

## Zbigniew TYMAN<sup>1</sup>, Janusz GUZIK<sup>2</sup>

<sup>1</sup>CENTRUM BADAŃ I DOZORU GÓRNICWA PODZIEMNEGO, SP. Z O.O.

<sup>2</sup>POLITECHNIKA ŚLĄSKA, INSTYTUT METROLOGII, ELEKTRONIKI I AUTOMATYKI

# Model matematyczny wzorca dużych rezystancji wykonanego w technice SC

Mgr inż. Zbigniew TYMAN

Jest absolwentem Wydziału Elektrycznego Politechniki Śląskiej (2007r.), specjalizującym się w zagadnieniach związanych z metrologią i wzorcowaniem. Obecnie pracuje na stanowisku inżyniera pomiarowego w Akredytowanym Laboratorium Wzorującym (AP 096) Ośrodka Pomiarów i Automatyki w Centrum Badań i Dozoru Górnictwa Podziemnego Sp. z o.o. w Łędzinach.



e-mail: 11zbigniew@wp.pl

Dr inż. Janusz GUZIK

Adiunkt w Instytucie Metrologii, Elektroniki i Automatyki Politechniki Śląskiej w Gliwicach. Autor bądź współautor ok. 40 publikacji z zakresu metrologii elektrycznej. Głównie zainteresowania naukowe: pomiary impedancji i jej składowych, układy pomiarowe przeznaczone do diagnostyki izolacji elektrycznej i zagadnienia ich wzorcowania.



e-mail: janusz.guzik@polsl.pl

### Streszczenie

W pracy zaprezentowano model matematyczny 6-cio elementowego wzorca dużych rezystancji (zrealizowanego w technice przełączalności pojemności SC) przeznaczonego do sprawdzania wskazań wybranych mierników do pomiarów dużych rezystancji, np. megaomierzy. Zaletą prezentowanej idei budowy wzorca dużych rezystancji jest możliwość zmiany nastawy odtwarzanej wartości rezystancji za pomocą parametrów (częstotliwości, współczynnika wypełnienia) sygnału sterującego procesem przełączania kondensatora.

**Słowa kluczowe:** wzorec, duża rezystancja, technika SC, modulacja szerokości impulsu, modelowanie matematyczne, rachunek operatorowy.

## Mathematical model of high resistance standard performed in switched capacitor technology

### Abstract

The paper presents the mathematical model of 6 – element high resistance standard (performed in Switched Capacitor technology) used for indications checking of chosen meters intended for high resistance measurements, eg. megaohmmeters. The advantage of presented high resistance standard construction idea is the possibility of realized resistance value changes by means of signal parameters (frequency, pulse width coefficient) controlling the switching process of a capacitor.

**Keywords:** standard, high resistance, switched capacitors technology, pulse-width modulation, mathematical model, Laplace transform.

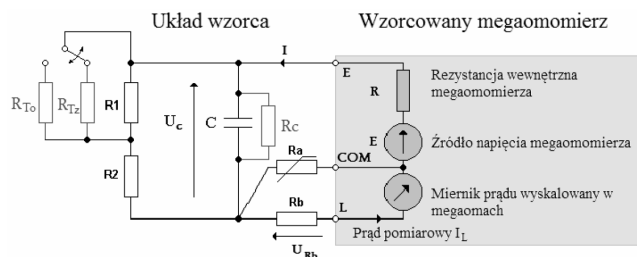
## 1. Wstęp

Właściwości metrologiczne przyrządów pomiarowych ulegają między innymi zmianom starzeniowym i innym, skąd wynika określona potrzeba weryfikacji poprawności ich wskazań. W szczególności, sprawdzanie poprawności wskazań przyrządów pomiarowych służących do pomiaru dużych rezystancji, na najwyższych zakresach (np.  $10^9$ - $10^{16}$   $\Omega$  [2]) może okazać się niewykonalne, z uwagi na brak odpowiednich wzorców.

W praktyce [2], wykorzystuje się tu do imitowania dużych rezystancji układy złożone z trzech rezystorów wykorzystujących do działania przekształcenie „gwiazda-trójkąt” [1], dlatego też zagadnienie opracowania koncepcji budowy wzorca dużych rezystancji w oparciu o inną zasadę jest jak najbardziej aktualne.

