

**Ewa SILICKA, Adrian SILICKI**  
POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA, KATEDRA TEORII KONSTRUKCJI

## Poliptymalizacja niezawodnościowa przekryć strukturalnych z zastosowaniem metod ewolucyjnych

Dr inż. Ewa SILICKA

Jest adiunktem w Katedrze Teorii Konstrukcji na Wydziale Budownictwa i Architektury Politechniki Szczecińskiej. Tematyka pracy naukowej podejmowanej przez autorkę dotyczy zagadnień optymalizacji niezawodnościowej konstrukcji prętowych. Studia magisterskie ukończyła w roku 2001 na specjalności konstrukcje budowlane i inżynierskie. Pracę doktorską przygotowała pod kierunkiem dr hab. inż. Witolda Paczkowskiego prof. PS. Stopień doktora nauk technicznych uzyskała w listopadzie 2004 roku.

e-mail: ewa.silicka@ps.pl



Dr inż. Adrian SILICKI

Jest adiunktem w Katedrze Teorii Konstrukcji na Wydziale Budownictwa i Architektury Politechniki Szczecińskiej. Tematyka pracy naukowej podejmowanej przez autora dotyczy zagadnień dyskretnej polioptymalizacji stalowych konstrukcji prętowych. Studia magisterskie ukończył w roku 2001 na specjalności konstrukcje budowlane i inżynierskie. Pracę doktorską przygotował pod kierunkiem dr hab. inż. Witolda Paczkowskiego prof. PS. Stopień doktora nauk technicznych uzyskał w czerwcu 2005 roku.

e-mail: adrian.silicki@ps.pl



### Streszczenie

W pracy przedstawiono algorytm dyskretnej dwuetapowej polioptymalizacji przekryć strukturalnych. Podczas analizy uwzględniono trzy kryteria: minimum masy, maksimum niezawodności i maksimum sztywności. W celu uproszczenia problemu zastosowano technikę dekompozycji. Rozwiązanie preferowane etapu pierwszego poszukiwane jest w postaci wektora zmiennych decyzyjnych opisującego optymalny układ stref sztywności. W celu wyznaczenia rozwiązania etapu drugiego zastosowano algorytm genetyczny z dziesiętnym kodowaniem zmiennych. Ponieważ otrzymywane rozwiązania spełniają wszystkie wymagania zawarte w odpowiednich normach projektowych, mogą one znaleźć zastosowanie przy analizie rzeczywistych zagadnień projektowych.

**Słowa kluczowe:** przekrycia strukturalne, polioptymalizacja niezawodnościowa, algorytmy genetyczne.

### Reliability-based polyoptimization of spatial trusses with application of evolutionary methods

#### Abstract

The paper presents problem of discrete two-stage multicriteria optimization of two-layer regular orthogonal spatial trusses. Three criteria of evaluation are taken into account, namely: minimum of weight, maximum of reliability and maximum of stiffness of the structure. To simplify the problem, decomposition techniques are applied. The preferred solution as a vector of optimal decision variables describing stiffness zones–layout in the structure is searched for. In order to solve the problem a decimal-coded genetic algorithm is used. Since all requirements contained in adequate design codes are satisfied by solutions obtained by the use of the algorithm, it may find a practical application in solving real design problems.

**Keywords:** spatial trusses, reliability-based polyoptimization, genetic algorithms.

### 1. Wprowadzenie

Przedmiotem rozważań niniejszej pracy jest zagadnienie wielokryterialnej optymalizacji niezawodnościowej przekryć strukturalnych oraz zastosowanie technik ewolucyjnych do generowania optymalnego układu stref sztywności. Poprzez przekrycia strukturalne rozumiane są przestrzenne ustroje prętowe, modelowane najczęściej jako kratownice jedno-, dwu- lub trójwarstwowe. Wykonywane są zwykle z elementów stalowych o profilach zamkniętych, łączonych za pomocą specjalnie opracowanych systemów węzłów [1, 6]. Konstrukcje tego typu charakteryzują się dużą nośnością, co pozwala na stosowanie ich do przekrywania obiektów o znacznej rozpiętości. Ważną cechą struktur przestrzennych jest także ich lekkość – masa metra kwadratowego przekrycia waha się zwykle, w zależności od rozpiętości, kształtu oraz sposobu podparcia, od kilkunastu do kilkudziesięciu

kilogramów. Kolejną ich zaletą jest swoboda kształtowania architektury obiektu. Kratownice wykonywane w formie regularnej siatki elementów pozwalają na uzyskanie dowolnego kształtu i geometrii konstrukcji. Wszystko to sprawia, że przekrycia strukturalne są obecnie coraz częściej i chętniej stosowane w obiektach o dużej rozpiętości, takich jak stadiony, hale widowiskowe i wystawowe czy centra handlowe [1, 4, 5, 6].

