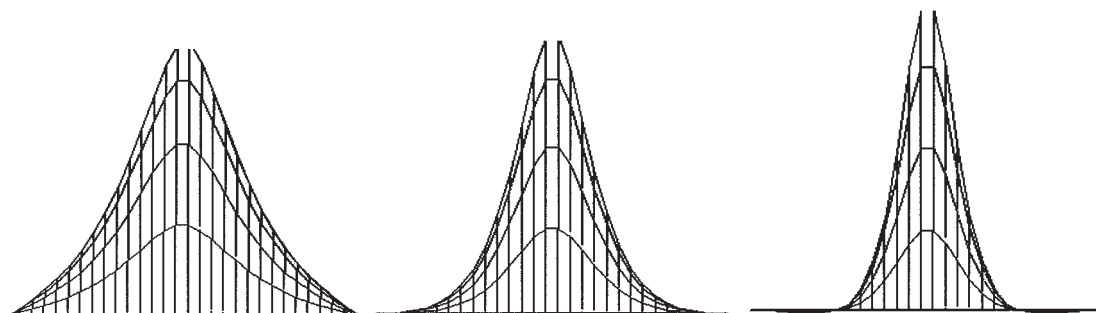
Obliczenia v_{RMS} ze względu na czasochłonność ich wykonania zostały przeprowadzone dla $i \cdot j = 25$ funkcji własnych. Średnia z przedziału czasu od 10. do 11. sekundy drgań przy wymuszeniu 100Hz v_{RMS} wynosi $4,48 \cdot 10^{-3}$ m/s. Parametry obliczeń dobrane tak, by błąd względny nie przekraczał 2%. Pozostałe wyniki przedstawiono w tabeli.

Tab. 5.1. Zestawienie v_{RMS} w zależności od częstotliwości wymuszającej

Częstotliwość wymuszenia [Hz]	Wartość v_{RMS} [m/s]
50	0,00183
60	0,00225
70	0,00271
80	0,00323
90	0,00381
100	0,00448
110	0,00529
120	0,00628
130	0,00756
140	0,00930
150	0,01184
180	0,03962
185	0,04969
187,87	0,05199
190	0,05077
200	0,03309
220	0,01865
240	0,01648

Inne spostrzeżenia

W punkcie czwartym zauważyliśmy, iż drgania płyty pobudzonej tylko na jednym swym brzegu wyraźnie maleją przy wzroście tłumienia. Przy nadkrytycznej wartości stałej pełzania drgania praktycznie nie dochodzą do przeciwległego brzegu płyty. Wy tłumaczyliśmy to pozornym „usztynieniem” płyty wynikającym ze wzrostu tarcia w materiale. Pozornym, ponieważ faktycznie sztywność statyczna płyty nie wzrosła. Model, którym obecnie się zajmujemy obrazuje to jeszcze wyraźniej. Duże tłumienie (około krytyczne lub większe) powoduje, że punkty o dużych amplitudach drgań wzbudzanych piezoelektrykiem znajdują się okolicach piezoelementu, tj. na środku płyty. Natomiast przy zerowym tłumieniu drga prawie cała płyta. Pokazane jest to na poniższym rysunku. Przy tłumieniu krytycznym wychylenie ($w = 0,35$ mm) mniejsze o 23%, niż przy tłumieniu słabym podkrytycznym ($w = 0,45$ mm), a przy tłumieniu nadkrytycznym (dokładnie 2x krytyczne) mniejsze o 42% ($w = 0,26$ mm).



Rys. 5.4. Drgania ustalone przy wymuszeniu 100 Hz. Od lewej: tłumienie słabe podkrytyczne, tłumienie krytyczne, tłumienie nadkrytyczne

Rezonans dobrze widoczny (patrz tabela 5.1).

Wnioski

Przy założonych parametrach układu, drgania wzbudzone piezoelektryczną łąką charakteryzują się energią zbliżoną do energii drgań wywołanych hałasem. Oznacza to, iż (na obecnym poziomie analizy) nadal jako realna jawi się możliwość teoretycznie całkowitego, aktywnego wytłumienia drgań płyty. Postać drgań płyty wzbudzonych piezoaktuatorem jest zbliżona do postaci drgań wywołanych hałasem. Podstawową i jedyną różnicą jest lokalność drgań wzbudzonych przez naklejoną łąkę. Można ten efekt zmniejszyć np. poprzez zastosowanie kilku mniejszych łąk naklejonych w więcej niż jednym punkcie płyty.