Celem pracy jest między innymi odpowiedź na pytanie, czy istnieje możliwość budowy wzorca dużych rezystancji (wykonanego w technice przełączalności pojemności SC (ang. Switched Capacitors [3, 4]) o wartościach nastawianych za pomocą zmiany parametrów (częstotliwości lub współczynnika wypełnienia) sygnału prostokątnego, sterującego procesem przełączania kondensatora C.

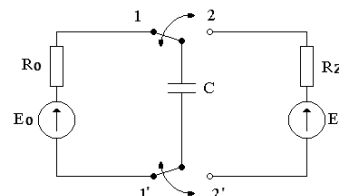
Rozważany schemat połączeń zaproponowanego modelu wzorca dużych rezystancji przedstawiono na rys. 1 [5].



Rys. 1. Schemat połączeń wzorca dużych rezystancji z wzorcowanym megaomierzem

Fig. 1. Circuit diagram of high resistance standard with calibrated megaohmmeter

Do obliczeń zastąpiono schemat z rys. 1 parą dwójników Thevenina [1] „widzianych” z zacisków kondensatora, przy czym jeden obwód jest obwodem ładowania a drugi rozładowania kondensatora C (rys. 2) [5]. Przebieg czasowy napięcia  $U_C(t)$  na kondensatorze C przedstawiono na rys. 3.



Rys. 2. Schemat zastępczy obwodu ładowania/rozładowania kondensatora C przyjęty do obliczeń; 1-1' – faza ładowania, 2-2' – faza rozładowania,  $(E_0, R_0)$  i  $(E_z, R_z)$  – parametry zastępczych dwójników reprezentujących obwody ładowania i rozładowania

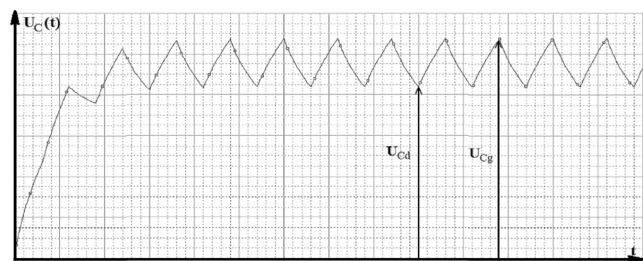
Fig. 2. Circuit diagram of capacitor's charge/discharge circuit used for calculations; 1-1' – charge cycle, 2-2' – discharge cycle,  $(E_0, R_0)$  and  $(E_z, R_z)$  – parameters of equivalent two-terminals represented of charge and discharge circuits

$$R_0 = (R_C \parallel (R + R_a \parallel R_b)) \parallel (R_2 + R_1 \parallel R_{T_z})$$

$$E_0 = E \frac{R_C \parallel (R_2 + R_1 \parallel R_{T_0})}{R + R_a \parallel R_b + R_C \parallel (R_2 + R_1 \parallel R_{T_0})}$$

$$R_z = (R_C \parallel (R + R_a \parallel R_b)) \parallel (R_2 + R_1 \parallel R_{T_z})$$

$$E_z = E \frac{R_C \parallel (R_2 + R_1 \parallel R_{T_z})}{R + R_a \parallel R_b + R_C \parallel (R_2 + R_1 \parallel R_{T_z})}$$



Rys. 3. Przebieg czasowy napięcia  $U_C(t)$ ;  $U_{Cd}$ ,  $U_{Cg}$  – odpowiednio – dolna i górna wartość napięcia  $U_C(t)$  w stanie ustalonym

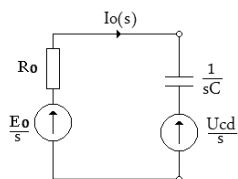
Fig. 3. Time-voltage characteristics of capacitor's voltage  $U_C(t)$ ;  $U_{Cd}$ ,  $U_{Cg}$  – low and high capacitor's voltage  $U_C(t)$  in steady state

W opisie rys. 2 symbolami  $R_{T_0}$  i  $R_{T_Z}$  oznaczono rezystancje w stanie rozwarcia / zwarcia klucza, bocznikującą rezystancję  $R_1$ , natomiast symbol „||” - oznacza równoległe połączenie odpowiednich rezystancji.