Celem prowadzonych rozważań jest sformułowanie zagadnienia dwuetapowej dyskretnej polioptymalizacji niezawodnościowej. W pierwszym etapie sformułowano klasyczne zadanie optymalizacji z uwzględnieniem niezawodności. W drugim etapie, w odniesieniu do rozwiązania preferowanego etapu pierwszego, zastosowano algorytm optymalnego kształtowania stref sztywności struktury z wykorzystaniem algorytmu genetycznego z kodowaniem dziesiętnym. Strefowanie przekrycia polega na wyodrębnieniu w konstrukcji grup prętów, które z zachowaniem warunków nośności mogą być wykonane z tego samego profilu. Prowadzi to do ograniczenia liczby różnych profili w konstrukcji, co wpływa korzystnie na technologiczną poprawność przekrycia. Sposób podziału struktury na strefy sztywności ma jednocześnie zasadniczy wpływ na jej ciężar, gdyż o wymiarze przekroju wszystkich prętów w danej strefie decyduje pręt najbardziej w tej strefie wyteżony. Stąd układ stref powinien być z jednej strony jak najprostszy i regularny, a z drugiej – pozwalający zachować stosunkowo wysokie wykorzystanie nośności prętów.

### 2. Zadanie etapu pierwszego

**Sformułowanie problemu.** Ogólnie zadanie polioptymalizacji niezawodnościowej sformułować można następująco – dane są wektory:

– zmiennych decyzyjnych

$$\mathbf{x} = \{x_n\}, \quad n = \overline{1, N} \quad (1)$$

– funkcji celu, przy czym przynajmniej jeden element wektora dotyczy niezawodności konstrukcji

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{f_j(\mathbf{x})\}, \quad j = \overline{1, J} \quad (2)$$

– ograniczeń, przy czym przynajmniej jeden element wektora dotyczy niezawodności konstrukcji

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \{g_k(\mathbf{x}) < 0\}, \quad k = \overline{1, K} \quad (3)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \{h_m(\mathbf{x}) = 0\}, \quad m = \overline{1, M} \quad (4)$$

– zmiennych losowych

$$\mathbf{X} = \{X_i\}, \quad i = \overline{1, I} \quad (5)$$

– funkcji granicznych

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \{G_t(\mathbf{X})\}, \quad t = \overline{1, T} \quad (6)$$

oraz zbiory parametrów zadania, stałych w procesie optymalizacji. Należy wyznaczyć zbiór rozwiązań niezdominowanych  $X_{ND}$ , zgodnie z równaniami [5, 10]

$$Y_{ND} = \{y_{ND}^k \in Y : \neg \exists_{y_i \in Y} y_i \neq y_{ND}^k \wedge y_{ND}^k \in y_i + \Lambda\} \quad (7)$$

$$X_{ND} = f^{-1}(Y_{ND}) \quad (8)$$

$$\mathbf{x}_{ND}^k \in X_{ND} \Leftrightarrow \neg \exists_{\mathbf{x}_i \in X} \forall_{j \in J} f_j(\mathbf{x}_i) \leq f_j(\mathbf{x}_{ND}^k) \wedge \exists_{j \in J} f_j(\mathbf{x}_i) < f_j(\mathbf{x}_{ND}^k) \quad (9)$$

oraz rozwiązanie preferowane  $\mathbf{x}_p$  i odpowiadają mu ocenę preferowaną  $y_p$ .

**Metody analizy niezawodnościowej.** W odróżnieniu od zadania deterministycznego, w zagadnieniu optymalizacji niezawodnościowej uwzględniony jest stochastyczny charakter wybranych zmiennych projektowych oraz obciążeń [7, 8, 12]. W rzeczywistości każda wielkość jest losowa, jednak ze względów obliczeniowych w analizie uwzględniane są tylko te, dla których opis probabilistyczny ma znaczący wpływ na przewidywane prawdopodobieństwo awarii konstrukcji. Zmienne losowe opisywane są w wektorze zmiennych losowych (5), natomiast warunki graniczne, definiujące powierzchnię awarii, w wektorze funkcji granicznych (6). W konsekwencji jako składowe wektora (2) i (3) pojawiają się funkcje o charakterze niezawodnościowym. Oznacza to, że jedna lub kilka z funkcji celu dotyczy prawdopodobieństwa awarii konstrukcji lub jej elementu. Analogicznie, w wektorze ograniczeń nierównościowych definiowane są funkcje wyznaczające minimalną wartość niezawodności, jaką może osiągnąć konstrukcja lub jej element.