6. MODEL DRGANIOWY PŁYTY PODDANEJ STAŁEMU W CZASIE WYMUSZENIU POCHODZĄCEGO OD NAKLEJONEGO ELEMENTU PIEZOELEKTRYCZNEGO

6.1. Wyprowadzenie zależności

Punkt szósty poświęcimy analizie drgań płyty wytrąconej ze stanu równowagi poprzez piezoaktuator, na który zostanie podane stałe napięcie. Miejsce naklejenia i sposób opisu piezoelementu się nie zmieniają. Weźmiemy pod uwagę jedynie przypadek tłumienia podkrytycznego, gdyż odpowiada on tłumieniu jakim charakteryzuje się rzeczywista aluminiowa płyta. Równanie (5.2) z poprzedniego punktu zachowuje ważność, jednak w obecnym przypadku momenty gnące nie są już funkcjami czasu. Są stałe, względem czasu. Dokonując podstawień jak w rozdziale czwartym otrzymujemy równanie oscylatora harmonicznego wyburzonego z położenia równowagi przez stałe wymuszenie F .

$$ky + cy' + my'' = F. \quad (6.1)$$

Rozwiązanie jest sumą całki ogólnej RJ

$$y_1 = e^{-\frac{c}{2m}t} \left(C_1 \cos \left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} t \right) + C_2 \sin \left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} t \right) \right), \quad (6.2)$$

oraz całki szczególnej RN , która w tej sytuacji jest liczbą, i wynosi

$$y_2 = \frac{F}{k}. \quad (6.3)$$

Obydwie stałe C_1, C_2 całki ogólnej wyznaczymy korzystając z zerowych warunków początkowych. Wynoszą one

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{F}{k}, \\ C_2 &= \frac{-F(c + 2m)}{\sqrt{4mk - c^2}k}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Dla tłumienia podkrytycznego rozwiązanie równania oscylatora ma następującą postać

$$y = \frac{F}{k} \cdot \left[1 - e^{-\frac{c}{2m}t} \left(\cos \left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} t \right) + \frac{(c + 2m)}{\sqrt{4mk - c^2}} \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} t \right) \right) \right]. \quad (6.5)$$

Na powyższym przykładzie wyraziście widać, jak rozwiązanie równania drgań płyty zbiega do rozwiązania złożonego tylko z członu o swojej genezie w całce szczególnej. Wszak całka szczególna równania oscylatora harmonicznego związana jest z (w tym wypadku stałym) wymuszeniem od piezoaktuatora. Całka ogólna tegoż równania odpowiedzialna jest za opis wzbudzonych jednocześnie drgań własnych gasnących ze względu na tłumienie wewnętrzne c . Prowadzi to do rozwiązania równania drgań płyty

