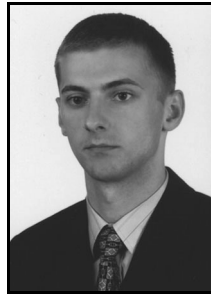


Krzysztof ROGOWSKI, Tadeusz KACZOREK
POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA, WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY

Symulacja singularnych liniowych układów ciągłych

Mgr inż. Krzysztof ROGOWSKI

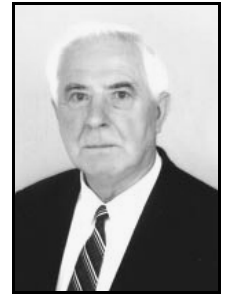
Uzyskał dyplom magistra inżyniera w roku 2007 na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. W październiku 2007 roku rozpoczął studia doktorskie z zakresu elektrotechniki na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. Aktualny obszar jego zainteresowań to układy ułamkowe oraz układy singularne.



e-mail: k.rogowski@doktoranci.pb.edu.pl

Prof. dr hab. inż. Tadeusz KACZOREK

Uzyskał dyplom mgr inż. elektryka w roku 1956 na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej. Na tym samym Wydziale w roku 1962 uzyskał stopień naukowy doktora nauk technicznych, a w roku 1964 – doktora habilitowanego. Tytuł naukowy profesora nadzwyczajnego nadała Mu Rada Państwa w roku 1971, a profesora zwyczajnego w 1974 roku. Główne kierunki badań naukowych to analiza i synteza układów sterowania i systemów, a w szczególności układy wielowymiarowe, układy singularne i układy dodatnie.



e-mail: kaczorek@isep.pw.edu.pl

Streszczenie

Podano nową metodę symulacji singularnych liniowych układów ciągłych opartą na dekompozycji Weierstrassa-Kroneckera na trzy podukłady: standardowy, ściśle singularny i statyczny. Metoda została zilustrowana przykładem numerycznym i przebiegami czasowymi.

Słowa kluczowe: symulacja, singularny, układ liniowy.

Simulation of singular continuous-time linear systems

Abstract

A new method of singular continuous-time linear systems simulation based on Weierstrass-Kronecker decomposition for three: standard, strictly singular and static subsystems is presented. Illustrating numerical example with simulations results are given.

Keywords: simulation, singular, linear system.

1. Wprowadzenie

Metodą podstawową analizy liniowych układów singularnych o pęku regularnym jest metoda oparta na dekompozycji (rozkładzie) Weierstrassa-Kroneckera pęku regularnego [2, 3]. Problem redukcji rzędu modelu układów singularnych był analizowany w pracy [1], a problem przesuwania wartości własnych do nieskończoności w pracach [4, 5]. Obserwatory doskonałe układów ciągłych oraz obserwatory funkcjonalne były badane w pracach [6, 7]. Zagadnienie uogólnionej przestrzeni stanów dla układów singularnych było rozpatrywane w pracy [8].

Znajomość macierzy A, B, C, D układu standardowego pozwala w prosty sposób na symulację układu standardowego przy użyciu dostępnego oprogramowania komputerowego (np. MATLAB/SIMULINK). W przypadku układów singularnych taka symulacja stanowi już większy problem, ponieważ wymaga od oprogramowania rozwiązania singularnego równania macierzowego.

Celem tej pracy jest podanie nowej metody symulacji singularnych układów ciągłych. Jej istotę stanowi rozkład układu singularnego na trzy podukłady: standardowy, ściśle singularny i statyczny. Efektywność metody zostanie zilustrowana przykładem numerycznym oraz wybranymi przebiegami czasowymi.

2. Sformułowanie zadania

Niech \mathfrak{R} będzie ciałem liczb rzeczywistych, $\mathfrak{R}^{n \times m}$ zbiorem macierzy o n wierszach i m kolumnach i elementach z ciała \mathfrak{R} , a $\mathfrak{R}^n := \mathfrak{R}^{n \times 1}$. I_n oznaczać będzie macierz jednostkową stopnia n .

Weźmy pod uwagę układ liniowy ciągły opisany równaniami

$$E\dot{x} = Ax + Bu \quad (1a)$$

$$y = Cx + Du \quad (1b)$$

gdzie $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $x = x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u = u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $y = y(t) \in \mathfrak{R}^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wymuszenia, odpowiedzi oraz $E, A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$, $D \in \mathfrak{R}^{p \times m}$.