Zasadniczym pojęciem w teorii niezawodności jest awaria, którą definiuje się jako stan zniszczenia całej konstrukcji bądź jej elementu, a także jako utratę przez konstrukcję jej podstawowych funkcji użytkowych. Przy założeniu, że nośność konstrukcji lub jej elementu opisana jest jedną zmienną losową  $R$ , zaś działające na nią obciążenia zmienną losową  $S$ , za awarię uznaje się stan, gdy obciążenia  $S$  przekraczają nośność  $R$ . Prawdopodobieństwo awarii zdefiniować można wówczas jako

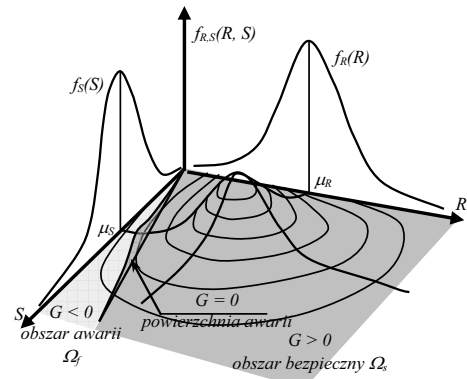
$$P_f = P[G(R, S) \leq 0] \quad (10)$$

gdzie  $G$  jest funkcją graniczną wyrażającą przyjęte kryterium awarii. W teorii niezawodności przyjmuje się założenie, że analizowany obiekt może znajdować się w stanie awarii lub w stanie bezpiecznym. Prawdopodobieństwo awarii  $P_f$  oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że obiekt znajdzie się w obszarze awarii. Poziom niezawodności obiektu  $R$  stanowi dopełnienie do jedności prawdopodobieństwa awarii, określa więc prawdopodobieństwo, że konstrukcja znajduje się w obszarze bezpiecznym

$$R = 1 - P_f \quad (11)$$

Oznacza to, że cały zbiór zdarzeń elementarnych  $\Omega$  dzieli się na dwa wzajemnie dopełniające się podzbiory  $\Omega_f$  i  $\Omega_s$ , oddzielone powierzchnią awarii, która jest graficznym obrazem ustalonej funkcji granicznej  $G = 0$ . Przy założeniu, że zmienna  $S$  dana jest rozkładem prawdopodobieństwa opisanym funkcją gęstości  $f_S(S)$ , zmienna  $R$  zaś  $f_R(R)$ , a funkcje te stanowią rozkłady brzegowe

łącznej funkcji  $f_{R,S}(R, S)$ , interpretację graficzną obszaru awarii oraz powierzchni awarii przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Liniowa funkcja graniczna i obszar awarii w przestrzeni 2D  
Fig. 1. Linear limit function and failure domain in 2D space

Zgodnie z definicją można więc obliczyć  $P_f$  jako prawdopodobieństwo takiego zdarzenia, że obiekt znajduje się w obszarze awarii

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_{R,S}(R, S) dR dS \quad (12)$$

Zakładając, że zmienne losowe  $R$  i  $S$  są niezależne, równanie (10) można zapisać jako

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^S f_R(R) dR \right) f_S(S) dS \quad (13)$$

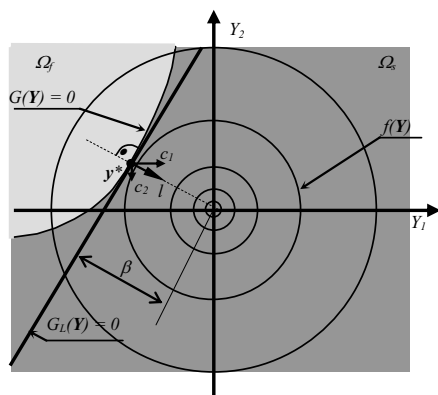
W zastosowanym systemie *OPTYTRUSS* [11] zaimplementowane zostały trzy alternatywne algorytmy służące do określania niezawodności konstrukcji. Pierwszy oparty jest na metodzie *FORM*, drugi na zgrubnej metodzie Monte Carlo, trzeci natomiast na bezpośrednim całkowaniu numerycznym, zgodnie z definicją

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_X(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (14)$$

gdzie  $\Omega_f$  oznacza obszar awarii, zaś  $f_X(\mathbf{X})$  – łączną funkcję gęstości prawdopodobieństwa. Obliczenia niezawodnościowe odbywają się równolegle do wyznaczania wartości pozostałych, deterministycznych funkcji celu. Bez względu na wybór metody analizy w pierwszym etapie wyznaczane są stosowne parametry rozkładów prawdopodobieństwa przyjętych zmiennych losowych. W danych wejściowych programu sformułowany jest wektor zmiennych losowych, a także opis typu rozkładu każdej zmiennej. Ponadto wymagane jest podanie wielkości rozrzutu, w postaci odchylenia standardowego, wariancji lub wartości kwantyla na określonym poziomie. Ponieważ dobór prętów odbywa się na nominalnych wartościach bezpiecznych, po podaniu rozrzutu oraz odsunięcia od wartości oczekiwanych, program automatycznie wyznacza parametry przyjętego dla danej zmiennej rozkładu prawdopodobieństwa. W ten sposób uzyskiwany jest pełny opis statystyczny zmiennych losowych. Istotnym warunkiem przyjmowanym na tym etapie jest założenie statystycznej niezależności zmiennych losowych. Z przeprowadzanych analiz wynika jednak, że uproszczenie to nie wpływa znacząco na wynik zadania [7, 8].