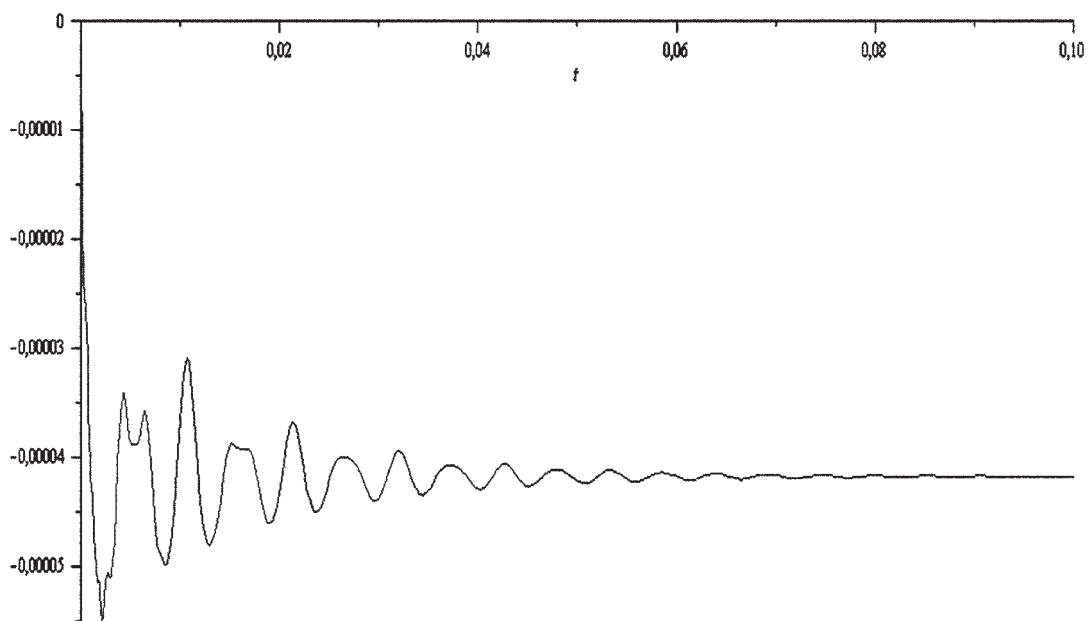
$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \frac{F}{k} \cdot \left[1 - e^{-\frac{c}{2m}t} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t\right) + \frac{(c + 2m)}{\sqrt{4mk - c^2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t\right) \right) \right]. \quad (6.6)$$

6.2. Rezultaty obliczeń i wnioski

Na poniższych wykresach na osiach pionowych odłożone zostało wychylenie poprzeczne punktów płyty w metrach. Rozważmy następujący przypadek: parametry piezoceramicznej łąty: $d_{31} = d_{32} = 1,71 \cdot 10^{-10}$ m/V, $V = 80$ V, $\nu = 100$ Hz, $C_0 = -6,4 \cdot 10^4$, tłumienie we-

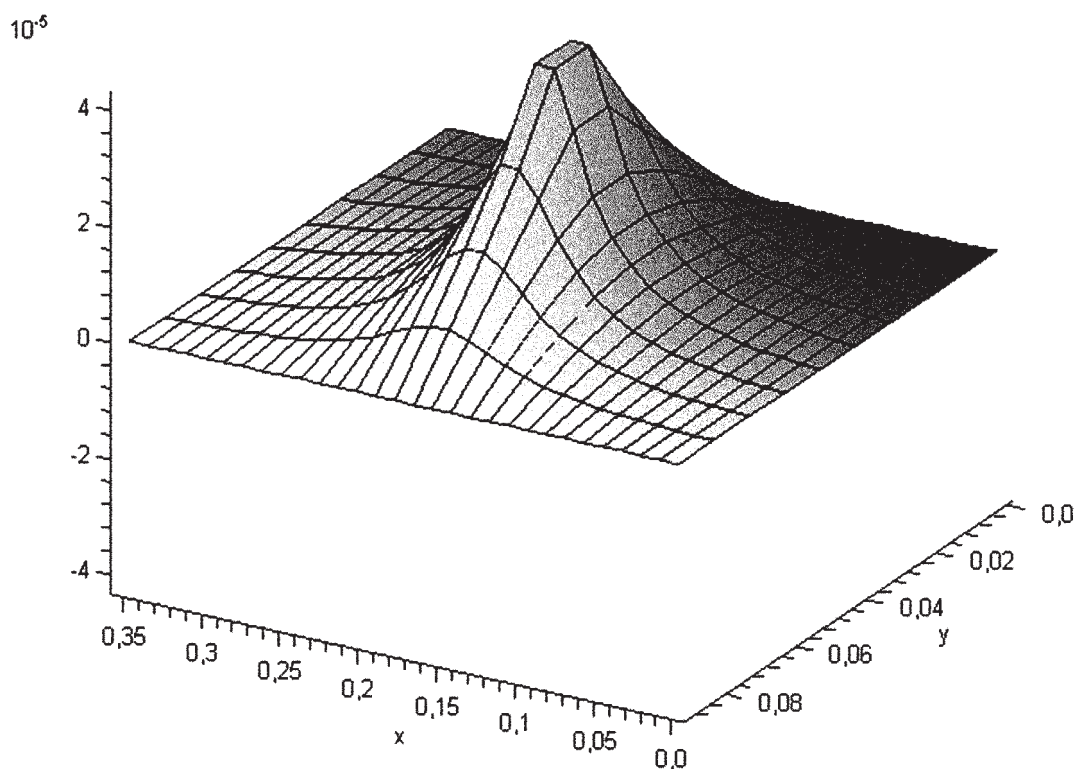
wnętrzne słabe podkrytyczne $\left(\frac{h}{\omega_{ij}} = 0,05\right)$. Wymiary piezoaktuatora to 1/10 odpowied-

niego wymiaru płyty, a grubość 0,1 mm. Przebieg czasowy położenia punktu środkowego płyty, przy wymuszeniu piezoelektrycznym przedstawiony jest na poniższym rysunku ($i \cdot j = 100$). Widoczne są gasnące drgania własne płyty. Ustają po niespełna 0,1 s trwania procesu, a punkt środkowy osiąga nowe położenie równowagi, odchyłony trwale od położenia zerowego o około 0,04 mm. Wielkość ta stanowi 400% amplitudy drgań ustalonych odbywających się z częstotliwością 100 Hz, wyznaczonych w dla układu o identycznych parametrach, poza napięciem, które to w poprzednim wypadku było przemienne, o wartości maksymalnej 80 V. Obecnie ma ono stałą wartość, również 80 V. W poprzednim wypadku (pkt. 5) drgania ustalone odbywały się od 0,1 sekundy procesu. Świadczy to o zbieżności obydwu modeli (drgania własne zanikają po podobnym czasie).



Rys. 6.1. Wychylenie punktu środkowego płyty w funkcji czasu

Postać nie drgań, a statycznego już wygięcia płyty $i \cdot j = 100$ zobrazowano na rysunku 6.2.



Rys. 6.2. Postać statycznego wygięcia płyty wywołanego naklejonym piezoelektrykiem

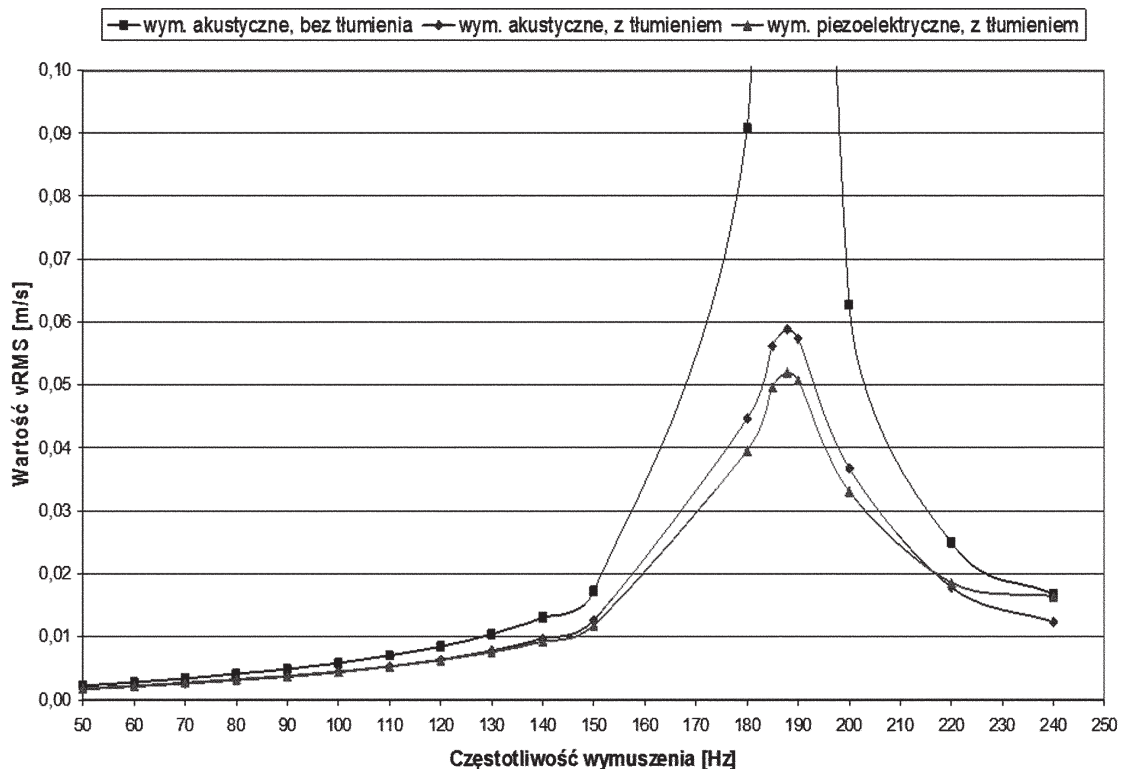
Wnioski

Zauważmy, iż początkowo drgania charakteryzują się stosunkowo dużą amplitudą (0,02 mm). Nakłada to pewne wymogi na układ sterowania badanym aktuatorem przy wykorzystaniu piezoelementu do aktywnego tłumienia drgań. Mianowicie napięcie na piezoceramicznej łacie nie powinno mieć charakteru impulsowego, a winno być funkcją ciągłą. Pozwoli to zapobiec wzbudzeniu niechcianych drgań własnych płyty i skupić się na tłumieniu jedynie ustalonych drgań wywołanych wymuszeniem akustycznym lub kinematycznym.

7. PODSUMOWANIE

W pracy przeanalizowano drgania aluminiowej prostokątnej płyty, pobudzonej do drgań przez jednorodne ciśnienie akustyczne, symulujące hałas lotniczy. Opracowano kolejno coraz bardziej złożone modele drgań płyty uwzględniające tłumienie w materiale oraz wymuszenie kinematyczne na brzegach płyty. W oparciu o nie przeprowadzono podstawowe analizy drganiowe. Następnie zbadano, jakie drgania wzbudzić może naklejony na środku płyty prostokątny piezoaktuator, pobudzany przyłożonym sinusoidalnie zmiennym napięciem. Porównano zarówno postać drgań jak i wartość skuteczną prędkości drgań poprzecznych punktów płyty pobudzonej ciśnieniem akustycznym oraz pobudzonej sterowanym piezoelementem. Zbadano także dynamikę płyty z piezoaktuatorem wytrąconym ze stanu zerowych naprężeń poprzez gwałtowne przyłożenie niezerowego napięcia.

W poniższym akapicie zebrano i wypunktowano trzy najważniejsze z punktu widzenia wibroakustycznego charakterystyki drganiowe. Na podstawie wyników z tabel 2.1, 3.1 i 5.1 sporządzono, zamieszczony niżej, zestawieniowy wykres. Przedstawiono na nim zależność wartości skutecznej poprzecznych drgań punktów płyty od częstotliwości wymuszenia. Częstotliwość rezonansowa to 187,87 Hz. Widzimy wyraźny pik v_{RMS} (skok do nieskończoności) w przypadku modelu nie uwzględniającego tłumienia wewnętrznego (pkt. 2). Linia zieloną oznaczono przebieg tej samej wielkości dla płyty, w której uwzględniono słabe tłumienie podkrytyczne (pkt. 3). Okazuje się, iż już nawet niewielka wartość stałej pełzania znacznie wygładza rezonans czyniąc nasz model znacznie bliższy rzeczywistości. Linia czerwoną oznaczono przebieg v_{RMS} dla płyty pobudzonej do drgań naklejonym na jej środku piezoelementem (pkt. 5). Charakterystyka częstotliwościowa jest bardzo zbliżona do poprzednich, a wymiary piezoceramicznej łąty zostały dobrane tak, by proces drganiowy pod względem energetycznym był zbliżony.