Zakładamy, że układ (1) ma pęk regularny, tzn. $\det[Es - A] \neq 0$ dla pewnych $s \in \mathbb{C}$ (ciało liczb zespolonych)

Definicja 1 Układ (1) nazywamy singularnym układem liniowym ciągłym wtedy i tylko wtedy, gdy $\det E = 0$ (rzęd $E = r < n$).

Twierdzenie 1 Jeżeli pęk $Es - A$ jest regularny, to istnieją macierze nieosobliwe $P, Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ takie, że

$$P[Es - A]Q = \text{diag}[I_d s - A_1, E_2 s - I_{n-d}] \quad (2)$$

gdzie $d = \text{st}(\det[Es - A])$ oznacza stopień wielomianu $\det[Es - A]$, $A_1 \in \mathfrak{R}^{d \times d}$ jest macierzą nieosobliwą, natomiast macierz $E_2 \in \mathfrak{R}^{(n-d) \times (n-d)}$ jest macierzą nilpotentną z indeksem nilpotentności μ , tzn. $E_2^{\mu-1} \neq 0$ i $E_2^\mu = 0$.

Dowód powyższego twierdzenia jest podany w [2, 3, 7].

Problem rozpatrywany w tej pracy możemy sformułować w następujący sposób.

Dane są macierze E, A, B, C, D układu singularnego (1). Należy wyznaczyć schemat blokowy pozwalający na symulację działania tego układu.

3. Rozwiązanie zadania

Mnożąc lewostronnie równanie (1a) przez macierz P oraz definiując nowy wektor stanu w postaci

$$\bar{x} = Q^{-1}x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

gdzie: $x_1 \in \mathfrak{R}^d$, $x_2 \in \mathfrak{R}^{n_2}$, $x_3 \in \mathfrak{R}^{n_3}$ ($n_2 = \dim x_2 = \text{rzęd } E + 1 - d$, $n_3 = \dim x_3 = n - \text{rzęd } E - 1$ oraz $\dim x_1 + \dim x_2 + \dim x_3 = n$), otrzymujemy

$$PEQ\dot{\bar{x}} = PAQ\bar{x} + PBu \quad (4a)$$

$$y = CQ\bar{x} + Du \quad (4b)$$

gdzie

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}, \quad PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{bmatrix},$$

$$PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}, \quad CQ = [C_1, C_2, C_3] \quad (5)$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} \bar{E}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{E}_2 = [e_{ij}], \quad e_{ij} = 0 \text{ dla } i \neq j-1,$$

$$B_1 \in \mathfrak{R}^{d \times m}, \quad B_2 \in \mathfrak{R}^{n_2 \times m}, \quad B_3 \in \mathfrak{R}^{n_3 \times m},$$

$$C_1 \in \mathfrak{R}^{p \times d}, \quad C_2 \in \mathfrak{R}^{p \times n_2}, \quad C_3 \in \mathfrak{R}^{p \times n_3}.$$

Z powyższych rozważań wynika, że równania (1) możemy równoważnie napisać w postaci

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \quad (6a)$$

$$y_1 = C_1 x_1 \quad (6b)$$

$$\bar{E}_2 \dot{x}_2 = x_2 + B_2 u \quad (6c)$$

$$y_2 = C_2 x_2 \quad (6d)$$

$$0 = x_3 + B_3 u \quad (6e)$$

$$y_3 = C_3 x_3 \quad (6f)$$

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + Du \quad (6g)$$

Układ singularny (1) został więc zastąpiony trzema niezależnymi podukładami: standardowym (6a-6b), ściśle singularnym (6c-6d) i statycznym (6e-6f).

Przedstawiona poniżej metoda symulacji układów singularnych opiera się na dekompozycji układu singularnego na te trzy podukłady. Symulacja przebiegów wektorów stanu podukładów standardowego i statycznego na podstawie równań (6a) i (6f) nie sprawia problemów. Natomiast w zależności (6c) mamy singularną macierz \bar{E}_2 , a więc nie istnieje macierz odwrotna \bar{E}_2^{-1} . Nie można więc wyznaczyć rozwiązania tego równania mnożąc je lewostronnie przez \bar{E}_2^{-1} .

Podukład ściśle singularny opisany jest równaniem

$$\bar{E}_2 \dot{x}_2 = x_2 + B_2 u \quad (7)$$

przy czym $\bar{E}_2 = [\tilde{e}_{ij}]$, $\tilde{e}_{ij} = 0$ dla $i \neq j-1$, $x_2 \in \mathfrak{R}^{n_2}$, $B_2 \in \mathfrak{R}^{n_2 \times m}$.

Równanie (7) możemy napisać w postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e_{n_2-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{2,1} \\ \dot{x}_{2,2} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2,n_2-1} \\ \dot{x}_{2,n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ \vdots \\ x_{2,n_2-1} \\ x_{2,n_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n_2-1} \\ b_{n_2} \end{bmatrix} u \quad (8)$$

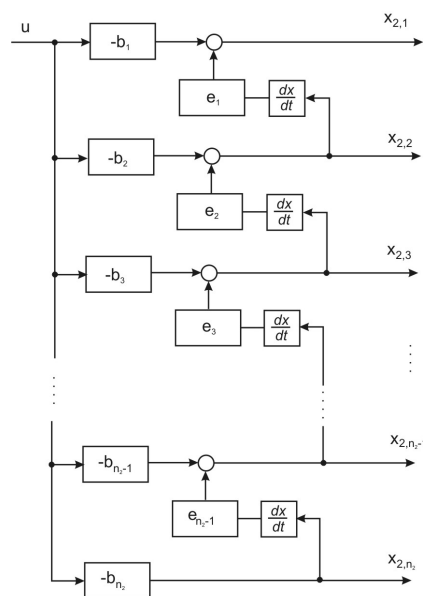
gdzie

$$x_2 = \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ \vdots \\ x_{2,n_2-1} \\ x_{2,n_2} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n_2-1} \\ b_{n_2} \end{bmatrix}$$

Na podstawie (8) możemy wyznaczyć kolejno elementy wektora stanu x_2 korzystając z zależności

$$\begin{aligned} x_{2,n_2} &= -b_{n_2} u \\ x_{2,n_2-1} &= e_{n_2-1} \dot{x}_{2,n_2} - b_{n_2-1} u \\ &\vdots \\ x_{2,2} &= e_2 \dot{x}_{2,3} - b_2 u \\ x_{2,1} &= e_1 \dot{x}_{2,2} - b_1 u \end{aligned} \quad (9)$$

Z równań (9) wynika natychmiast schemat przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1. Schemat blokowy podukładu ściśle singularnego
Fig. 1. Completely singular subsystem block diagram

Dekompozycja Weierstrassa-Kroneckera pęku regularnego jest oparta na zamianie zmiennych stanu. Wektor stanu złożony z wektorów poszczególnych podukładów należy więc poddać przekształceniu odwrotnemu

$$x = Q \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Powyższa metoda jest szczególnie efektywna w przypadkach, gdy wymiar macierzy E i A (rzędz układu) jest znaczny. Metodę tę zilustrujemy następującym przykładem liczbowym.

4. Przykład

Dany jest układ singularny (1) o macierzach

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$C = [1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0], \quad D = 0.$$

Należy przeprowadzić symulację tego układu.

Łatwo można sprawdzić, że w tym przykładzie $d=1$ oraz rząd $E=3$.

Korzystając z zależności (5) dla nieosobliwych macierzy przekształcenia

$$P = \begin{bmatrix} -0.6 & 0 & -0.4 & 0.8 & 0.6 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.33 & 0 & 0.2 & 0.67 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.16 & 0 & 0 \\ 0.6 & -0.2 & 0.24 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0 & -0.2 & 0.33 & 0 \\ -0.67 & 0 & 0.4 & -0.67 & -2 \end{bmatrix}$$

otrzymamy następujące macierze podukładów:

- standardowego

$$A_1 = 0.8, \quad B_1 = 0.2, \quad C_1 = 0.93$$

- ściśle singularnego

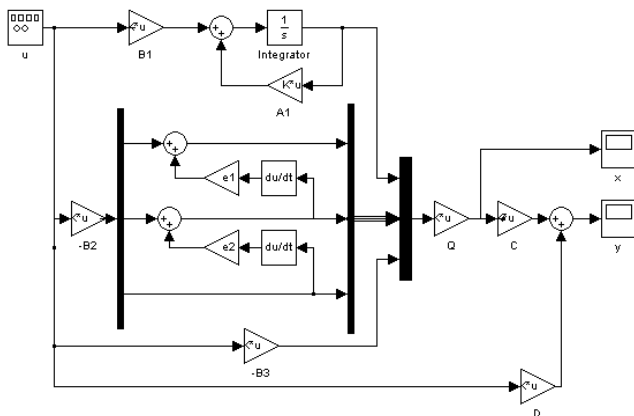
$$\bar{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (e_1 = e_2 = 1),$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [-0.2 \quad 0.04 \quad 1.33]$$

- statycznego

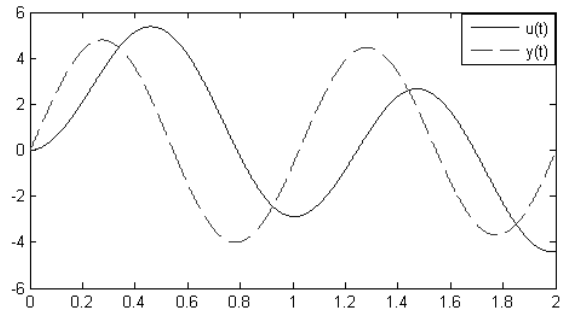
$$B_3 = 0, \quad C_3 = 0$$

Zgodnie z zależnościami (6a) i (6e) oraz w oparciu o schemat blokowy przedstawiony na rys. 1. układ singularny o zadanych macierzach (10) możemy równoważnie przedstawić w postaci schematu jak na rys. 2.

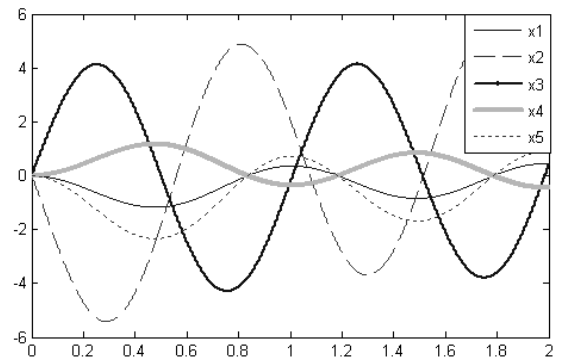


Rys. 2. Schemat blokowy w konwencji MATLAB/SIMULINK
Fig. 2. Block diagram in MATLAB/SIMULINK convention

Na rys. 3, 4 zostały przedstawione przebiegi czasowe sygnałów wymuszenia, odpowiedzi i stanu układu singularnego o macierzach (10).



Rys. 3. Sygnały wymuszenia $u(t)$ i odpowiedzi $y(t)$
Fig. 3. System input $u(t)$ and output $y(t)$ signals



Rys. 4. Wektor stanu $x(t)$
Fig. 4. System state vector $x(t)$

5. Podsumowanie

Podana została nowa metoda symulacji singularnych liniowych układów ciągłych oparta na dekompozycji układu singularnego na trzy podukłady: standardowy, ściśle singularny i statyczny. Pozwala ona na przedstawienie w postaci schematu blokowego układów singularnych dowolnego stopnia, a następnie na symulację ich działania za pomocą takich programów, jak MATLAB/SIMULINK.

6. Literatura

- [1] W.Q. Liu, V., Model Reduction of Singular Systems, Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, December 2000, str. 2373-2378.
- [2] T. Kaczorek, Teoria sterowania i systemów, PWN, Warszawa 1993.
- [3] T. Kaczorek, Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice, WNT, Warszawa 1998.
- [4] T. Kaczorek, The relationship between the infinite eigenvalue assignment for singular systems and the solvability of polynomial matrix equations, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., Vol. 13, No. 2, 2003, str. 161-167.
- [5] T. Kaczorek, Shifting to infinity of the eigenvalue in singular linear systems, Przegląd Elektrotechniczny, R. LXXIX 6/2003, str. 439-443.
- [6] M. Sławiński, T. Kaczorek, Perfect observers of continuous time linear systems, PAK 1/2004, str. 39-44.
- [7] M. Sławiński, Obserwatory funkcjonalne układów dynamicznych, Rozprawa doktorska, 2002.
- [8] G.C. Verghese, B.C. Levy, T. Kailath, A Generalized State-Space for Singular Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-26, No. 4, August 1981, str. 811-831.