Do rozwiązywania praktycznych zadań optymalizacji wielokryterialnej zalecane jest stosowanie metody *FORM* jako najbardziej efektywnej obliczeniowo i wystarczająco dokładnej. Naprężeniowa i przemieszczeniowa funkcja graniczna w przypadku kratownic przestrzennych jest regularna i może być przybliżona rozwinięciem w szereg Taylora z zachowaniem wyrazów pierwszego rzędu. Zagadnienie całkowania po wielowymiarowym obszarze

awarii zostało sprowadzone do o wiele prostszego problemu optymalizacji skalarniej z ograniczeniami. Miarą poziomu bezpieczeństwa jest tu bowiem wskaźnik niezawodności Hasofer-Linda, oznaczony jako  $\beta$ , który interpretowany jest jako odległość powierzchni awarii od początku układu współrzędnych. Założeniem upraszczającym, na którym opiera się metoda FORM, jest aproksymacja liniowa powierzchni granicznej  $G(\mathbf{Y}) = 0$  (rys. 2). Aby tak zdefiniowana miara poziomu bezpieczeństwa była obiektywna, wymagana jest standaryzacja wszystkich zmiennych losowych, w wyniku której powstaje alternatywna przestrzeń zmiennych  $\mathbf{Y}$  o rozkładzie normalnym  $N(0, 1)$ .



Rys. 2. Aproksymacja liniowa funkcji granicznej w punkcie projektowym  $\mathbf{y}^*$   
Fig. 2. Linear approximation of a limit function in the design point  $\mathbf{y}^*$

Przy tak określonych założeniach zależność pomiędzy wskaźnikiem niezawodności  $\beta$  a prawdopodobieństwem awarii opisuje wzór

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (15)$$

zaś wartość  $\beta$  w najprostszy sposób wyrazić można jako iloraz wartości oczekiwanej do odchylenia standardowego funkcji granicznej  $G(\mathbf{Y})$  lub jej przybliżonej postaci liniowej  $G_L(\mathbf{Y})$ . Gdy dana funkcja jest nieliniowa, zasadniczym zagadnieniem jest określenie punktu leżącego na powierzchni awarii, który znajduje się najbliżej początku układu współrzędnych, zwanego punktem projektowym  $\mathbf{y}^*$ . Od prawidłowego określenia punktu projektowego zależy bowiem w sposób oczywisty wartość wskaźnika  $\beta$ . Najbardziej ogólne sformułowanie problemu wyznaczenia wskaźnika niezawodności można zapisać następująco

$$\beta = \min(\mathbf{y}^T \mathbf{y})^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

przy czym  $\mathbf{y}$  jest wektorem leżącym na powierzchni awarii  $G(\mathbf{y}) = 0$ .

### 3. Zadanie etapu drugiego

W drugim etapie analizy, dla rozwiązania preferowanego wyznaczonego w pierwszym etapie, prowadzona jest analiza optymalizacyjna mająca na celu wygenerowanie polioptymalnego układu stref sztywności przekrycia. Podział na strefy sztywności polega na wyodrębnieniu w konstrukcji grup prętów, które z zachowaniem warunków nośności, mogą być wykonane z tego samego profilu. Prowadzi to do ograniczenia liczby różnych profili w konstrukcji, co poprzez uproszczenie prac w wytwórni wpływa korzystnie na technologiczną poprawność przekrycia [1, 13, 14]. Sposób podziału struktury na strefy sztywności ma jednocześnie zasadniczy wpływ na jej ciężar, gdyż o wymiarze przekroju wszystkich prętów w danej strefie decyduje pręt najbardziej w tej strefie wyciężony. Stąd układ stref powinien być z jednej strony jak

najprostszy i regularny, a z drugiej – pozwalający zachować stosunkowo wysokie wykorzystanie nośności prętów.

