Adam KOWALCZYK
POLITECHNIKA RZESZOWSKA, ZAKŁAD METROLOGII I SYSTEMÓW POMIAROWYCH

Klasyczna metoda wyznaczania właściwości dynamicznych systemów liniowych z wykorzystaniem warunkowego uśredniania sygnałów

Dr hab. inż. Adam KOWALCZYK

Profesor nadzwyczajny Politechniki Rzeszowskiej, Kierownik Zakładu Metrologii i Systemów Pomiarowych. Ukończył specjalność Miernictwo Elektryczne i Przyrządy Pomiarowe na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej w 1973 roku. Stopień doktora uzyskał w 1983r., a doktora habilitowanego w 1992r. Dyscyplina i specjalności naukowe: elektronika, metrologia elektryczna i elektroniczna, systemy pomiarowe wielkości nieelektrycznych, przetwarzanie sygnałów stochastycznych.

e-mail: kowadam@prz.edu.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono metodę wyznaczania odpowiedzi impulsowej systemu liniowego. Zastosowano jako sygnał testowy szum biały o rozkładzie normalnym i wykorzystano warunkowe uśrednianie sygnału wyjściowego i wejściowego.

Słowa kluczowe: szum biały z rozkładem normalnym, warunkowe uśrednianie sygnałów, odpowiedź impulsowa.

Classical method for determination of linear system dynamic properties using signal conditional averaging

Abstract

The method for determination of the linear system impulse response is presented in the paper. The white noise of normal distribution and the band limited to low frequencies has been applied as a test signal. The cross conditional averaging of the input and output signal has been used in the method.

Keywords: white noise of normal distribution, conditional signal averaging, impulse response.

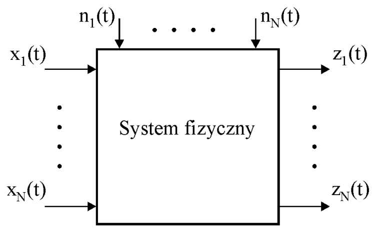
1. Wstęp

Wiedza o właściwościach dynamicznych wyodrębnianych układów fizycznych jest potrzebna do ich indywidualnej oceny jakościowej pod kątem przydatności w konkretnym zastosowaniu a także do syntezy lub analizy systemów fizycznych składających się z wyodrębnionych układów.

W klasycznych metodach opisu właściwości dynamicznych liniowych układów fizycznych wykorzystywane są równania różniczkowe, transmitancje operatorowe i funkcje charakteryzujące, które można bezpośrednio mierzyć [1, 2, 3, 4, 5]. Przy wprowadzeniu na wejście x układu fizycznego specjalnego sygnału testowego, odpowiednia wielkość, która wystąpi na wyjściu y układu fizycznego (funkcja wielkości) traktowana jest jako funkcja charakteryzująca. Podstawowymi funkcjami charakteryzującymi układy liniowe są: charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowa $|K(j\omega)|$, fazowo-częstotliwościowa *φ(ω)*, odpowiedź skokowa $h(t)$, odpowiedź impulsowa $k(t)$, funkcja korelacji $R_{xy}(\tau)$ i gęstość widmowa mocy $S_{xy}(\omega)$.

W przypadku ogólnym wyznaczenie nieznanych dynamicznych właściwości systemu fizycznego wymaga podania modelu matematycznego dla zależności pomiędzy sygnałami wejściowymi $x_1(t)...x_N(t)$, wyjściowymi $z_1(t)...z_N(t)$ i zakłóceniami $n_1(t)...n_N(t)$ (rys. 1).

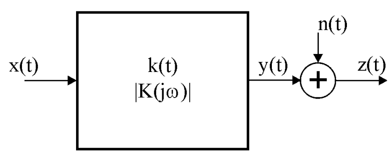
Dla różnych klas sygnałów występujących w modelu na rys. 1 związki pomiędzy sygnałami można charakteryzować na wiele różnych sposobów [2].