## 2. Model matematyczny wzorca

### 2.1. Faza ładowania kondensatora

Odpowiedni do rozważań schemat zastępczy analizowanego obwodu dla fazy ładowania (I) przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Schemat zastępczy analizowanego obwodu dla fazy ładowania (I)  
Fig. 4. Equivalent diagram of analyzed circuit for charge cycle (I)

Dla obwodu o schemacie wg rys. 4 można zapisać:

$$I_0(s) = \frac{E_0 - U_{Cd}}{R_0 \left( s + \frac{1}{R_0 C} \right)} \quad (1)$$

Dokonując odwrotnej transformaty Laplace'a [6] dla przebiegu prądu  $I_0(s)$  otrzymuje się przebieg czasowy  $i_0(t)$  prądu ładującego:

$$i_0(t) = \frac{E_0 - U_{Cd}}{R_0} \cdot \exp\left(-\frac{1}{R_0 C} t\right). \quad (2)$$

Prąd jest pochodną ładunku elektrycznego, a zatem:

$$\Delta q_0 = \int_0^{t_a} i_0(t) dt, \quad (3)$$

gdzie czas  $t_a$  jest czasem trwania fazy ładowania (I).

Na podstawie wzoru (3) obliczono przyrost ładunku  $\Delta q_0$  na kondensatorze  $C$  w ciągu czasu  $t_a$  trwania etapu ładowania (I):

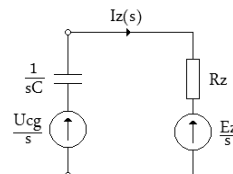
$$\Delta q_0 = C(U_{Cd} - E_0) \cdot \left( \exp\left(-\frac{t_a}{R_0 C}\right) - 1 \right). \quad (4)$$

Dla uproszczenia wzoru (4) dokonano podstawienia  $\alpha = \exp\left(-\frac{t_a}{R_0 C}\right)$ , a wtedy:

$$\Delta q_0 = C(U_{Cd} - E_0) \cdot (\alpha - 1) \quad (5)$$

### 2.2. Faza rozładowania kondensatora

Odpowiedni do rozważań schemat zastępczy analizowanego obwodu dla fazy rozładowania (II) przedstawiono z kolei na rys. 5.



Rys. 5. Schemat zastępczy analizowanego obwodu dla fazy rozładowania (II)  
Fig. 5. Equivalent diagram of analyzed circuit for discharge cycle (II)

Dokonując analogicznych przekształceń jak w fazie (I) i przyjmując, że  $\beta = \exp\left(-\frac{t_b}{R_Z C}\right)$ , gdzie czas  $t_b$  jest czasem trwania fazy rozładowania (II) otrzymuje się:

$$\Delta q_Z = C(E_Z - U_{Cg}) \cdot (\beta - 1) \quad (6)$$

W stanie ustalonym pracy układu zachodzi równość przyrostu ładunku  $\Delta q_0$  w fazie ładowania (I) z ubytkiem ładunku  $\Delta q_Z$  w fazie rozładowania (II), przy czym czasy: ładowania  $t_a$  i rozładowania  $t_b$  nie muszą być sobie równe. Oznacza to relację:

$$\Delta q_0 = \Delta q_Z \quad (7)$$

Przyrost  $\Delta q_0$  (i ubytek  $\Delta q_Z$ ) ładunku elektrycznego jest ponadto równy różnicy ładunku całkowitego kondensatora w stanie pracy ustalonej:

$$\Delta q = \Delta q_0 = \Delta q_Z = CU_{Cg} - CU_{Cd} \quad (8)$$

Z zależności (8) można wyznaczyć wprost wartość napięcia  $U_{Cg}$ :

$$U_{Cg} = \frac{\Delta q}{C} + U_{Cd}. \quad (9)$$

Z kolei po wstawieniu zależności (9) do wzoru (6) otrzymuje się:

$$\Delta q_Z = \frac{C(U_{Cd}(1-\beta) + E_Z(\beta-1))}{\beta}. \quad (10)$$

Ostatecznie, po wykonaniu stosownych podstawień otrzymuje się:

$$U_{Cd} = \frac{E_Z \frac{\beta-1}{\beta} + E_0(\alpha-1)}{\alpha-1 + \frac{\beta-1}{\beta}} \quad (11a)$$

i

$$U_{Cg} = \frac{U_{Cd}(1-\beta) + E_Z(\beta-1)}{\beta} + U_{Cd}. \quad (11b)$$

### 2.3. Obliczenie wartości rezystancji „widzianej” przez wzorcowany megaomomierz

Na podstawie schematu wg rys. 1 można zapisać następujące zależności:

$$I_{d/g} = \frac{E - U_{C_{d/g}}}{R + \frac{R_a R_b}{R_a + R_b}} \quad (12)$$

$$U_{R_{b_{d/g}}} = I_{d/g} \frac{R_a R_b}{R_a + R_b} = \frac{E - U_{C_{d/g}}}{R + \frac{R_a R_b}{R_a + R_b}} \cdot \frac{R_a R_b}{R_a + R_b} \quad (13)$$

$$I_{b_{d/g}} = \frac{U_{R_{b_{d/g}}}}{R_b} = \frac{E - U_{C_{d/g}}}{R + \frac{R_a R_b}{R_a + R_b}} \cdot \frac{R_a + R_b}{R_b (R_a + R_b)} \quad (14)$$

Przy obowiązywaniu powyższych wzorów rezystancja  $R_{EL_{d/g}}$  „widziana” przez wzorcowany przyrząd (megaomomierz) wyraża się zależnością:

$$R_{EL_{d/g}} = \frac{U_{C_{d/g}} + U_{R_{b_{d/g}}}}{I_{b_{d/g}}} \quad (15)$$

Wzór (15) opisuje liczbowo dwa skrajne poziomy ( $d$  – dolny i  $g$  – górny „oscylujące” rezystancji  $R_{EL}$ . Rezystancja ta ulega cyklicznym zmianom powiązanim ze zmianami napięcia na kondensatorze  $U_C(t)$  (por. rys. 3).

### 3. Wybrane wyniki badań symulacyjnych [5]

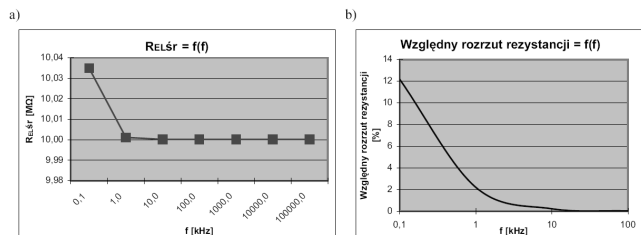
Jednym z celów niniejszej pracy jest sprawdzenie możliwości zmian odtwarzanej przez wzorzec wartości rezystancji za pomocą nastaw wybranych parametrów sygnału prostokątnego sterującego procesem przełączania kondensatora  $C$  (por. rys. 1).

Możliwe jest tutaj wykorzystanie zmian nastaw następujących parametrów sygnału prostokątnego:

- a) wartości częstotliwości sygnału (pkt. 3.1),
- b) wartości współczynnika wypełnienia sygnału (pkt. 3.2).

#### 3.1. Częstotliwościowa kalibracja wzorca

Jest to najprostszy sposób kalibracji. Odpowiednią zależność przedstawiono na rys. 6:



Rys. 6. Częstotliwościowa kalibracja wzorca: a) Rezystancja średnia, b) Względny rozrzut rezystancji.  
Fig. 6. Frequency standard calibration: a) Average resistance, b) Relative dispersion of resistance

Analizę zmian wartości odtwarzanych rezystancji wzorca przeprowadzono dla szerokiego zakresu zmian częstotliwości w zakresie od 0,1 do 100 000 kHz. Charakterystyka przedstawiona na

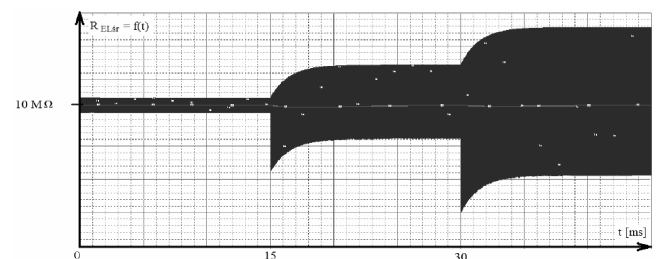
rys. 6a uwidacznia fakt, iż sterowanie zmianami rezystancji wzorca możliwe jest wyłącznie w wąskim zakresie dolnych częstotliwości (tu: poniżej 1 kHz), przy czym zmiany częstotliwości powodują zmiany wartości rezystancji na poziomie dziesiątych części procenta wartości realizowanej przez wzorzec.

Wykres przedstawiony na rys. 6b ukazuje rozrzut względny odniesiony do wartości średniej rezystancji realizowanej przez wzorzec. Widoczny jest spadek rozrzutu przy wzroście częstotliwości – czyli w obszarze gdzie traci się możliwość częstotliwościowego sterowania wartością średnią rezystancji wzorca. Możliwym sposobem zmniejszenia rozrzutu jest zastosowanie większej pojemności kondensatora  $C$ .

Analiza charakterystyki z rys. 6 ukazuje trudność praktycznego wykorzystania kalibracji częstotliwościowej dla szerokiego zakresu zmian wartości rezystancji wzorca.

Na rys. 7 zaprezentowano symulację kalibracji częstotliwościowej analizowanego wzorca rezystancji. W przedziale czasu od 0 do 15 ms układ taktowano sygnałem o częstotliwości 500 kHz, przez kolejne 15 ms sygnałem o częstotliwości 100 kHz i przez kolejne 15 ms sygnałem o częstotliwości 50 kHz.

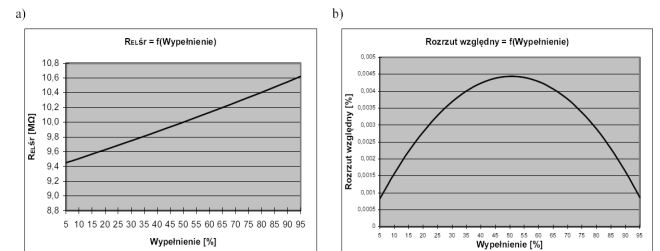
Wartość średnia odtwarzanej rezystancji utrzymuje się wtedy na porównywalnym poziomie, pomimo zmian częstotliwości taktowania klucza. Z kolei obwiednia obrazująca rozrzut odtwarzanej rezystancji wzorca wzrasta w miarę spadku częstotliwości sterowania klucza.



Rys. 7. Przebieg czasowy zmian nastawy rezystancji wzorca dla kalibracji częstotliwościowej  
Fig. 7. Time-resistance characteristics of resistance standard by means of frequency calibration

#### 3.2. Kalibracja za pomocą zmiany współczynnika wypełnienia impulsu

Bardzo obiecujące rezultaty uzyskano analizując kalibrację wzorca rezystancji za pomocą sygnału o stałej częstotliwości (100 kHz), lecz o zmiennym wypełnieniu (por. rys. 8).



Rys. 8. Kalibracja wzorca rezystancji poprzez zmianę współczynnika wypełnienia impulsu sterującego: a) Rezystancja średnia, b) Rozrzut rezystancji  
Fig. 8. Resistance standard calibration by means of by control pulse width modulation: a) Average resistance, b) Dispersion of resistance

Charakterystyka kalibracji jest w tym przypadku zbliżona do charakterystyki liniowej co jest niewątpliwą zaletą (por. rys. 8a), ponadto możliwa jest kalibracja w szerokim zakresie zmian wartości odtwarzanej przez wzorzec rezystancji (nawet rzędu 10% i więcej).

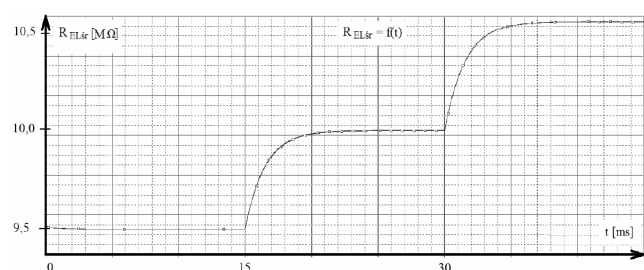
Przy założonej do analizy rezystancji wzorca rzędu 1 G $\Omega$  uzyskuje się znikomy rozrzut rzędu kilkudziesięciu  $\Omega$ , który można jeszcze bardziej zmniejszyć stosując większą wartość pojemności kondensatora C.

Różnicę pomiędzy górną i dolną wartością uzyskiwanej rezystancji można z powodzeniem zmniejszyć do poziomu setnych części procenta odtwarzanego poziomu.

Można zauważyć, iż największy rozrzut wartości odtwarzanej rezystancji ma miejsce dla współczynnika wypełnienia równego 50% (rys. 8b).

Z tego też powodu kondensator C wzorca należy kluczować sygnałem o wypełnieniu poniżej 10 % lub powyżej 90%.

Z kolei na rys. 9 zaprezentowano charakterystykę symulację kalibracji wzorca rezystancji za pomocą zmiany współczynnika wypełnienia sygnału prostokątnego sterującego kluczowaniem kondensatora C.



Rys. 9. Przebieg czasowy zmian nastawy rezystancji wzorca dla kalibracji za pomocą zmiany współczynnika wypełnienia impulsu

Fig. 9. Time-resistance characteristics of standard's resistance by means of pulse width modulation

W przedziale czasu od 0 do 15 ms układ taktowano sygnałem o wypełnieniu 90%, przez kolejne 15 ms sygnałem o wypełnieniu 50% i przez kolejne 15 ms sygnałem o wypełnieniu 10%. Częstotliwość jest stała i wynosi 100 kHz.

Można zauważyć wyraźne różnice wartości odtwarzanych przez wzorec rezystancji wzorca dla różnych poziomów wypełnienia (możliwość sterowania), przy czym charakterystyczne jest, że rozrzut rezystancji osiąga wartość stałą i to na małym poziomie.

#### 4. Podsumowanie

Celem niniejszej pracy o charakterze teoretyczno-koncepcyjnym było zaproponowanie rozwiązania układu wzorca, umożliwiającego imitację dużej wartości rezystancji za pomocą nastaw wybranych parametrów sygnału prostokątnego sterującego procesem kluczowania kondensatora C (por. rys. 1).

Cel ten został zrealizowany, a w wyniku przeprowadzonej analizy opracowano model wzorca dużych rezystancji, mogący imitować rezystancję w bardzo szerokim zakresie o znacznych wartościach (np. rzędu 10<sup>9</sup>  $\Omega$ ) i przy dużej rozdzielczości.

Do zalet omawianego wzorca dużych rezystancji realizowanego w technice SC należy jego prostota układowa i możliwość osiągnięcia znacznej rozdzielczości nastawy przy sterowaniu za pomocą zmiany wartości współczynnika wypełnienia impulsu sterującego.

#### 5. Literatura

- [1] Cichowska Z.: Wykłady z elektrotechniki teoretycznej, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1995
- [2] Kłos Z.: Problematyka wzorcowania aparatury elektrometrycznej, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2004.
- [3] Korzec Z., Ciota Z., Układy z pojemnościami przełączanymi, WNT, Warszawa 1987.
- [4] Mulawka J.: Układy mikroelektroniczne z przełączanymi pojemnościami, WKiŁ, Warszawa 1987.
- [5] Tyman Z.: Model wzorca dużych rezystancji, praca dyplomowa magisterska, IMEiA, Politechnika Śląska, Gliwice 2007.
- [6] Walczak J., Pasko M.: Elementy dynamiki liniowych obwodów elektrycznych, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2001.

Artykuł recenzowany

## INFORMACJE

## WYDAWNICTWO

# Pomiary Automatyka Kontrola

specjalizuje się w wydawaniu czasopisma i książek popularno-naukowych w dziedzinie automatyki i pomiarów

Osoby i firmy przemysłowe zainteresowane współpracą z Wydawnictwem proszone są o kontakt bezpośredni dla uściślenia szczegółów współpracy

Wydawnictwo PAK  
00-050 Warszawa  
ul. Świętokrzyska 14A  
tel./fax 022 827 25 40

Redakcja PAK  
44-100 Gliwice  
ul. Akademicka 10, p. 30b  
tel./fax 032 237 19 45  
e-mail: wydawnictwo@pak.info.pl