Zadanie drugiego etapu sformułowane jest jako zadanie dwupoziomowe [3, 13, 14, 15] – na górnym poziomie analizowane są różne warianty podziału konstrukcji na strefy sztywności, natomiast na dolnym – dla każdego rozwiązania analizowanego na górnym poziomie wymiarowane są przekroje prętów należących do poszczególnych stref. Celem analizy jest wyznaczenie zbioru ocen niezdominowanych  $Y_{ND}$  i rozwiązań niezdominowanych  $X_{ND}$  oraz wskazanie w tych zbiorach odpowiednio oceny  $\mathbf{y}_P$  preferowanej i rozwiązania preferowanego  $\mathbf{x}_P$ , gdy wektor funkcji celu  $\mathbf{f}^G(\mathbf{x})$  ma następującą postać

$$\mathbf{f}^G(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^G(\mathbf{x}^G, \tilde{\mathbf{x}}^L(\mathbf{x}^G)) \quad (17)$$

i spełnione są ograniczenia

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^G, \tilde{\mathbf{x}}^L(\mathbf{x}^G)) \leq 0 \quad (18)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}^G, \tilde{\mathbf{x}}^L(\mathbf{x}^G)) = 0 \quad (19)$$

oraz  $\tilde{\mathbf{x}}^L(\mathbf{x}^G)$  jest rozwiązaniem zadania dolnego poziomu

$$\min_{\mathbf{x}^L \in X^L} \{ \mathbf{f}^L(\mathbf{x}^L) \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}^L) \leq 0, \mathbf{h}(\mathbf{x}^L) = 0 \} \quad (20)$$

gdzie

- $\mathbf{x}^G$  – wektor globalnych zmiennych decyzyjnych opisujących układ stref sztywności
- $\mathbf{x}^L$  – wektor lokalnych zmiennych decyzyjnych określających przyporządkowanie przekrojów do prętów poszczególnych stref
- $\mathbf{f}^G(\mathbf{x})$  – wektor globalnych funkcji celu
- $\mathbf{f}^L(\mathbf{x})$  – lokalna funkcja celu

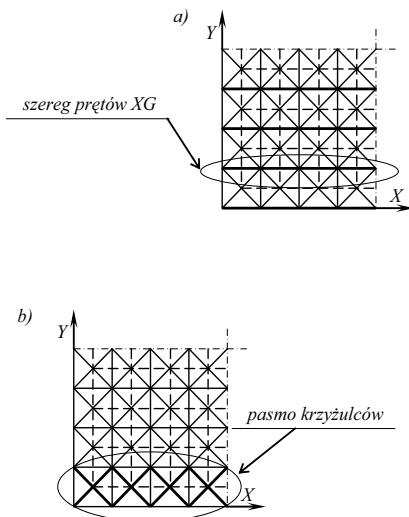
Wektor globalnych zmiennych decyzyjnych  $\mathbf{x}^G$  opisuje układ stref sztywności w oparciu o podział przekrycia na szeregi prętów warstwowych leżących w jednej linii na kierunkach osi X i Y oraz szeregi pasm krzyżulców ułożonych równoległe do osi X. Można wyróżnić pięć rodzajów szeregów:

- szeregi prętów warstwy górnej równoległe do osi X (szeregi XG, rys. 3a);
- szeregi prętów warstwy górnej równoległe do osi Y (szeregi YG);
- szeregi prętów warstwy dolnej równoległe do osi X (szeregi XD);
- szeregi prętów warstwy dolnej równoległe do osi Y (szeregi YD);
- szeregi pasm krzyżulców równoległe do osi X (szeregi K, rys. 3b).

W celu zdefiniowania układu stref sąsiednie szeregi łączone są w grupy i dla każdej grupy doбираany jest układ stref z wcześniej przygotowanych katalogów zawierających schematy podziału szeregu danego typu na strefy sztywności. Katalogi stref dla poszczególnych szeregów generowane są na podstawie analizy statyczno-wytrzymałościowej przekrycia bez podziału na strefy, co zapewnia dobre odzwierciedlenie przebiegu wykresów sił wewnętrznych w prętach struktury. Składowe wektora zmiennych decyzyjnych  $\mathbf{x}^G$  opisują sposób pogrupowania szeregów prętów i numery schematów strefowania przypisane do poszczególnych grup.

Na górnym poziomie optymalizacji zastosowano dwa kryteria oceny poszczególnych wariantów strefowania: minimum masy konstrukcji otrzymanej po doborze przekrojów do danego układu stref i minimalnej liczby różnych węzłów występujących w konstrukcji. Pierwsze kryterium wyraża dążenie do uzyskiwania

lekkich konstrukcji, drugie – do otrzymywania regularnych układów stref sztywności. Pojęcie „różne węzły” odnosi się do węzłów różniących się układem przynależności zbiegających się prętów do poszczególnych stref.



