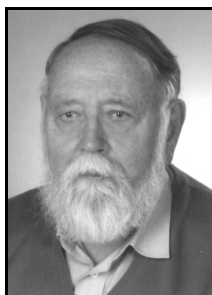


Adam ŻUCHOWSKI
POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA

Błąd dynamiczny w warunkach rejestracji punktowej

Prof. dr hab. inż. Adam ŻUCHOWSKI

Profesor zwyczajny zatrudniony w Instytucie Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej. Ze szkolnictwem wyższym związany zawodowo od 1955 roku (Politechnika Wrocławska, Politechnika Szczecińska). Jest współtwórcą polskiej szkoły miernictwa dynamicznego, posiada w dorobku ponad 300 publikacji. W kwietniu 2008 roku upłynęły 53 lata jego działalności naukowej.



e-mail: chlod@ps.pl

Streszczenie

Wprawdzie rejestratory analogowe o zapisie punktowym wychodzą z użycia, ale problem błędu dynamicznego przy tego rodzaju operacji przekształcania sygnału pomiarowego wydaje się nie do końca wyjaśniony. Artykuł uzupełnia wyniki przytoczone w literaturze.

Słowa kluczowe: rejestracja punktowa, dyskretny opis dynamiki, błąd dynamiczny.

The dynamic error of analog dot recorders

Abstract

The „good days” of analog dot recorders are over. Nevertheless there are still problems with exact evaluation of dynamical errors referring to this kind of transformation of measurement signals. The paper supplements the results published till now.

Keywords: analog dot recording, the discrete-time representation of dynamics, dynamic error.

1. Wstęp

Rejestratory o zapisie punktowym buduje się wykorzystując stosunkowo czułe mechanizmy pomiarowe elektromechaniczne pracujące bez kontaktu pisaka z dokumentem, a więc bez tarcia powodującego błędy. Okresowo, co pewien czas T_i ustalony arbitralnie następuje dociśnięcie piórka do dokumentu połączone z jednoczesnym unieruchomieniem mechanizmu i zapis odchylenia jego organu ruchomego w postaci punktu na dokumencie. Po tej operacji następuje faza ruchu swobodnego, bez tarcia, przez czas T_i i taki proces powtarzany jest cyklicznie. Jeśli dynamikę mechanizmu pomiarowego opisuje transmitancja $K(s)$, o charakterystyce impulsowej $k(t)$, to w fazie ruchu swobodnego mechanizm pomiarowy reaguje na sygnał wejściowy $x(t)$ startując z niezerowego (w ogólnym przypadku) warunku początkowego odpowiadającego ostatniemu zarejestrowanemu odchyleniu $y(n \cdot T_i)$. Proces ten opisywano już wielokrotnie [1, 2, 3, 4], nie wymaga więc bardziej szczegółowych wyjaśnień.

2. Dynamika toru pomiarowego i model sygnału wejściowego $x(t)$

Oznaczając sygnał wejściowy symbolem $x(t)$, a ostatnią zarejestrowaną wartość sygnału wyjściowego symbolem $y(n \cdot T_i)$, licząc czas t od chwili nT_i otrzymuje się związek:

$$y(n \cdot T_i + t) = y(n \cdot T_i) + \int_0^t [x(nT_i + v) - y(n \cdot T_i)] k(t - v) \cdot dv \quad (1)$$

obowiązujący od chwili $t = 0$ do chwili $t = T_i$ (kolejny zapis) i tym samym, przy uproszczonej notacji $y(n \cdot T_i) \cong y(n)$ otrzymuje się:

$$y(n + 1) = y(n) \cdot [1 - h(T_i)] + \int_0^{T_i} x(n \cdot T_i + v) \cdot k(t - v) \cdot dv \quad (2)$$

skąd wynika warunek stabilności układu w postaci [6]:

$$0 < h(T_i) < 2 \quad (3)$$

gdzie $h(t)$ jest skokową charakterystyką odpowiadającą transmitancji $K(s)$. Wykorzystanie zależności (2) dla określenia błędu dynamicznego wnoszonego przez tor pomiarowy wymaga przyjęcia wygodnego modelu zależności $x(n \cdot T_i + t)$.

