

Robert HANUS¹, Leszek PETRYKA², Marcin ZYCH²

¹ POLITECHNIKA RZESZOWSKA, ZAKŁAD METROLOGII I SYSTEMÓW POMIAROWYCH

² AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA, KATEDRA ZASTOSOWAŃ FIZYKI JĄDROWEJ

Symulacyjna analiza losowych błędów estymacji czasu opóźnienia przy zastosowaniu metody korelacyjnej i fazowej

Dr inż. Robert HANUS

Adiunkt w Zakładzie Metrologii i Systemów Pomiarowych Wydziału Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Rzeszowskiej. W pracy naukowo-badawczej zajmuje się głównie zagadnieniami związanymi z modelowaniem i analizą sygnałów losowych oraz statystycznymi metodami pomiaru opóźnienia. Autor lub współautor kilkudziesięciu publikacji, członek Sekcji Aparatury i Systemów Pomiarowych KMiAN PAN.



e-mail: rohan@prz.edu.pl

Dr inż. Leszek PETRYKA

Absolwent Wydziału Elektrycznego Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie. Od ukończeniu studiów w 1969 r. nauczyciel akademicki w AGH, obecnie adiunkt na Wydziale Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH. Zainteresowania naukowe: przepływy wielofazowe i analiza procesów przepływowych, zastosowania techniki jądrowej oraz analiza sygnałów.



e-mail: petryka@novell.fjz.agh.edu.pl

Dr inż. Marcin ZYCH

Absolwent Wydziału Fizyki i Informatyki Stosowanej Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie. W 2007 roku obronił pracę doktorską z zakresu zastosowań metod fizyki jądrowej w badaniach przepływów wielofazowych. Zainteresowania naukowe: zastosowanie technik pomiarowych w badaniach procesów przemysłowych, analiza sygnałów, projektowanie i budowa instalacji laboratoryjnych.



e-mail: zych@novell.fjz.agh.edu.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono wyniki analizy porównawczej losowych błędów estymacji czasu opóźnienia otrzymanego z funkcji korelacji wzajemnej i fazy wzajemnej gęstości widmowej mocy. Przeprowadzone symulacje wykazały, że dla małych wartości stosunku sygnał/szum (SNR) mniejsze wartości błędów uzyskuje się dla metody korelacyjnej. Metoda fazowa jest natomiast bardziej efektywna dla dużych wartości SNR, a jej zaletą jest możliwość wyznaczenia opóźnienia dla wybranych harmonicznych.

Słowa kluczowe: estymacja czasu opóźnienia, funkcja korelacji wzajemnej, faza wzajemnej gęstości widmowej mocy, błędy statystyczne.

Simulation analysis of random errors of time delay estimation by cross-correlation and phase methods

Abstract

The paper presents results of the comparative analysis of random errors of the time delay estimation (TDE) by means of the cross-correlation analysis and the phase of power density distribution. The simulations performed show that for the low level of signal-to-noise-ratio (SNR) the statistical errors of TDE obtained from the cross-correlation analysis are smaller than those from the phase method. However, the latter one is more efficient for higher SNR than the cross-correlation and can be applied to any selected harmonics.

Keywords: time delay estimation, cross-correlation analysis, phase of power density distribution, statistical errors.

1. Wstęp

Estymacja czasu opóźnienia jest ważnym zagadnieniem w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów. Z problemem wyznaczania opóźnień czasowych spotykamy się m. in. w technice radarowej, radioastronomii, medycynie, w zagadnieniach dotyczących pomiarów prędkości, parametrów przepływów czy w analizie zjawisk sejsmicznych i meteorologicznych. W przypadku pomiarowych sygnałów stochastycznych, otrzymywanych z czujników, stosuje