Rys. 3. Przykładowe szeregi prętów warstwowych: a) szeregi XG (szeregi YG, XD, YD zdefiniowano analogicznie), b) szereg krzyżulców K

Fig. 3. Example of truss members rows: a) rows XG (rows YG, XD, YD are defined in a similar way), b) row of cross braces K

Zadanie dolnego poziomu optymalizacji sformułowane jest w następujący sposób: znaleźć wektor zmiennych decyzyjnych  $\bar{x}^L(x^G)$  minimalizujący funkcję  $f^L(x)$  wyrażającą masę konstrukcji, przy założeniu, że spełnione są odpowiednie ograniczenia. Ograniczenia nałożone na zmienne wynikają z ich dyskretnego charakteru, postanowień zawartych w normie do projektowania konstrukcji stalowych [16] dotyczących nośności prętów osiowo ściskanych lub rozciąganych, oraz zaleceń dotyczących technologicznej poprawności kratownicy zawartych w literaturze [1, 6].

Zadanie dolnego poziomu rozwiązywane jest za pomocą procedury dobierającej przekroje do prętów kratownicy zaimplementowanej w programie TRUSS będącym modulem utworzonego w Katedrze Teorii Konstrukcji Politechniki Szczecińskiej systemu OPTYTRUSS [11]. Pozwala ona otrzymać najlżejszą konstrukcję przy zadanych obciążeniach, geometrii, topologii, sposobie podparcia, katalogu przekrojów i wytrzymałości obliczeniowej stali, z której wykonana jest kratownica. Natomiast zadanie poziomu górnego rozwiązywane jest za pomocą algorytmu genetycznego z dziesiętnym kodowaniem zmiennych. Selekcja realizowana jest z zastosowaniem metody turniejowej dla polioptymalizacji, krzyżowanie – metody krzyżowania mieszanego BLX- $\alpha$ , mutacja – poprzez zamianę wartości losowo wybranej zmiennej na losową wartość spełniającą ograniczenia kostkowe i dyskretyzacyjne [2, 9]. Omawiany algorytm został szczegółowo opisany w pracy [14].

#### 4. Polioptymalizacja przekrycia hali sportowej

Przykładem zastosowania opracowanego algorytmu jest polioptymalny projekt stalowej kratownicy przestrzennej, w którym uwzględniono losowy charakter obciążeń oraz parametrów opisujących nośność. Kratownica stanowi przekrycie hali sportowej o wymiarach 40 × 80 m. Jako założenia przyjęto, że warstwa górna i dolna są wykonane jako równoległe ortogonalne siatki prętów. Węzły warstwy górnej i dolnej są wzajemnie przesunięte o połowę modularnej odległości międzywęzłowej. Struktura oparta jest na ścianach hali wzdłuż dłuższych boków. Pręty wykonane są z rur walcowanych ze stali R45 połączonych w węzłach w sposób przegubowy.

Zadanie obejmuje polioptymalny dobór kształtu przekrycia, odległości międzywęzłowej, wysokości konstrukcyjnej oraz strzałki. Wiąże się to z przyjęciem czteroelementowego wektora zmiennych decyzyjnych  $x$

$$x = \{x_n\}, n = \overline{1,4} \quad (21)$$

Na zmienne nałożono ograniczenia nierównościowe – geometryczne i projektowe oraz równościowe – dyskretyzacyjne, które usystematyzowano odpowiednio w wektorach  $g(x)$  i  $h(x)$ . Zdefiniowano w ten sposób obszar rozwiązań dopuszczalnych zadania  $X$ . W zadaniu przyjęto trzy kryteria oceny poszczególnych rozwiązań – minimum masy, minimum maksymalnego przemieszczenia oraz maksimum niezawodności. Kryteria te wyrażono w postaci funkcji celu stanowiących elementy wektora  $f(x)$

$$f(x) = \{f_j(x)\}, j = \overline{1,3} \quad (22)$$

Wektor zmiennych losowych  $X$  przyjętych w zadaniu składa się z piętnastu elementów. Założono, że średnice oraz grubości rur zawartych w katalogu, z którego dobierane są przekroje prętów, opisane są rozkładem logarytmiczno-normalnym o współczynniku zmienności 0,1; granica plastyczności i moduł sprężystości podłużnej stali rozkładami logarytmiczno-normalnymi o współczynnikach zmienności odpowiednio 0,1 i 0,05; mnożnik obciążenia stałego rozkładem normalnym o współczynniku zmienności 0,1; mnożnik obciążenia śniegiem rozkładem Frecheta o współczynniku zmienności 0,2; mnożnik obciążenia wiatrem rozkładem Gumbela dla max o współczynniku zmienności 0,2.

Jako kryteria awarii przyjęto dwie funkcje graniczne – naprężeniową oraz przemieszczeniową. Pierwsza dotyczy prawdopodobieństwa przekroczenia naprężeń w dowolnym przecie kratownicy i ma charakter lokalny. Druga, o charakterze globalnym, opisuje natomiast prawdopodobieństwo przekroczenia ugięcia granicznego równego 16 cm.