Założmy, że jest to sygnał ciągły, o nieciągłych pochodnych i że w dowolnym przedziale czasowym od $n \cdot T_i$ do $(n + 1) \cdot T_i$ daje się przedstawić w postaci zależności:

$$x(n \cdot T_i + t) = x(n \cdot T_i) + \frac{[x(n \cdot T_i + T_i) - x(n \cdot T_i)]}{T_i} \cdot t + \sum_{j=1}^m A(n \cdot T_i, j) \cdot \sin \frac{\pi \cdot j \cdot t}{T_i} \quad (4)$$

Wykorzystując (2) i przyjmując, że w kolejnym $n + 1$ kroku przekształcenia spełniony jest warunek początkowy $y(0) = y(n, T_i)$, $y^{(i)}(0) = 0$ dla $i = 1, 2, \dots, p$ gdzie p jest rzędem równania różniczkowego określającego transmitancję $K(s)$, po prostych przekształceniach otrzymuje się [4, 5, 6]:

$$y(n \cdot T_i + T_i) = y(n \cdot T_i) \cdot [1 - h(T_i)] + x(n \cdot T_i) \cdot [h(T_i) - H(T_i)] + x(n \cdot T_i + T_i) \cdot H(T_i) + \sum_{j=1}^m A(n \cdot T_i, j) \cdot S(j, T_i) \quad (5)$$

lub przy uproszczonej notacji:

$$y(n + 1) = y(n) \cdot [1 - h(T_i)] + x(n) \cdot [h(T_i) - H(T_i)] + x(n + 1) \cdot H(T_i) + \sum_{j=1}^m A(n, j) \cdot S(j, T_i) \quad (6)$$

gdzie oznaczono:

$$H(T_i) = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} h(t) \cdot dt \quad (7)$$

$$S(j, T_i) = \int_0^{T_i} \sin \frac{\pi \cdot j \cdot v}{T_i} \cdot k(t - v) \cdot dv$$

3. Błąd dynamiczny

Założymy, że „mesurandem” (tym, co należy mierzyć) jest wartość chwilowa $x(t)$, a więc odpowiednio wartość $x(n \cdot T_i) \hat{=} x(n)$. Tym samym błąd dynamiczny $D(n \cdot T_i)$ można określić jako różnicę:

$$D(n \cdot T_i) = y(n \cdot T_i) - x(n \cdot T_i) \quad (8)$$

lub odpowiednio:

$$D(n) = y(n) - x(n)$$

Operacja, której na sygnale wejściowym dokonuje tor pomiarowy określona wzorem (5) zależy od wartości $h(T_i), H(T_i)$, a dla sygnałów nie gładkich, gdy $x^{(j)}(t) \neq 0$ dla $j \geq 2$ także od wartości współczynników wrażliwości $S(j, T_i)$.

Wykorzystując wzory (5) i (8) po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$D(n \cdot T_i + T_i) = D(n \cdot T_i) \cdot [I - h(T_i)] + [x(n \cdot T_i + T_i) - x(n \cdot T_i)] \cdot [H(T_i) - I] + \sum_{j=1}^m A(n \cdot T_i, j) \cdot S(j, T_i) \quad (9)$$

Można teraz rozważać szczególne postacie tej zależności. Przyjmuje się zwykle, że czas T_i powinien być nie krótszy od czasu uspokojenia T_u , to jest od czasu, po którym praktycznie ustala się odpowiedź organu ruchomego rejestratora na skok jednostkowy sygnału wejściowego [7], Oznacza to spełnienie warunku:

$$h(T_i) = 1 \quad (10)$$

ale warunek ten w przypadku oscylacyjnej dynamiki organu ruchomego rejestratora o transmitancji

$$K(s) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2 \cdot B \cdot \omega_0 \cdot s + s^2} \quad (11)$$

gdzie B jest stopniem tłumienia, a ω_0 - pulsacją drgań swobodnych może być przy $B < 1$ spełniony po czasie T_i krótszym, niż czas uspokojenia, a przy małym B istnieje nawet zwykle kilka wartości T_i spełniających warunek (10), przy tym najmniejszą wartość iloczynu $T_i \cdot \omega_0$ określa wzór:

$$\omega_0 \cdot T_i = \frac{\pi + 2 \cdot \arcsin B}{2\sqrt{1 - B^2}} \quad (12)$$

wtedy:

$$D(n \cdot T_i + T_i) = [x(n \cdot T_i + T_i) - x(n \cdot T_i)] \cdot [H(T_i) - I] + \sum_{j=1}^m A(n \cdot T_i, j) \cdot S(j, T_i) \quad (13)$$

W warunkach gładkiego sygnału wejściowego:

$$x(n \cdot T_i + T_i) = x(n \cdot T_i) + T_i \cdot \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=n \cdot T_i} \quad (14)$$

i błąd dynamiczny jest proporcjonalny do pochodnej sygnału wejściowego, co oznacza, że tor pomiarowy wnosi opóźnienie

$$T_0 = T_i \cdot [I - H(T_i)] \quad (15)$$

Jeśli spełniony zostanie dodatkowo warunek $H(T_i) = 1$ co w przypadku transmitancji (10) oznacza spełnienie równań [7]:

$$\omega_0 \cdot T_i = \frac{2 \cdot r \cdot \pi - \arccos B}{\sqrt{1 - B^2}} \quad (16)$$

$$r = \frac{1}{2 \cdot \pi} \left(\arccos B - \sqrt{\frac{1 - B^2}{B} \cdot \ln 2B} \right)$$

gdzie r jest liczbą całkowitą, dodatnią, to wzór (13) przyjmuje postać:

$$D(n \cdot T_i + T_i) = \sum_{j=1}^m A(n \cdot T_i, j) \cdot S(j, T_i) \quad (17)$$

Tor pomiarowy wnosi zerowe opóźnienie i przyczyną błędów dynamicznych jest wyłącznie niegładkość sygnału wejściowego.