Rys. 1. Ogólny model fizycznego systemu dynamicznego
Fig. 1. General model of dynamic system

W celu wyznaczania podstawowych funkcji charakteryzujących konieczne jest przyjęcie w modelu z rys. 1 szeregu dodatkowych założeń.

Po uproszczeniu modelu fizycznego systemu dynamicznego z rys. 1 do systemu liniowego i stacjonarnego z jednym wejściem $x(t)$ i jednym wyjściem $y(t)$ oraz pojedynczym addytywnym sygnałem zakłócającym $n(t)$ na wyjściu (stacjonarny sygnał losowy niezależny od sygnału wejściowego $x(t)$) otrzymuje się klasyczny model problemu identyfikacji (rys. 2).



Rys. 2. Model identyfikacji systemu liniowego z jednym wejściem i jednym wyjściem
Fig. 2. Model for identification of a linear system with one input and output

W klasycznym podejściu zadanie wyznaczenia właściwości dynamicznych systemu badanego w dziedzinie czasu lub częstotliwości sprowadza się do wyznaczenia odpowiedzi impulsowej $k(t)$ lub charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej $|K(j\omega)|$ przy wykorzystaniu wejściowych testowych sygnałów zdeterminowanych lub stochastycznych.

W dziedzinie czasu zastosowania testowego sygnału stochastycznego $x(t)$ posiadającego funkcję autokorelacji $R_x(\tau)$ umożliwia wyznaczenie funkcji korelacji wzajemnej $R_{xy}(\tau)$ i odpowiedzi impulsowej $k(\tau)$ badanego systemu z równania całki splotowej [5]:

$$R_{xz}(\tau) = R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau - \Theta)k(\Theta)d\Theta \; . \quad (1)$$

W dziedzinie częstotliwości, przy braku sygnału zakłócającego $n(t)$ po zastosowaniu stochastycznego sygnału testowego $x(t)$ posiadającego jednostronna gęstość widmową mocy $G_x(\omega)$ i wyznaczeniu jednostronnej gęstości widmowej mocy $G_y(\omega)$ dla sygnału wyjściowego $y(t)$, moduł transmitancji widmowej $\left|K(j\omega)\right|$ wyznacza się z zależności:

$$G_y(\omega) = G_x(\omega)\left|K(j\omega)\right|^2. \tag{2}$$

W kolejnych punktach pracy zaproponowano i opisano metodę identyfikacji stacjonarnych systemów liniowych wykorzystującą warunkowe charakterystyki probabilistyczne w dziedzinie opisu amplitudowego sygnałów.

2. Opis metody

Sygnałem testowym $x(t)$ dla badania właściwości dynamicznych systemu z ograniczonym pasmem częstotliwościowym f_g (rys. 2) jest dolnopasmowy szum biały o gęstości widmowej mocy $G_x(\omega) = G_x = const$ w paśmie B_x, funkcji korelacji $R_x(\tau) = G_x B_x \frac{\sin 2\pi B_x \tau}{2\pi B_x \tau}$ i gęstości prawdopodobieństwa $N(0,\sigma_x)$.

Wejściowy stacjonarny sygnał losowy $x(t)$ o cechach szumu białego z normalnym rozkładem prawdopodobieństwa wartości chwilowych $p_x(x)$ po przejściu przez system liniowy jako sygnał $y(t)$ praktycznie zmienia kształt funkcji autokorelacji $R_y(\tau)$ i nie zmienia kształtu funkcji gęstości prawdopodobieństwa $p_y(y)$ w stosunku do odpowiednich charakterystyk sygnału wejściowego $x(t)$. Modelem rozkładu prawdopodobieństwa sygnału $y(t)$ będzie rozkład $N(0,\sigma_y)$, normalne będą także: łączna gęstość prawdopodobieństwa $p(x,y)$ oraz gęstości warunkowe $p\left(y|_x\right)$ i $p\left(x|_y\right)$.