Podczas analizy polioptymalizacyjnej wskaźnik niezawodności  $\beta$  określony był jako

$$\beta = \text{Min}(\min \beta_i, \beta^f) \quad (23)$$

gdzie  $\beta_i$  oznacza wskaźnik niezawodności  $i$ -tego pręta kratownicy, zaś  $\beta^f$  – wskaźnik niezawodności dotyczący maksymalnego przemieszczenia węzłów konstrukcji.

Ze względu na lingwistyczny charakter zmiennej  $x_i$ , której realizacje stanowią zbiór nieuporządkowany, podczas rozwiązywania zadania etapu pierwszego zastosowano dekompozycję. Z otrzymanych wartości funkcji celu wyłoniono zbiór ocen niezdominowanych oraz jego przeciwobraz – zbiór rozwiązań niezdominowanych. Następnie metodą funkcji dystansowej wyłoniono ocenę preferowaną i rozwiązanie preferowane, które stanowiło podstawę do rozwiązania zadania etapu drugiego.

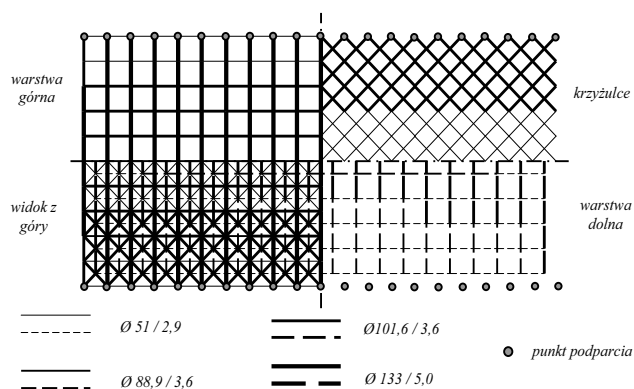
$$x_p = \{3; (10 \times 20); 4,2; 4,0\} \quad (24)$$

Rozwiązaniem kompromisowym zadania etapu pierwszego jest więc przekrycie walcowe oparte na łuku kołowym, o podziale siatki 10 × 20, wysokości konstrukcyjnej 4,2 m i wyniosłości 4,0 m. Masa konstrukcji wynosi 25,3 kg / m<sup>2</sup> rzutu przekrycia, maksymalne przemieszczenie – 6,35 cm, zaś wskaźnik niezawodności  $\beta$  – 3,975, co odpowiada prawdopodobieństwu awarii 3,52e-5 i poziomowi niezawodności 0,99996.

Polioptymalizacja układu stref sztywności, prowadzona w drugim etapie analizy dla uzyskanego w etapie pierwszym rozwiązania, została przeprowadzona przy założeniu, że w konstrukcji występuje najwyżej pięć różnych przekrojów prętów, co najmniej dwa sąsiadujące ze sobą w szeregu pręty mają ten sam przekrój,

w szeregach prętów warstwowych i krzyżulców występują najwyższe trzy różne schematy strefowania. Przyjęto, że liczebność populacji wynosi 100 osobników; prawdopodobieństwo krzyżowania – 0,6; prawdopodobieństwo mutacji – 0,05. Czas działania algorytmu ustalano na 100 pokoleń. Pierwsze pokolenie zostało wygenerowane losowo.

Stosując opisaną wcześniej procedurę uzyskano rozwiązanie preferowane przedstawione na rysunku 5. Masa konstrukcji wynosi 21,48 kg/m<sup>2</sup> przekrywanej powierzchni, w konstrukcji występuje 39 różnych typów węzłów. Preferowany układ stref sztywności przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 4. Rozwiązanie preferowane  
Fig. 4. The preferred solution