Jeśli założyć, że $H(T_i) = 1$ przy $h(T_i) \neq 1$ to:

$$D(n \cdot T_i + T_i) = D(n \cdot T_i) \cdot [I - h(T_i)] + \sum_{j=1}^m A(n \cdot T_i, j) \cdot S(j, T_i) \quad (18)$$

co oznacza pewne przeniesienie błędów z kroku poprzedniego do kroku następnego i tym samym przy zapisie kilku wielkości na wspólnym dokumencie z przełączeniem kanałów pomiarowych wpływ błędów z kanału poprzedniego na błędy w kanale następnym. Jest to cecha niekorzystna i warunków $H(T_i) = 1, h(T_i) \neq 1$ zachodzących tylko dla małych B nie warto rozpatrywać.

4. Optymalizacja parametrów rejestratora

Wydaje się, że do minimalizowanych wielkości kryterialnych służących do oceny jakości rejestratora należy zaliczyć:

- Długość odstępu czasowego między kolejnymi, zapisywanymi punktami T_i ,
 - Wielkość wnoszonego opóźnienia T_0 - wzór (15),
 - Wielkość modułów wrażliwości $|S(j, T_i)|$,
 - Wielkość $\sup_{0 \leq t \leq T_i} |S(j, t)|$ ważna z punktu widzenia mechanicznej przeciążalności organu ruchomego (chwilowe przekraczanie zakresu pomiarowego)
 - Wrażliwość wartości $h(T_i)$ na odchylenia wartości T_i oraz stopnia tłumienia B od wartości arbitralnie przyjętych.
- Wartości tych wielkości kryterialnych w przypadku dynamiki rejestratora o transmitancji (10) zestawiono w tabeli 1.

Wymagają one następującego komentarza: Wrażliwości $\Delta h(T_i) / \Delta T_i$ oraz $\Delta h(T_i) / \Delta B$ wyznaczono dla dziesięcioprocentowych odchylen wartości T_i oraz B od wartości przyjmowanych arbitralnie i podanych u góry Tabeli. Dwie kolumny Tabeli dla $B = 0.192$, oraz dla $B = 0.65$ mają znaczenie szczególnie. W pierwszej z nich wartości B oraz $\omega_0 T_i$ zostały dobrane w taki sposób, by spełnić jednocześnie warunki $h(T_i) = 1, H(T_i) = 1$, w drugiej przyjęto wartość $B = 0.65$ jako „klasyczną” uważaną za optymalną w warunkach rejestracji ciągłej, oraz wartość $\omega_0 \cdot T_i$ odpowiadającą warunkowi $\omega_0 \cdot T_i = T_u$ również traktowanemu jako „klasyczny”.

Tab. 1. Wielkości kryterialne dla oceny dynamiki rejestratora
 Tab. 1. The collection of numerical quantities for evaluation of recorder dynamics

Stopień tłumienia B	0.10	0.19	0.30	0.40	0.50	0.60	0.65	0.70	0.80
Wielkości kryterialne									
$\omega_0 \cdot T_i$	1.68	5.00	1.97	2.16	2.42	2.77	7.13	3.29	4.16
$\omega_0 \cdot T_0$	1.05	0.00	1.15	1.22	1.30	1.39	1.29	1.50	1.64
$ S(l, T_i) $	0.68	0.92	0.70	0.70	0.72	0.73	0.59	0.74	0.73
$\sup S_j $	0.68	1.38	0.70	0.71	0.72	0.73	0.99	0.75	0.78
$ S(2, T_i) $	0.24	1.33	0.16		0.05	0.04	0.84	0.15	0.31
$\sup S_2 $	0.32	1.33	0.34	0.35	0.37	0.40	0.84	0.44	0.51
$ S(3, T_i) $	0.16	0.15	0.13	0.11	0.09	0.08	0.48	0.09	0.13
$\sup S_3 $	0.16	0.73	0.18	0.20	0.22	0.24	0.63	0.28	0.35
$ S(4, T_i) $	0.12	0.21	0.09	0.07	0.05	0.03	0.24	0.00	0.05
$\sup S_4 $	0.14	0.52	0.13	0.13	0.14	0.16	0.50	0.20	0.25
$ S(5, T_i) $	1.10	0.12	0.07	0.06	0.05	0.04	0.12	0.03	0.04
$\sup S_5 $	0.10	0.38	0.10	0.10	0.10	0.12	0.40	0.14	0.19
$\frac{\Delta h(T_i)}{\Delta T_i}$	0.14	0.18	0.11	0.09	0.07	0.05	0.00	0.03	0.01
$\frac{\Delta h(T_i)}{\Delta B}$	0.01	0.01	0.03	0.04	0.04	0.05	0.01	0.05	0.03