się metody oparte na analizie statystycznej sygnałów. W literaturze opisywanych jest wiele metod pomiaru opóźnienia wykorzystujących analizę sygnałów zarówno w dziedzinie czasu jak i częstotliwości. Zakres stosowania poszczególnych metod zależy od właściwości sygnałów pomiarowych, takich jak stacjonarność, rozkład prawdopodobieństwa, skorelowanie, stosunek sygnału do szumu. Najbardziej znane metody klasyczne (oparte na przekształceniu Fouriera), stosowane dla gaussowskich sygnałów stacjonarnych, wykorzystują funkcję korelacji wzajemnej w dziedzinie czasu i fazę wzajemnej gęstości widmowej mocy w dziedzinie częstotliwości [1-5]. Do analizy sygnałów niestacjonarnych stosuje się głównie metody parametryczne. Przedmiotem, opisanym w niniejszej pracy badań, są statystyczne błędy estymacji opóźnienia dla bezpośrednich (direct connect) estymatorów funkcji korelacji wzajemnej i fazy wzajemnej gęstości widmowej mocy.

2. Modele sygnałów

Przyjmuje się, że sygnały $x(t)$ i $y(t)$ otrzymywane z czujników są związane zależnością [2]:

$$y(t) = c \cdot x(t - \tau_0) + z(t) \quad (1)$$

gdzie: $x(t)$ – stacjonarny sygnał losowy o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa $N(0, \sigma_x)$, stałym widmie w przedziale częstotliwości $f \in <0, B>$; c – stała; τ_0 – opóźnienie transportowe równe ilorazowi odległości między czujnikami L i średniej prędkości obiektu v ; $z(t)$ – stacjonarny, nieskorelowany z sygnałem $x(t)$ szum biały o rozkładzie $N(0, \sigma_z)$. W praktyce najczęściej sygnały $x(t)$ i $y(t)$ są realizacjami ergodycznych procesów $X(t)$ i $Y(t)$.

3. Wyznaczanie opóźnienia transportowego metodą korelacyjną i fazową oraz błędy estymacji

Funkcja korelacji wzajemnej (FK) $R_{xy}(\tau)$ dla procesów ergodycznych może być zapisana jako [1]:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \quad (2)$$

gdzie τ jest opóźnieniem, a T czasem obserwacji. Funkcja (2) osiąga wartość maksymalną dla $\tau = \tau_0$, stąd czas opóźnienia można wyznaczyć jako argument głównego maksimum tego rozkładu:

$$\tau_0 = \arg\{ \max R_{xy}(\tau) \} = \arg\{ R_{xy}(\tau_0) \} \quad (3)$$

Wzajemna jednostronna widmowa gęstość mocy (WGWM) związana jest z FK zależnością [1]:

$$G_{xy}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = |G_{xy}(f)| e^{-\Phi_{xy}(f)} \quad (4)$$

Argument WGWM $\Phi_{xy}(f)$ jest liniową funkcją częstotliwości (dla prędkości v niezależnej od f) i pozwala na wyznaczenie τ_0 . Opóźnienie w takim przypadku może być wyznaczone na podstawie współczynnika kierunkowego prostej uzyskanej drogą liniowej aproksymacji charakterystyki fazowej dla wybranego zakresu częstotliwości [1, 4]. Opóźnienie τ_0 można także wyznaczyć dla określonej harmonicznej, co może być przydatne w przypadku nieliniowej fazy (w ośrodkach dyspersyjnych), badaniach porównawczych, czy analizie niektórych sygnałów biomedycznych. W niniejszej pracy rozpatrywany jest przypadek wyznaczania opóźnienia transportowego z fazy WGWM dla wybranej harmonicznej f_0 .

Dla sygnałów opisanych równaniem (1) i częstotliwości $f = f_0$ $\Phi_{xy}(f_0) = -2\pi f_0 \tau_0$, opóźnienie transportowe:

$$\tau_0 = -\frac{\Phi_{xy}(f_0)}{2\pi f_0} \quad (5)$$

Do obliczania gęstości widmowych mocy i funkcji korelacji obecnie stosuje się najczęściej skończoną, dyskretną transformatę Fouriera i algorytmy FFT oraz procedury Welch lub Barletta. Sygnały $x(t)$ i $y(t)$ są próbkowane z odpowiednio dobraną częstotliwością f_s , a zebrane rekordy o liczbie próbek N_{total} dzielone są na N_d niezależnych segmentów o długości N (metoda Welch). Następnie każdy segment jest mnożony przez wybraną funkcję okna i poddawany transformacji DFT. Odstęp w dziedzinie częstotliwości wynosi $\Delta f = f_s / N$, a użyteczny zakres harmonicznych f_k to $k = 0, 1, \dots, (N-1)/2$ wartości. Uzyskane w ten sposób dla każdego segmentu zgrubne estymatory uśrednia się następnie w zbiorze uzyskując estymatory wygładzone. W przypadku fazy WGWM w wyżej omówiony sposób otrzymuje się wygładzone części rzeczywistą i urojoną WGWM, z których można obliczyć $\Phi_{xy}(f)$ stosując procedurę rozwijania fazy. Maksymalna wartość B może być równa częstotliwości Nyquista: $B = f_c = (N/2)\Delta f$.

Odchylenia standardowe opóźnienia wyznaczonego na podstawie FK i fazy WGWM, można określić z zależności [1, 2, 6]:

$$\sigma[\hat{\tau}_0]_{FK} \approx \frac{0,93}{\pi B} \left[\frac{1 + \rho_{xy}^{-2}(\tau_0)}{NN_d} \right]^{1/4} \quad (6)$$

$$\sigma[\hat{\tau}_0]_{WGWM} \approx \frac{1}{2\pi f_0} \left[\frac{1 - \gamma_{xy}^2(f_0)}{2N_d \gamma_{xy}^2(f_0)} \right]^{1/2} \quad (7)$$

gdzie: $\rho_{xy}(\tau_0)$ jest unormowaną funkcją korelacji wzajemnej sygnałów $x(t)$ i $y(t)$ a $\gamma_{xy}^2(f_0)$ jest funkcją koherencji, będącą unormowaną WGWM.

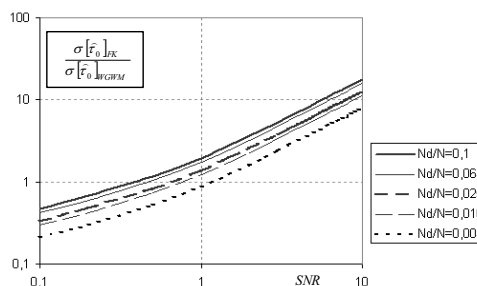
W pracy [7] dla modeli sygnałów (1) określono zależności $\rho_{xy}(\tau_0)$ oraz $\gamma_{xy}^2(f_0)$ od stosunku sygnał/szum, zdefiniowanego jako $SNR = \sigma_x/\sigma_z$, a następnie po ich podstawieniu do (6) i (7) otrzymano równanie pozwalające na porównanie odchyłeń standardowych opóźnienia wyznaczonego za pośrednictwem FK i fazy WGWM w funkcji SNR :

$$\frac{\sigma[\hat{\tau}_0]_{FK}}{\sigma[\hat{\tau}_0]_{WGWM}} \approx 2,63\alpha c SNR \left[\frac{2N_d}{N} \left(1 + \frac{1}{2c^2 SNR^2} \right) \right]^{1/4} \quad (8)$$

gdzie $\alpha = f_0/B$. Zadawanie wartości α pozwala analizować zmienność (8) w zależności od stosunku częstotliwości f_0 do szerokości pasma sygnału B . Maksymalna wartość f_0 może być równa B , wówczas $\alpha = 1$.

4. Eksperyment symulacyjny, uzyskane wyniki i ich ocena

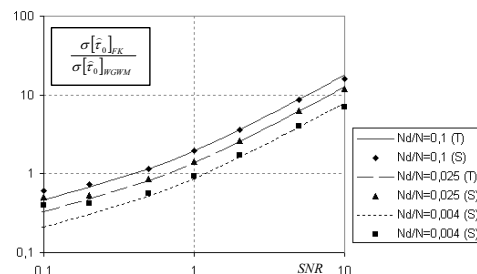
Wykorzystując zrealizowany w środowisku LabVIEW wirtualny analizator fazy [8], rozbudowany o moduł analizy korelacyjnej, generowano wzajemnie opóźnione sygnały stochastyczne, będące dyskretną wersją modelu (1). Założono, że całkowita liczba próbek jest stała $N_{total} = N$, $N_d = 100\,000$, a liczba uśrednień N_d będzie równa: 100, 80, 50, 40 i 20. Liczba próbek N wynosiła więc kolejno 1000, 1250, 2000, 2500 i 5000, a wartości ilorazu N_d/N odpowiednio: 0,1; 0,064; 0,025; 0,016 i 0,004. Na rysunku 1 przedstawiono wykresy zależności $\sigma[\hat{\tau}_0]_{FK}/\sigma[\hat{\tau}_0]_{WGWM} = f(SNR)$ dla $\alpha = 1$, $c = 1$ i wyżej wymienionych wartości N_d/N obliczone na podstawie (8).



Rys. 1. Zależność $\sigma[\hat{\tau}_0]_{FK}/\sigma[\hat{\tau}_0]_{WGWM} = f(SNR)$ dla różnych wartości stosunku N_d/N
Fig. 1. The relation of $\sigma[\hat{\tau}_0]_{FK}/\sigma[\hat{\tau}_0]_{WGWM} = f(SNR)$ for selected values of N_d/N

Do symulacji sygnałów wykorzystano generatory szumu białego, a wartość B ograniczono do $0,495 f_s$ stosując filtrację dolno-przepustową. W pierwszym eksperymencie symulacyjnym dla wyżej wymienionych wartości N i N_d wyznaczano odchylenia standardowe z zależności (6) i (7), w których unormowaną korelację wzajemną i koherencję zastąpiono estymatorami tych funkcji wyznaczanymi z zastosowaniem DFT i metody Welch. Opóźnienie transportowe wyznaczone było na podstawie lokalizacji głównego ekstremum FK i fazy WGWM dla harmonicznych f_{0k} ($k = 490$). Wartość zadana opóźnienia wynosiła 20 próbek.

Rysunek 2 przedstawia wyniki symulacji (wartości uśrednione dla 100 niezależnych powtórzeń eksperymentu) dla kilku wartości stosunku N_d/N (punkty S), pokazane na tle krzywych teoretycznych (linie T). Eksperymenty przeprowadzono dla wartości SNR od 0,1 do 10.



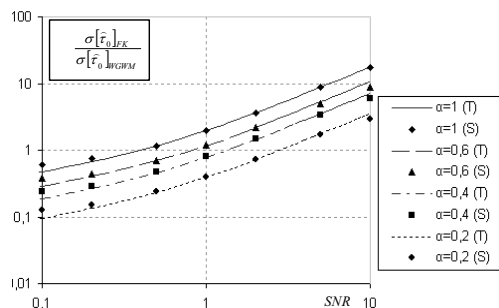
Rys. 2. Zależność $\sigma[\hat{\tau}_0]_{FK}/\sigma[\hat{\tau}_0]_{WGWM} = f(SNR)$ dla $\alpha = 1$, $c = 1$ i różnych wartości
stosunku N_d/N : (T) - obliczenia, (S) - symulacja

Fig. 2. The relation of $\sigma[\hat{\tau}_0]_{FK}/\sigma[\hat{\tau}_0]_{WGWM} = f(SNR)$ for $\alpha = 1$, $c = 1$ and selected
values of N_d/N : (T) - calculated, (S) - simulated

Uzyskano dużą zgodność wyników obliczeń i symulacji dla $SNR > 0,5$. Przy mniejszych wartościach SNR dla przyjętych parametrów analizy (założona liczba próbek i w konsekwencji ograniczona liczba uśrednień) rosną błędy estymacji, w szczególności dla funkcji koherencji [5], co powoduje przeszacowanie odchylenia (7). Liczbę 100 powtórzeń eksperymentu uznano za wystar-

czającą, gdyż przeprowadzone dla większej liczby powtórzeń przykładowe symulacje nie wykazały istotnych różnic.

W drugim eksperymencie założono stałą wartość ilorazu $N_d/N = 0,1$, natomiast zmieniano stosunek $\alpha = f_0/B$, który przyjmował wartości równe 1; 0,6; 0,4 i 0,2. Podobnie jak poprzednio wyniki obliczeń wg (8) porównano z rezultatami symulacji. Uzyskane wyniki (wartości uśrednione dla 100 niezależnych powtórzeń eksperymentu) przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Zależność $\sigma[\hat{\tau}_0]_{FK} / \sigma[\hat{\tau}_0]_{WGWM} = f(SNR)$ dla $N_d/N = 0,1$; $c = 1$ i różnych

wartości $\alpha = f_0/B$: (T) - obliczenia, (S) - symulacja

Fig. 3. The relation of $\sigma[\hat{\tau}_0]_{FK} / \sigma[\hat{\tau}_0]_{WGWM} = f(SNR)$ for $N_d/N = 0,1$; $c = 1$ and for a few values of $\alpha = f_0/B$: (T) - calculated, (S) - simulated

Podobnie jak w pierwszym eksperymencie dla $SNR > 0,5$ uzyskano dużą zgodność wyników symulacji i obliczeń. Różnice dla mniejszych wartości SNR były spowodowane ograniczoną liczbą uśrednień wynikającą z przyjętych założeń.

5. Podsumowanie

W artykule porównano losowe błędy estymacji czasu opóźnienia przy zastosowaniu funkcji korelacji wzajemnej i fazy wzajemnej gęstości widmowej mocy. Rozpatrywano sposoby wyznacza-

nia opóźnienia polegające na lokalizacji głównego ekstremum FK oraz wykorzystania wartości fazy WGWM dla jednej wybranej częstotliwości. Przeprowadzone dla przyjętych modeli sygnałów i metod estymacji symulacje pozwalają stwierdzić, że w zakresie niskich wartości SNR dokładniejsza jest estymacja opóźnienia przy wykorzystaniu funkcji korelacji wzajemnej, natomiast dla wysokich SNR korzystniejsze jest wyznaczenie opóźnienia na podstawie fazy wzajemnej gęstości widmowej mocy. Graniczne wartości ilorazu $\sigma[\hat{\tau}_0]_{FK} / \sigma[\hat{\tau}_0]_{WGWM}$ zależą także od parametrów N_d , N , f_0 , B . Uzyskane wyniki symulacji są zbieżne z wynikami analizy teoretycznej przedstawionej w [7].

6. Literatura

- [1] Bendat J.S., Piersol A.G.: Random data - analysis and measurement procedures. John Wiley, New York 2000.
- [2] Bendat J.S., Piersol A.G.: Engineering applications of correlation and spectral analysis. John Wiley, New York 1993.
- [3] Beck M.S., Plaskowski A.: Cross-correlation flowmeters. Adam Hilger, Bristol 1987.
- [4] Piersol A. G.: Time delay estimation using phase data. IEEE Transactions on ASSP, Vol. 29 (1981), No. 3, 471-477.
- [5] Carter C.G.: Coherence and time delay estimation. Proceedings of the IEEE, Vol. 75 (1987), No. 2, 236-255.
- [6] Hanus R.: Statistical error analysis of time delay measurement using phase of cross-spectral density function. Systems Analysis Modelling Simulation, Vol. 43 (2003), No. 8, 993-998.
- [7] Hanus R.: Porównanie statystycznych błędów estymacji czasu opóźnienia przy zastosowaniu funkcji korelacji wzajemnej i fazy wzajemnej gęstości widmowej mocy. 40 Międzyuczelniana Konferencja Metrologów, Świnoujście 14-17 września 2008 (CD).
- [8] Hanus R.: Wirtualny analizator fazy wzajemnej gęstości widmowej mocy. Pomiary Automatyka Kontrola Vol. 53 (2007), Nr 12.

Artykuł recenzowany

INFORMACJE

Cennik publikacji reklam w miesięczniku naukowo-technicznym PAK

REKLAMA	w skali odcieni szarości [ceny netto]	kolor [ceny netto]
I okładka (212(s) x 213(w) mm)	-	1 800,00
II okładka (212x301 mm)	-	1 600,00
III okładka (212x301 mm)	-	1 500,00
IV okładka (212x301 mm)	-	1 700,00
1 strona (200x297 mm)	900,00	1 100,00
½ strony (200x145mm) - pozioma	500,00	700,00

Reklamę należy przygotować zgodnie z obowiązującymi wytycznymi znajdującymi się na stronie internetowej: www.pak.info.pl