Rys. 7.1. Wykresy v_{RMS} trzech przypadków drgań płyty

Wnioski

1. Przy założonych parametrach fizycznych układu wzbudzana jest tylko pierwsza postać drgań własnych (pkt. 2). Stwierdzenie to jest prawdziwe w całym spektrum: od infradźwięków aż do pierwszej częstotliwości rezonansowej, czyli całym zakresie widma hałasu, jakie miałyby być aktywnie tłumione.
2. Wskazane będzie użycie dwóch piezoaktuatorów, ponieważ (jak wynika z pktu 5) drgania wzbudzone piezoelementem mają wyraźny charakter lokalny, a co za tym idzie, z pomocą jednego aktuatora może być niemożliwe wygaszenie drgań na całym obszarze płyty (zwłaszcza w jego polu dalekim). W wprowadzeniu zauważyliśmy, że analizowana płyta, jako podstawowa jednostka poszycia kadłuba samolotu, powtarza się w konstrukcji nie mniej niż kilkadziesiąt razy, toteż ze względów ekonomicznych większa liczba piezoelementów jest niedopuszczalna.
3. Optymalizacja położenia i liczby piezoelementów będzie łatwa. Wystarczy metodą systematycznego przeszukiwania przebadać różne położenia jednej do maksymalnie dwóch piezoelektrycznych łat. Zastosowanie tak prostej metody optymalizacji jest możliwe dzięki niewielkiej liczbie zmiennych decyzyjnych oraz małej wrażliwości układu na ich zmiany.
4. Pominięcie w analizach tłumienia wewnętrznego jest niedopuszczalne (pkt. 3), zaś pominięcie nieliniowego tłumienia wewnętrznego jest wskazane. Z zamieszczonych powyżej wykresów wynika, iż v_{RMS} poprzecznych drgań punktów płyty tylko nieznacznie zależy od wartości stałej pełzania, ale w okolicy częstotliwości rezonansowej drgania silnie zależą od samego uwzględnienia wewnętrznego tłumienia. Oznacza to, iż samo uwzględnienie tłumienia jest istotne, lecz nie ma potrzeby wprowadzania dodatkowej komplikacji modelu np. poprzez uwzględnienie nieliniowości współczynnika tłumienia, który nie byłby stały a stałby się funkcją wychylenia.
5. Konieczna jest identyfikacja drgań podłużnic (pkt. 4). W pracy uwzględniono jedynie pierwszą postać drgań własnych podłużnic. Jak wynika z rozdziału czwartego, v_{RMS} drgań płyty silnie zależy od przyjętego wymuszenia kinematycznego. Przystępując do realizacji projektu należy w pierwszej kolejności zmierzyć rzeczywiste amplitudy drgań punktów na brzegach płyty.
6. Możliwy jest dobór takiego elementu piezoelektrycznego, by energia drgań przezeń wzbudzanych była równa energii drgań wywołanych hałasem (pkt. 5). Wykonanie sterującej piezoelementami instalacji nie powinno nastroczać większych trudności. Dobry element piezoelektryczny charakteryzuje się następującymi wymiarami: długość i szerokość stanowią $1/10$ odpowiedniego wymiary gabarytowego płyty, tj. 35 mm × 9 mm. Grubość wynosi 0,1 mm. Przyjmując typowe własności piezoelektryczne, jakimi charakteryzują się dostępne w handlu piezoceramiki, możemy uzyskać drgania o energii zbliżonej do drgań wywołanych hałasem stosując niskie napięcia (amplituda rzędu 80 V). Jest to istotne ułatwienie z punktu widzenia wykonania rzeczywistej instalacji na pokładzie samolotu.
7. Napięcie na piezoaktuatorze powinno być funkcją ciągłą (pkt. 6). Impulsy napięcia tj. skoki od wartości zerowej do kilkadziesiąt volt, wzbudzają drgania własne, które mogą utrudniać wytłumienie drgań wywołanych hałasem.

Rekapitulując mamy prawo stwierdzić, iż na obecnym etapie analiz nie wykazano braku możliwości zrealizowania zaproponowanej koncepcji redukcji hałasu wewnątrz kabiny pasażerskiej polegającej na aktywnym tłumieniu niskoczęstotliwościowych drgań metalowych ścian kadłuba samolotu. Zostały wyznaczone najważniejsze kierunki, w jakich powinny podążać dalsze analizy wchodzące w skład planowanego projektu. W następnym jego etapie należy opracować analityczny model drgań płyty, której wymuszone akustycznie drgania będą aktywnie tłumione. Jest to zadanie skomplikowane obliczeniowo (konieczność rozwiązania układu sprzężonych dwóch liniowych równań różniczkowych rzędu piątego). Będzie to zarazem finalny model obliczeniowy, który ostatecznie odpowie na pytanie, czy i na ile skuteczna jest zaproponowana metoda redukcji hałasu.

BIBLIOGRAFIA

- [1] **Tylikowski A., Przybyłowicz P.:** *Nieklasyczne materiały piezoelektryczne w stabilizacji i tłumieniu drgań.* Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, 2004.
- [2] **Tylikowski A.:** *Konstrukcje inteligentne.* Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1997, vol. 35, nr 4, s. 991-1002.
- [3] **Bailey T., E. Hubbard J.:** *Distributed Piezoelectric – Polymer Active Vibration Control of an Cantilever Beam.* Journal Guidance, Control and Dynamics, 8 (1985), s. 605-611.
- [4] **Newman M. J.:** *Distributed Active Vibration Controllers.* in: C. A. Rogers and C. R. Fuller, (eds.) *Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration,* Technomic Publishing, Lancaster – Basel, 1991, s. 579–592.
- [5] **Dimitriadis E., Fuller C. R., Rogers C. A.:** *Piezoelectric Actuators For Distributed Vibration Excitation of Thin Plates.* Journal of Applied Mechanics, 113 (1991), s. 100-107.
- [6] **Tylikowski A.:** *Dynamics of Laminated Beams with Active Fibers.* in: Bogacz R., Popp K., (eds.), *3rd Polish – German Workshop Dynamical Problems in Mechanical Systems,* Wierzba, IPPT PAN, 1993, s. 67–78.
- [7] **Tylikowski A.:** *Stabilization of Beam Parametric Vibration.* Journal of Theoretical and Applied Mechanics 32 (1993), s. 657–670.
- [8] **Tylikowski A.:** *Influence of bonding layer on piezoelectric actuators of an axisymmetrical annular plate.* Journal of Theoretical and Applied Mechanics 38 (2000), s. 607-621.
- [9] **Tylikowski A.:** *Dynamics of delaminated elements of composite and smart structures.* Zeszyty Naukowe Akademii Techniczno-Rolniczej. Bydgoszcz 2002, nr 241, Mechanika 53, s. 265–274.
- [10] **Pietrzakowski M.:** *Dynamic model of beam – piezoelectric actuator coupling for active vibration control.* Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 35 (1997), s. 3–20.
- [11] **Lee C. K., Moon F. C.:** *Modal Sensors/Actuators.* Journal of Applied Mechanics, 57 (1990), s. 434–441.
- [12] **Tzou H. S., Fu H. Q.:** *A Study on Segmentation of Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators.* Part 1 – Theoretical analysis, DSC – 38, *Active Control of Noise and Vibration,* ASME, 1992, s. 239–246.
- [13] **Tylikowski A.:** *Simulation of thin plates excited by piezoelectric actuators.* Proceedings of the V-th International Conference on Computer Simulation and Artificial Intelligence, Mexico City, 2000, s. 85–92.
- [14] **Kumar S., Bhalla A. S., Cross L. E.:** *Smart Ceramics for Broadband Vibration Control.* Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 5 (1994), s. 673–677.
- [15] **Pourki F.:** *Active Distributed Damping of Flexible Structures Using Piezoelectric Actuator/Sensors.* Mechanics Research Communications, 20 (1993), s. 279–285.
- [16] **Tylikowski A.:** *Stabilization of plate parametric vibration via distributed control.* Journal of Theoretical and Applied Mechanics 43 (2005), s. 695–706, 2005.

- [17] *Wytrzymałość konstrukcji*. Praca zbiorowa pod redakcją **M. Bijak-Żochowskiego**. Tom 2, wydanie I. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2004.
- [18] **Osiński Z.**: *Teoria drgań*. Wydanie I. PWN. Warszawa 1980.
- [19] **Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.**: *Teoria płyt i powłok*. Wydanie II. Tłumaczenie: doc. dr inż. Jerzy Szymkiewicz. Arkady 1962.
- [20] *Tłumienie drgań*. Praca zbiorowa pod redakcją **Osińskiego Z.** PWN, Warszawa 1997.
- [21] **Cheda W., Malski M.**: *Płatownice. Techniczny poradnik lotniczy*. Wydanie drugie poszerzone. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności. Warszawa 1981.
- [22] **Pietrzakowski M.**: *Active Damping of Laminated Plates by Skewed Piezoelectric Patches*. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 39 (2), s. 377–393.