Z punktu widzenia dużej przepustowości informacyjnej korzystne są jak najmniejsze wartości iloczynu $\omega_0 \cdot T_i$, a więc niewielkie wartości stopnia tłumienia B . Odpowiadają im również niewielkie wartości wnoszonego opóźnienia $\omega_0 \cdot T_0$, ale stosunkowo znaczne wartości wrażliwości $S(2, T_i)$, $S(3, T_i)$ i $S(4, T_i)$. Wartość wrażliwości $S(l, T_i)$ zmienia się nieznacznie wraz ze zmianami B , ale dla krótkich czasów T_i (małe B) w przypadku stosunkowo gładkich sygnałów $x(t)$ amplitudy składowych $A(nT_i, l)$ są tym mniejsze im mniejsze jest T_i (reguła ta nie dotyczy innych składowych $A(nT_i, j)$). Wartości $\sup_{0 \leq t \leq T_i} |S(j, t)|$ są również niewielkie i dlatego wolno uznać, że w przypadku rejestracji

sygnałów $x(t)$ stosunkowo gładkich korzystne jest stosowanie niskiego stopnia tłumienia – na przykład rzędu $B = 0.3$. Warto natomiast zauważyć, że wrażliwości $S(T_i, 2)$, $S(T_i, 3)$ i $S(T_i, 4)$ przyjmują niewielkie wartości w zakresie zmian stopnia tłumienia $0.4 < B < 0.7$ to też w przypadku rejestracji sygnałów $x(t)$ niegładkich korzystniejsze wydają się wartości B zbliżone do 0.6 , ale przy wyborze czasu T_i zgodnych z wzorem (12), a nie według recepty $T_i = T_u$, gdyż taki sposób postępowania – jak wynika z dziewiątej kolumny Tabeli 1 nie przynosi żadnych istotnych korzyści. Podobnie spełnienie warunku $h(T_i) = 1, H(T_i) = 1$ (kolumna trzecia tabeli 1) stanowi jedynie ciekawy przypadek likwidacji opóźnienia T_0 , nie przynosząc innych, istotnych korzyści, a duże wartości $\sup_{0 \leq t \leq T_i} |S(j, t)|$ mogą powodować mechaniczne przeciążenia organu ruchomego rejestratora.

5. Podsumowanie

Analiza chwilowych wartości błędu dynamicznego rejestratora punktowego o oscylacyjnej dynamice organu ruchomego przy uwzględnieniu modelu zmian sygnału wejściowego (4) o dość specyficznej, ale uniwersalnej postaci prowadzi do wniosków odbiegających od utartych poglądów. Warto jeszcze podkreślić, że wrażliwości $S(T_i, j)$ przy $j > 5$ szybko maleją ze wzrostem j niezależnie od wielkości stopnia tłumienia B i tym samym rejestrator nie przenosi sygnałów o pulsacji powyżej pewnej granicy. Ten fakt jest oczywiście doskonale znany.

6. Literatura

- [1] Kabes K. – Elektromechaniczne przyrządy rejestrujące. WNT Warszawa 1967.
- [2] Metal A., Żuchowski A. – Mierniki elektryczne – obliczenie i konstrukcja. PWN Warszawa – Poznań 1969.
- [3] Palm A. Registrierinstrumente. Berlin – Göttingen – Heidelberg 1950.
- [4] Rudak Z. Właściwości dynamiczne rejestracji punktowej. Rozprawa doktorska, Politechnika Szczecińska, Wydział Elektryczny, Szczecin 1975.
- [5] Rudak Z. – Ogólne właściwości rejestracji punktowej. PAK 1/1977.
- [6] Żuchowski A. – O dynamicznych właściwościach rejestracji punktowej. PAK 11/1972.
- [7] Żuchowski A. – Pomiar dynamiczny. Wyd. Politechniki Szczecińskiej, Szczecin, 1984.

Artykuł recenzowany

INFORMACJE

**Zapraszamy do publikacji artykułów promocyjnych
w miesięczniku naukowo-technicznym PAK**

Redakcja czasopisma POMIARY AUTOMATYKA KONTROLA
 44-100 Gliwice, ul. Akademicka 10, pok. 30b,
 tel./fax: 032 237 19 45, e-mail: wydawnictwo@pak.info.pl