Jeżeli sygnały $x(t)$ i $y(t)$ są łącznie normalne o wartościach średnich równych zero to warunkowa gęstość prawdopodobieństwa sygnału $y(t_i+\tau)$ przy warunku $x(t_i) = x_0$ jest opisana wyrażeniem [6]:

$$p\left[y(\tau)|_{x_o}\right] = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho_{xy}^2(\tau)}}\cdot\exp\left\{-\frac{\left[y(\tau)-\frac{\sigma_y\cdot\rho_{xy}(\tau)}{\sigma_x}x_o\right]^2}{2\sigma_y^2\left(1-\rho_{xy}^2(\tau)\right)}\right\} \tag{3}$$

z warunkową wartością oczekiwaną:

$$E\left[y(t+\tau)|_{x=x_o}\right] = E\left[y(\tau)|_{x_o}\right] = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot\rho_{xy}(\tau)\cdot x_o \tag{4}$$

i warunkową wariancją:

$$\sigma^2_{y(\tau)|_{x_o}} = \sigma_y^2\left[1-\rho^2_{xy(\tau)}\right]. \tag{5}$$

W sytuacji niezależności sygnału zakłócającego $n(t)$ od sygnału wejściowego $x(t)$ warunkowa wartość oczekiwana dostępnego na wyjściu sygnału $z(t)$ także jest niezależna od szumu $n(t)$:

$$E\left[z(\tau)|_{x_o}\right] = E\left[y(\tau)|_{x_o}\right] + E\left[n(\tau)|_{x_o}\right] = E\left[y(\tau)|_{x_o}\right] \tag{6}$$

Dla technicznie realizowalnego szumu białego posiadającego płaskie widmo w paśmie znacznie szerszym od pasma częstotliwościowego badanego systemu $(B_x >> f_q)$ funkcja $k(\Theta)$ w wyrażeniu (1) będzie w przybliżeniu stała w porównaniu z funkcją $R_x(\tau-\Theta)$ w wąskim przedziale w pobliżu punktu $\Theta = \tau$, w którym $R_x(\tau-\Theta)$ posiada istotne wartości.

Z równania (1) po przekształceniach otrzymuje się:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_x(\tau-\Theta)k(\Theta)d\Theta \approx$$
$$\approx \frac{\sigma_x}{\sigma_y}k(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\rho_x(\tau-\Theta)d\Theta = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\frac{k(\tau)}{2B_x}. \tag{7}$$

Podstawienie (4) i (7) do (6) daje wyrażenie umożliwiające wyznaczenie odpowiedzi impulsowej

$$\hat{k}(\tau) = \frac{2B_x}{x_o}\overline{Z}(t)\Big|_{x_o}, \tag{8}$$

gdzie: warunkowa średnia arytmetyczna $\overline{Z}(\tau)\big|_{x_0}$ jest estymatorem warunkowej wartości oczekiwanej $E\left[z(\tau)|_{x_0}\right]$.

W przedstawionym sposobie otrzymania odpowiedzi impulsowej $\hat{k}(\tau)$ systemu liniowego wykorzystuje się wyznaczenie wartości średniej sygnału wyjściowego $z(t+\tau)$ przy warunku $x(t) = x_o$.

W praktycznej realizacji sposób wymaga ciągłej (w czasie obserwacji T_0) rejestracji cyfrowej sygnału $z(t)$ oraz momentów czasowych t_i w których sygnał $x(t)$ przyjmuje wartości x_o a następnie numerycznej estymacji zależności (8).

W celu wyznaczenia odpowiedzi impulsowej $\hat{k}(\tau)$ można wykorzystać drugi sposób z liniową zależnością regresyjną:

$$E\left[x(t+\tau)|_{z=z_0}\right] = \frac{\sigma_x}{\sigma_z}\rho_{zx}(\tau)z_0. \tag{9}$$

Przy wykorzystaniu zależności (10) i (11)

$$\rho_{zx}(\tau) = \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\rho_{xy}(-\tau), \tag{10}$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_y^2 + \sigma_n^2, \tag{11}$$

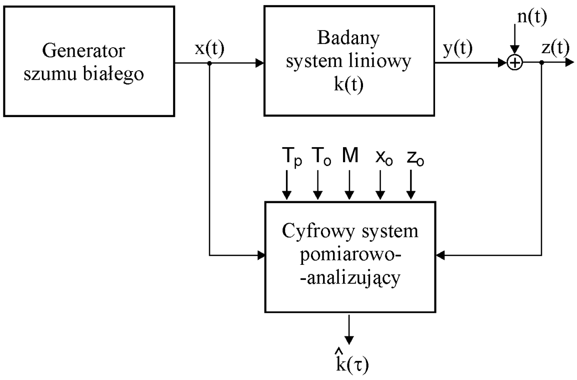
oraz uwzględnieniu (7) i (9) otrzymuje się zależność końcową:

$$\hat{k}(\tau) = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)^2\left[1+\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_y}\right)^2\right]\frac{2B_x}{z_0}\overline{X}(-\tau)\Big|_{z_0}. \tag{12}$$

gdzie: warunkowa średnia arytmetyczna $\overline{X}(\tau)\big|_{z_0}$ jest estymatorem warunkowej wartości oczekiwanej $E\left[x(-\tau)|_{x_0}\right]$.

Współczynnik proporcjonalności w ostatnim równaniu w porównaniu z zależnością (8) zależy od stosunku wariancji σ_z^2 na wyjściu do wariancji σ_x^2 na wejściu badanego systemu.

W podanym sposobie otrzymania odpowiedzi impulsowej $\hat{k}(t)$ systemu liniowego należy warunkowo uśredniać realizacje sygnału wejściowego $x(t_i-\tau)$ przy warunku $z(t_i) = z_0$. Uśrednianie realizacji sygnału $x(t)$ dla ujemnych wartości τ przy cyfrowym przetwarzaniu i analizie sygnałów jest stosunkowo łatwe w realizacji praktycznej.



Rys. 3. Schemat układu pomiarowego wyznaczania odpowiedzi impulsowej
Fig. 3. Measurement system for determination of impulse response

Schemat układu pomiarowego realizującego proponowaną metodę identyfikacji podany jest na rys. 3.

Dla wykorzystania zależności (8) układ inicjuje uśrednianie realizacji sygnału $z(t)$ o długości T_r (N próbek sygnału z odstępem T_p) w momentach, w których sygnał $x(t)$ przekracza zadany poziom x_0 zarówno z pochodną dodatnią jak i ujemną.

Liczba warunkowo uśrednionych realizacji w czasie obserwacji T_0 wynosi M. Estymator odpowiedzi impulsowej badanego systemu fizycznego otrzymuje się z zależności:

$$\hat{k}(iT_p) = \frac{2B_x}{x_0}\frac{\sum_{i=1}^{M} z(iT_p)}{M} \qquad (13)$$

3. Niepewność estymacji odpowiedzi impulsowej

Przy wykorzystaniu zależności (8) kwadrat względnej niepewności standardowej estymatora odpowiedzi impulsowej można wyrazić poprzez kwadrat względnej niepewności standardowej estymatora warunkowej wartości średniej:

$$\delta_{\hat{k}}^2(\tau) = \frac{\sigma_{\hat{k}}^2(\tau)}{\hat{k}^2(\tau)} = \frac{\sigma^2_{\bar{Z}|_{x_0}}(\tau)}{\bar{Z}^2_{|x_0}(\tau)}. \qquad (14)$$

Wariancja warunkowej wartości średniej dla M uśrednień jest równa sumie wariancji warunkowych średnich sygnału *y(t)* i zakłócenia *n(t)*:

$$\sigma^2_{\bar{Z}|_{x_0}}(\tau) = \sigma^2_{\bar{Y}|_{x_0}}(\tau) + \sigma^2_{\bar{N}|_{x_0}} = \frac{\sigma_y^2\left[1-\rho_{xy}^2(\tau)\right]}{M} + \frac{\sigma_n^2}{M} \qquad (15)$$

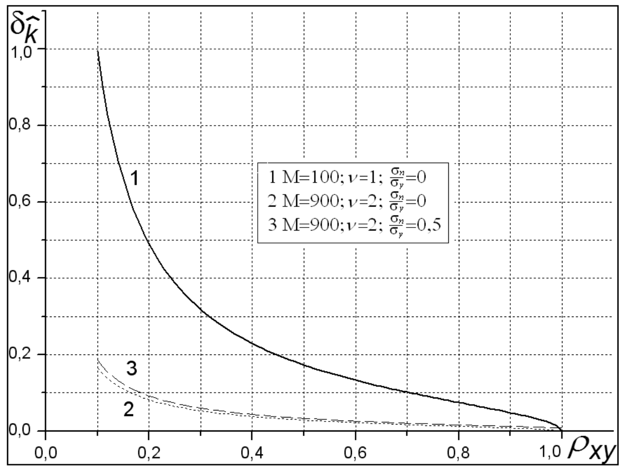
a wariancja obliczenia odpowiedzi impulsowej z wyrażenia (13) wynosi:

$$\sigma_{\hat{k}}^2(\tau) = \left(\frac{2B_x}{x_0}\right)^2 \sigma^2_{\bar{Z}|_{x_0}}(\tau) = \frac{4B_x^2\sigma_y^2\left[1-\rho_{xy}^2(\tau)\right]}{Mx_0^2} + \frac{4B_x^2\sigma_n^2}{Mx_0^2} \qquad (16)$$

Względną niepewność standardową wyznaczenia odpowiedzi impulsowej, po uwzględnieniu (4), (6), (8) i (16) można obliczyć z zależności:

$$\delta_{\hat{k}} = \frac{\sigma_{\hat{k}}(\tau)}{\hat{k}(\tau)} = \frac{\sqrt{1-\rho_{xy}^2(\tau)+\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_y}\right)^2}}{\sqrt{M}\,\rho_{xy}(\tau)\cdot\nu}, \qquad (17)$$

gdzie: $\nu = \frac{x_0}{\sigma_x}$.



Rys. 4. Względna niepewność standardowa wyznaczania odpowiedzi impulsowej
Fig. 4. Relative standard uncertainty of the impulse response determination

Otrzymaną zależność ilustruje rysunek 4 dla różnych wartości unormowanej funkcji korelacji wzajemnej $\rho_{xy}(\tau)$ oraz zadanych parametrów:

1) $M = 100$; $\nu = 1$; $\frac{\sigma_n}{\sigma_y} = 0$;

2) $M = 900$; $\nu = 2$; $\frac{\sigma_n}{\sigma_y} = 0$;

3) $M = 900$; $\nu = 2$; $\frac{\sigma_n}{\sigma_y} = 0{,}5$.

4. Podsumowanie

Wykorzystujące sygnały stochastyczne klasyczne metody wyznaczania właściwości dynamicznych systemów liniowych w dziedzinie czasu (metoda korelacyjna) i dziedzinie częstotliwości (metody gęstości widmowej mocy) w praktyce, oprócz charakterystycznych dla metod operacji nieliniowych, stosują dwukrotne uśrednianie. Pierwszy raz w procedurach przetwarzania sygnałów i otrzymywania estymat charakterystyk statystycznych (np. funkcji korelacji) drugi raz ze względu na dokładnościowe potrzeby uśredniania otrzymanych estymat charakterystyk.

Zaproponowana metoda wyznaczania właściwości dynamicznych stacjonarnych systemów liniowych wykorzystuje technicznie realizowalny dolnopasmowy szum biały o rozkładzie $N(0,\sigma_x)$ jako sygnał testowy i warunkowe uśrednianie sygnałów $z(\tau)\big|_{x=x_0}$ albo $x(-\tau)\big|_{z=z_0}$. Uśrednianie warunkowe jest jedyną operacją wykonywaną na zarejestrowanych sygnałach.

Wariancja estymatora odpowiedzi impulsowej $\hat{k}(\tau)$ jest odwrotnie proporcjonalna do liczby M uśrednianych realizacji.

Względna niepewność standardowa odpowiedzi impulsowej silnie rośnie dla małych wartości unormowanej funkcji korelacji wzajemnej $\rho_{xy}(\tau)$.

Względna niepewność standardowa odpowiedzi impulsowej w małym stopniu zależy od poziomu zakłóceń addytywnych na wyjściu badanego systemu.

Wartość progu x_0 dla sygnału wejściowego $x(t)$ inicjującego warunkowe uśrednianie sygnału wyjściowego $z(t)$ będzie miała wpływ na wariancję estymatora odpowiedzi impulsowej $\hat{k}(\tau)$.

Dla konkretnych przewidywalnych modeli identyfikowanych systemów liniowych można wybrać sposób uśredniania warunkowego oraz parametry eksperymentu umożliwiające zmniejszenie niepewności standardowej wyznaczanych estymat odpowiedzi impulsowej.

5. Literatura

[1] Bendat J. S. Piersol A. G.: Random data-analysis and measurement procedures. John Wiley, New York 2000
[2] Eykhoff P.: Trends and progress in system identification. Pergamon Press, New York 1981.
[3] Krauss M., Woschni E.: Systemy informacyjno Pomiarowe, PWN, Warszawa 1979.
[4] Mirskij G. J.: Charakteristiki stochasticzeskoj wzaimosswiazi i ich izmiernija, Energoizdat, Moskwa 1982
[5] Oliver B. M., Gage J. M.: Pomiary i przyrządy elektroniczne. WKiŁ, Warszawa 1978.
[6] Papoulis A.: Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. WNT, Warszawa 1972.

Artykuł recenzowany

INFORMACJE

Studia Podyplomowe

Wydział Elektryczny Politechniki Śląskiej w Gliwicach, Instytut Metrologii, Elektroniki i Automatyki
ogłasza nabór na Dwusemestralne Zaoczne Studia Podyplomowe

Systemy Pomiarowe i Sterowniki Programowalne (SPSP)

Cel Studiów

Celem studiów jest przekazanie wiedzy teoretycznej i umiejętności praktycznych w zakresie: projektowania, wdrażania i utrzymania ruchu systemów automatyki, programowania sterowników PLC oraz systemów nadrzędnych (SCADA), projektowania, programowania i eksploatacji automatycznych systemów pomiarowych w laboratoriach badawczych i przemysłowych, metod opracowania danych w systemach zapewnienia jakości procesów przemysłowych.

Profil uczestnika studiów

Studia przeznaczone są dla pracowników o różnych specjalnościach, z wyższym wykształceniem o kierunku elektrycznym, elektronicznym, informatycznym lub pokrewnym, zajmujących się organizacją pomiarów w laboratoriach badawczych i przemysłowych lub eksploatacją oraz modernizacją systemów starowania. Ich ukończenie pozwoli uczestnikom na podwyższenie kwalifikacji niezbędnych do sprawnego opracowywania i wdrażania nowoczesnych systemów. Absolwent Studiów otrzymuje Świadectwo Ukończenia Studiów Podyplomowych w zakresie objętym nazwą studiów.

Studia prowadzone są na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach, w systemie zaocznym w każdą sobotę lub w co drugi weekend (do wyboru) przez dwa semestry. Zajęcia prowadzone są przez nauczycieli akademickich ze stopniem co najmniej doktora oraz przez zaproszonych Gości o uznanym dorobku i autorytecie. Studia obejmują 200 godzin dydaktycznych. Rozpoczęcie Studiów nastąpi po skompletowaniu odpowiedniej liczby kandydatów na dany rodzaj studiów.

Organizator studiów:

Instytut Metrologii, Elektroniki i Automatyki Politechniki Śląskiej, 44-100 Gliwice, ul. Akademicka 10, tel. 032 237 12 41, fax: 032 237 20 34, e-mail: re2@polsl.pl lub agnieszka.skorkowska@polsl.pl, http://imeia.elektr.polsl.pl

Kierownik studiów:

Prof. dr hab. inż. Tadeusz SKUBIS