## 5. Wnioski

1. W przypadku zagadnień dyskretnej polioptymalizacji złożonych obiektów uzasadnione jest zastosowanie dekompozycji parametrycznej. Podział zadania pierwotnego na kilka mniejszych zadań lokalnych poprzez dekompozycję wektora zmiennych decyzyjnych zwiększa znacząco efektywność procesu optymalizacji.
2. Rozwiązania, które poddawano analizie niezawodnościowej projektowane były na podstawie wartości normowych, uznawanych za bezpieczne. Zauważyć można, że przy przyjętych modelach statystycznych zmiennych losowych, wskaźniki niezawodności  $\beta$  wahają się w granicach  $1,8 \div 4$ , co odpowiada prawdopodobieństwu awarii  $3,59e-2 \div 3,17e-5$ . Wartości te nie zawsze są wystarczające, zwłaszcza gdy projektowana konstrukcja jest przekryciem budynku użyteczności publicznej, budowli monumentalnej lub o dużym znaczeniu ekonomicznym i strategicznym. Zastosowanie metod analizy niezawodnościowej pozwala na wykluczenie z dalszych rozważań rozwiązań o zbyt niskim poziomie bezpieczeństwa oraz na wybór rozwiązania godzącego sprzeczne na ogół ekonomiczne i niezawodnościowe kryteria optymalizacji.
3. W przypadku realnych zadań inżynierskich uzasadnione jest stosowanie metod aproksymujących powierzchnię graniczną, w tym przypadku *FORM*. Metoda ta jest bardzo efektywna, zaś jej dokładność jest wystarczająca dla przyjętych w zadaniach funkcji granicznych.
4. Zastosowanie kryteriów minimum masy konstrukcji i minimum liczby różnych węzłów przy optymalnym projektowaniu stref sztywności zapewnia uzyskanie rozwiązania stosunkowo lekkiego i jednocześnie odznaczającego się regularnym rozmieszczeniem stref, co ma znaczący wpływ na technologiczność konstrukcji.

5. Zastosowany sposób generowania układów stref za pomocą zestawionych w katalogach schematów strefowania, opartych o rozkład sił w prętach przekrycia, pozwala na uzyskanie dość szerokiej gamy układów stref dla danej konstrukcji. Umożliwia to trafniejszy podział konstrukcji na strefy sztywności niż ma to miejsce w przypadku zadań, w których wybierany jest jeden z kilku arbitralnie zaproponowanych wariantów strefowania. Jednocześnie liczba zmiennych jest wielokrotnie mniejsza niż dla klasycznego sformułowania, gdzie zmienne opisują przynależność poszczególnych prętów do stref. Dzięki temu obszar poszukiwań rozwiązań niezdominowanych jest znacznie mniejszy i wyniki analizy otrzymywane są w akceptowalnym czasie.

## 6. Literatura

- [1] Bródka J. (red.): Przekrycia strukturalne. Arkady, Warszawa 1985.
- [2] Deb K.: Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms. Wiley, Chichester 2003.
- [3] Enevoldsen I., Sørensen J. D.: Decomposition techniques and effective algorithms in reliability-based optimization. Int. Conf. on Computational Stochastic Mechanics, Athens 13 – 15 June 1994. Structural Reliability Theory, No. 130.
- [4] Jendo S., Paczkowski W. M.: Multicriteria discrete optimization of large scale truss systems. Structural Optimization, 1993, Vol. 6, pp. 238–294.
- [5] Jendo S., Paczkowski W. M., Silicka E.: Discrete multicriteria reliability-based optimization of spatial trusses. CAMES, 2007, Vol. 14, pp. 485–496.
- [6] Makowski Z. S. (ed.): Analysis, Design and Construction of Double-Layer Grids. Elsevier Applied Science Publishers 1981.
- [7] Melchers R.E.: Structural Reliability, Analysis and Prediction. Wiley, 1987.
- [8] Nowak A. S., Collins K. R.: Reliability of Structures. McGraw-Hill, 2000.
- [9] Osyczka A.: Evolutionary Algorithms for Single and Multicriteria Optimization. Springer-Verlag, Heidelberg 2002.
- [10] Paczkowski W. M.: Wybrane problemy dyskretnej optymalizacji ewolucyjnej. Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej Nr 544, Szczecin 1999.
- [11] Paczkowski W. M., Drzazga M. F.: System Optytruss do polioptymalizacji przekryć strukturalnych. (w:) Tarnowski W., Kiczkiowiak T. (red.): Polioptymalizacja i CAD, Mielno 25–28 czerwca 2002, WNT, Warszawa, s. 155–164.
- [12] Silicka E.: Optymalizacja niezawodnościowa przekryć strukturalnych. (w:) Garbalińska H. (red.): Prace doktorantów kierunku budownictwo, Politechnika Szczecińska, Szczecin 2004, s. 97–120.
- [13] Silicka A.: Polioptymalizacja przekryć strukturalnych z uwzględnieniem stanu granicznego użytkowania. (w:) Garbalińska H. (red.): Prace doktorantów kierunku budownictwo, Politechnika Szczecińska, Szczecin 2004, s. 121–140.
- [14] Silicka A.: Polioptymalizacja układu stref sztywności dwuwarstwowych przekryć strukturalnych. Pomiary, Automatyka, Kontrola, Vol. 53, 2007, s. 64–68.
- [15] Tuy H.: Hierarchical optimization. (in:) Pardalos P. M., Resende M. G. C. (eds.): Handbook of Applied Optimization. Oxford University Press, Oxford 2002, pp. 502–513.
- [16] PN-90/B-03200 Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie.