

Henryk LASKOWSKI, Leszek MIKULSKI
POLITECHNIKA KRAKOWSKA, INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI

Zasada maksimum w praktycznych zastosowaniach jako alternatywna metoda obliczeń konstrukcyjnych

Dr inż. Henryk LASKOWSKI

Adiunkt w Zakładzie Podstaw Mechaniki Ośrodka Ciągłego Wydziału Inżynierii Lądowej PK. Autor 10 artykułów z zakresu teorii i zastosowań optymalnego sterowania w zagadnieniach optymalizacji wytrzymałościowej konstrukcji budowlanych.



e-mail: henryklaskowski@poczta.onet.pl

Dr hab. inż. Leszek MIKULSKI

Kierownik Zakładu Podstaw Mechaniki Ośrodka Ciągłego Wydziału Inżynierii Lądowej PK. Zainteresowania badawcze i naukowe dotyczą problemów optymalnego kształtowania konstrukcji i systemów, autor 50 publikacji z tego zakresu.



e-mail: mikul@optra.wil.pk.edu.pl

Streszczenie

W pracy przedstawiono zarys metody obliczeń konstrukcyjnych na przykładzie obliczeniowym dotyczącym stalowego dźwigara łukowego, ze szczególnym uwzględnieniem wielu złożonych kombinacji obciążeń. Praktyczny problem projektowy sformułowano w kategoriach teorii sterowania z uwzględnieniem uwarunkowania wynikające z przepisów technicznych. Wyznaczono rozwiązanie, przy którym w żadnej prawdopodobnej sytuacji obliczeniowej nie są osiągnięte normowe stany graniczne.

Słowa kluczowe: zasada maksimum, optymalne kształtowanie, kombinacje obciążeń.

Maximum principle in practical applications as an alternative structural computation method

Abstract

The paper outlines a structural calculation method for a steel arch girder, which takes into special account a range of complex load combinations. The practical design problem is formulated in terms of the control theory, taking into consideration the conditions ensuing from the relevant technical provisions. The solution obtained is one in which the standard boundary states are not reached in any of the probable computation situations.

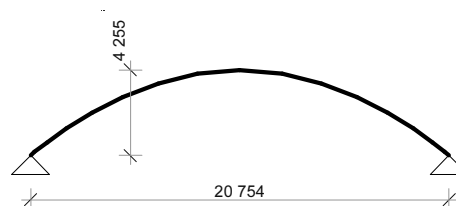
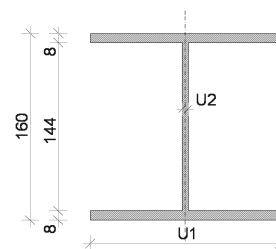
Keywords: maximum principle, optimal design, load combinations.

1. Wstęp

Stan wiedzy oraz nabyte doświadczenia pozwalają na wykorzystanie zasady maksimum w obliczeniach konstrukcyjnych projektowanych obiektów inżynierskich a w szczególności tych obiektów lub ich części, które są dowolnymi układami prętowymi. Istotną zaletą tej metody jest możliwość uwzględnienia w obliczeniach złożonych stanów montażowych i stanów eksploatacji oraz wszystkich istotnych kombinacji obciążeń, którym poddany jest obiekt w tych stanach. Ponadto metoda ta pozwala wyznaczyć rozwiązanie optymalne w sensie matematycznym, możliwe w praktycznej realizacji, przy którym nie są przekroczone stany graniczne nośności i użytkowania w każdym stanie pracy obiektu. W pracy opisano obliczenia konstrukcyjne ww. metodą, dotyczące stalowego dźwigara łukowego jako elementu nośnego hali widowiskowej pewnego obiektu użyteczności publicznej, kładąc nacisk na liczbę i złożoność układu obciążeń w stanie eksploatacji.

2. Opis obiektu i dane projektowe

Projektowany dźwigar jest powtarzalnym elementem nośnym przekrycia hali o wymiarach 21.000 x 50.000 m. W obliczeniach przyjęto, że dźwigar jest blachownicą o przekroju dwuteowym i osi parabolicznej o wyniosłości 4.255 m (rys. 1). W przekroju poprzecznym przyjęto stałą wysokość środnika i stałą grubość pasów.



Rys. 1. Schemat i przekrój poprzeczny dźwigara
Fig. 1. The scheme and the cross-section of the girder

Pozostałe wymiary, tj. szerokość pasów i grubość środnika przyjęto jako zmienne. Te wymiary w obliczeniach zostaną wyznaczone. W realizowanym obiekcie zastosowano ścigi stalowy, którego w obliczeniach nie uwzględniono zmieniając jednocześnie rodzaj podpór. Zabieg ten nie wpływa na wynik obliczeń a jedynie upraszcza model obliczeniowy.

Pomiędzy środnikami dwóch kolejnych dźwigarów zamontowane są płatwie wykonane z dwuteownika HEB120. W połowie odległości pomiędzy dźwigarami, na płatwiach oparte są drewniane krążyny. Wymiary krążyn i sposób ich zamontowania zapewnia, że ich górne krawędzie oraz górne krawędzie dźwigarów są styczne do powierzchni poszycie dachu hali o kształcie walca parabolicznego.

Dane:

Rozpiętość dźwigara łukowego	– 21.000 m
Wyniosłość osi łuku	– 4.255 m
Rozstaw dźwigarów w osiach	– 2.500 m
Rozstaw płatwi	– 2.100 m
Wysokość przekroju poprzecznego	– 160 mm
Grubość pasów	– 8 mm

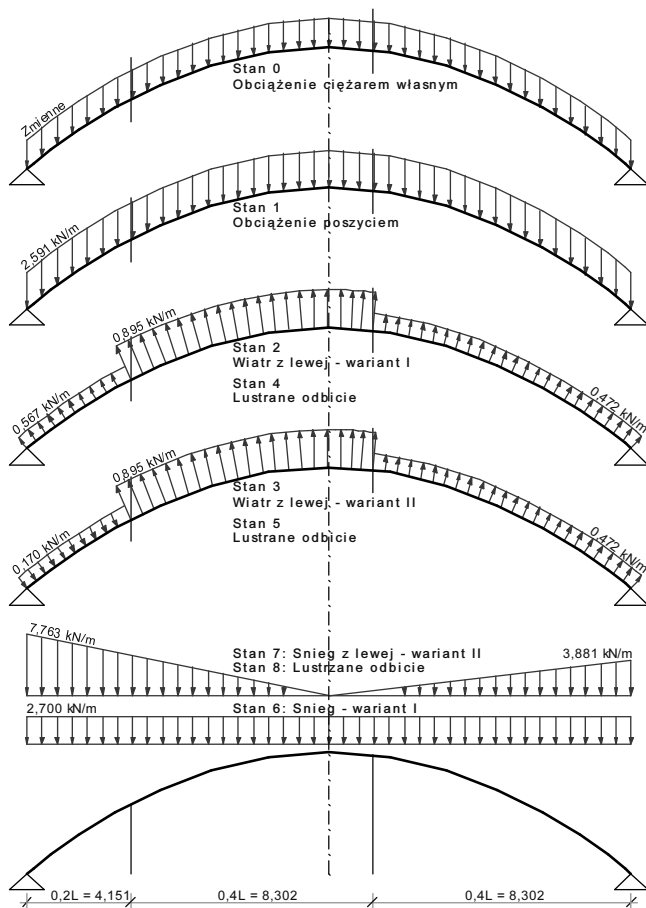
3. Opis obciążeń

Ze względu na dużą liczbę kombinacji obciążeń, w celu ograniczenia wymiaru zadania optymalizacji, obliczenia przeprowadzo-

no w jednym przedziale charakterystycznym. Takie sformułowanie jest możliwe tylko wtedy, gdy wszystkie uwzględniane obciążenia są obciążeniami rozłożonymi. W pracy [2] wykazano, że dzięki zastosowaniu funkcji indykatorowych, nieciągłość obciążeń rozłożonych nie wprowadza do modelu matematycznego dodatkowych punktów charakterystycznych. Z powyższego rozwiązania technicznego wynika, że obciążenia działające na poszycie przekazywane są na dźwigar stalowy w postaci obciążeń rozłożonych oraz sił skupionych w miejscach zamontowania płatwi. Siły skupione, zgodnie z opisanym założeniem odnośnie przedziałów charakterystycznych, zostały przeliczone na obciążenia rozłożone.

W celu rozważenia wielu kombinacji obciążeń wprowadzono 9 stanów podstawowych. W każdym z nich dźwigar jest poddany elementarnemu układowi obciążeń zgodnie z obowiązującymi normami (rys. 2).

- Stan 0. Obciążenie ciężarem własnym dźwigara.
- Stan 1. Obciążenie warstwami poszycia.
- Stan 2. Obciążenie wiatrem z lewej strony - wariant I.
- Stan 3. Obciążenie wiatrem z lewej strony - wariant II.
- Stan 4. Obciążenie wiatrem z prawej strony - wariant I.
- Stan 5. Obciążenie wiatrem z prawej strony - wariant II.
- Stan 6. Obciążenie śniegiem - wariant I.
- Stan 7. Obciążenie śniegiem - wariant II (śnieg z lewej).
- Stan 8. Obciążenie śniegiem - wariant II (śnieg z prawej).



Rys. 2. Podstawowe stany obciążenia
Fig. 2. Basic states load

Oś dźwigara charakteryzuje symetria, stąd dążenie do wyznaczenia symetrycznego rozwiązania. W związku tym, każdemu elementarnemu, niesymetrycznemu stanowi obciążenia odpowiada stan z obciążeniem, będącym lustrzanym odbiciem. Tej samej zasady przestrzegano podczas formułowania kolejnych kombinacji obciążeń (tabela 1).

Podstawowe stany obciążenia pozwalają sformułować 20 prawdopodobnych kombinacji obciążeń, przy czym mogą tutaj zachodzić 3 możliwości:

1. Tylko obciążenia stałe (tę kombinację pominięto jako mało istotną).
2. Obciążenia stałe oraz obciążenie wiatrem lub śniegiem – 7 kombinacji.
3. Obciążenia stałe oraz obciążenie wiatrem i śniegiem – 12 kombinacji.

Tab. 1. Kombinacje obciążeń
Tab. 1. The load combinations

	Stany podstawowe								
	Stan 0: Obciążenie ciężarem własnym dźwigara	Stan 1: Obciążenie warstwami poszycia	Stan 2: Obciążenie wiatrem z lewej strony - wariant I	Stan 3: Obciążenie wiatrem z lewej strony - wariant II	Stan 4: Obciążenie wiatrem z prawej strony - wariant I	Stan 5: Obciążenie wiatrem z prawej strony - wariant II	Stan 6: Obciążenie śniegiem - wariant I	Stan 7: Obciążenie śniegiem - wariant II (śnieg z lewej)	Stan 8: Obciążenie śniegiem - wariant II (śnieg z prawej)
Kombinacje obciążeń	1	+	+	+					
	2	+	+		+				
	3	+	+			+			
	4	+	+				+		
	5	+	+					+	
	6	+	+						+
	7	+	+						+
	8	+	+	+				+	
	9	+	+	+					+
	10	+	+	+					+
	11	+	+		+			+	
	12	+	+		+				+
	13	+	+		+				+
	14	+	+			+		+	
	15	+	+			+			+
	16	+	+			+			+
	17	+	+				+	+	
	18	+	+				+		+
	19	+	+				+		+

Podstawowe stany obciążenia wprowadzono do modelu matematycznego na poziomie formułowania równań stanu, natomiast kombinacje obciążeń zdefiniowano na poziomie formułowania ograniczeń.

4. Równania stanu w podstawowych stanach obciążenia

W każdym podstawowym stanie obciążenia sformułowano 6 równań stanu (1) opisujących łuk paraboliczny, poddany działaniu układu obciążeń, następującej postaci:

$$\frac{du_i}{dx} = \left(\frac{N_i}{EA} + w_i \cdot \kappa \right) \cdot \frac{1}{\cos \alpha_i}, \quad \frac{dw_i}{dx} = \frac{-u_i \cdot \kappa + \alpha_i}{\cos \alpha_i}, \quad \frac{d\alpha_i}{dx} = \frac{M_i}{EI \cdot \cos \alpha_i}, \quad (1)$$

$$\frac{dM_i}{dx} = \frac{Q_i}{\cos \alpha_i}, \quad \frac{dQ_i}{dx} = \frac{N_i \cdot \kappa - p_i}{\cos \alpha_i}, \quad \frac{dN_i}{dx} = \frac{Q_i \cdot \kappa - n_i}{\cos \alpha_i}, \quad i = 0, 1, \dots, 8,$$

gdzie:

- u, w – przemieszczenie styczne i prostopadłe do osi,
- α – kąt ugięcia,
- M – moment zginający,
- Q, N – siła poprzeczna i podłużna,
- x – zmienna niezależna odmierzana wzdłuż rzutu poziomego,
- EI, EA – sztywność giętą i podłużną dźwigara,
- A – powierzchnia przekroju,
- κ – krzywizna osi,
- p, n – obciążenie prostopadłe i styczne do osi.

Dźwigar we wszystkich stanach obciążenia opisano 54 równaniami stanu. Dodatkowo sformułowano równanie opisujące objętość (2):

$$\frac{dV}{dx} = \frac{A}{\cos \alpha}. \quad (2)$$

W odniesieniu do obiektu opisanego układem równań różniczkowych zwyczajnych można sformułować problem optymalnego kształtowania przekroju poprzecznego w kategoriach teorii sterowania z zastosowaniem zasady maksimum.

5. Sformułowanie zadania optymalizacji

Stosując formalizm zasady maksimum należy wyznaczyć przekrój poprzeczny dźwigara (w szczególności jego dwa nie ustalone wymiary jako zmienne decyzyjne), opisanego układem równań (1), który zapewni minimum ciężaru, przy czym w żadnym stanie obciążenia stany graniczne nośności i użytkowania nie mogą być osiągnięte. Tak więc funkcją celu jest objętość (3) a ograniczeniami w zadaniu optymalizacji są maksymalne wartości naprężeń i przemieszczeń wynikające ze stanów granicznych.

$$J = V. \quad (3)$$

Tok postępowania opisany m. in. w pracach [1, 2] prowadzi do sformułowania wielopunktowego problemu brzegowego, na który składają się równania stanu, równania sprzężone, warunki ekstremum funkcji Hamiltona w odniesieniu do zmiennych decyzyjnych, funkcje ograniczeń. Z wymienionych wyżej elementów w dalszej części pracy przedstawiono szczegółowo jedynie funkcje ograniczeń, w których występują wielkości wynikające z rozważanych kombinacji obciążeń.

6. Ograniczenia

Na podstawie normy [4] przyjęto następujące ograniczenia:

1. Ograniczenie naprężeń normalnych na dolnej powierzchni dźwigara σ_{fd}

$$G_1 = f_d - \sigma_{fd}. \quad (4)$$

2. Ograniczenie naprężeń normalnych na górnej powierzchni dźwigara σ_{fg}

$$G_2 = f_d - \sigma_{fg}. \quad (5)$$

3. Ograniczenie naprężeń w złożonym stanie naprężenia na krawędziach środnika σ_w

$$G_3 = 1,1f_d - \sigma_w. \quad (6)$$

4. Ograniczenie naprężeń stycznych w osi dźwigara τ

$$G_4 = 0,58f_d - \tau. \quad (7)$$

5. Ograniczenie maksymalnego ugięcia y

$$G_5 = y_d - y. \quad (8)$$

Gdzie:

- f_d – wytrzymałość obliczeniowa stali,
- y_d – dopuszczalne ugięcie ($y_d = L/300$).

Naprężenia, których dotyczą ograniczenia są wyznaczone jako wartości ekstremalne spośród wszystkich, jakie mogą wystąpić w jednej z 19 rozważanych sytuacji obliczeniowych i mogą być zapisane w postaci (9) z zastosowaniem funkcji *maximum*.

$$\sigma_{fd} = \max \{ \sigma_{fd,i} \}, \quad i = 1, 2, \dots, 19. \quad (9)$$

Na poziomie formułowania funkcji ograniczeń są definiowane kombinacje obciążeń. W odniesieniu do każdej funkcji tworzone są zbiory wartości podlegających ograniczeniom, których kolejne elementy odpowiadają poszczególnym kombinacjom obciążeń. I tak, zgodnie z tabelą 1, w wyrażeniu (9) elementy zbioru $\{ \sigma_{fd,i} \}$ mają postać

$$\begin{aligned} \sigma_{fd,1} &= \sigma_{0,fd} + \sigma_{1,fd} + \sigma_{2,fd} \\ \sigma_{fd,2} &= \sigma_{0,fd} + \sigma_{1,fd} + \sigma_{3,fd} \\ &\dots \\ \sigma_{fd,19} &= \sigma_{0,fd} + \sigma_{1,fd} + \sigma_{5,fd} + \sigma_{8,fd} \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie:

- $\sigma_{j,fd}$ – naprężenie na dolnej krawędzi w j -tym stanie podstawowym.

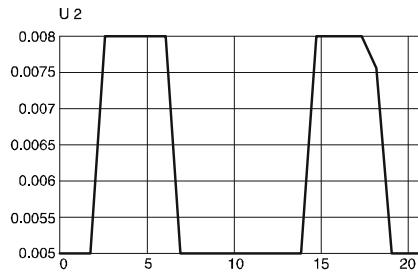
Takie postępowanie pozwala w zasadniczy sposób zmniejszyć liczbę ograniczeń w zadaniu optymalizacji.

7. Wyniki obliczeń – rozwiązanie teoretyczne

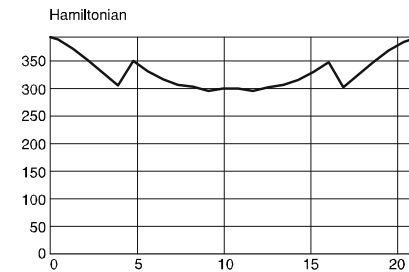
Stosując formalizm zasady maksimum sformułowano wielopunktowy problem brzegowy o znacznym wymiarze (55 równań stanu, 55 równań sprzężonych, 2 warunki maksimum funkcji Hamiltona, 5 funkcji ograniczeń). Za pomocą programu Dircol – 2.1 [3] wyznaczono dwa nieustalone wymiary przekroju poprzecznego dźwigara, przy których funkcja celu osiąga wartość minimalną a stany graniczne w żadnej sytuacji obliczeniowej nie są przekroczone. Wyniki obliczeń przedstawiono w formie graficznej.



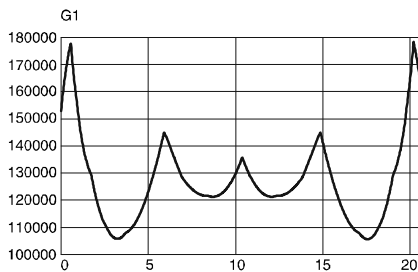
Rys. 3. Szerokość półki blachownicy
Fig. 3. Width of the beam flange



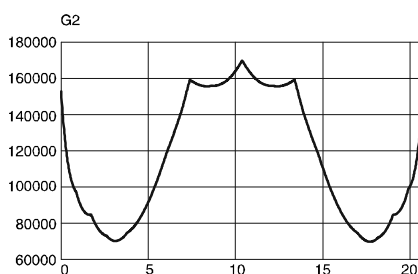
Rys. 4. Grubość środnika blachownicy
Fig. 4. Thickness of the beam web



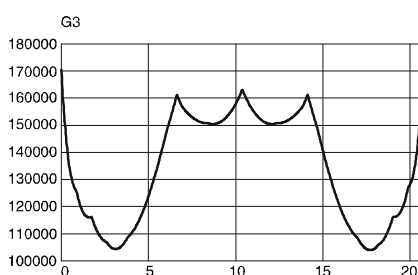
Rys. 5. Funkcja Hamiltona
Fig. 5. Hamiltonian function



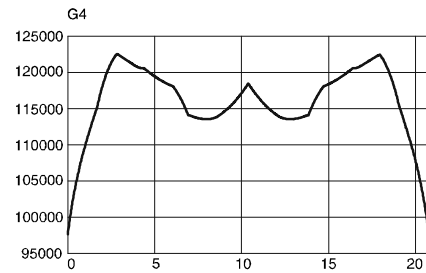
Rys. 6. Funkcja ograniczenia G_1
Fig. 6. Constraint function G_1



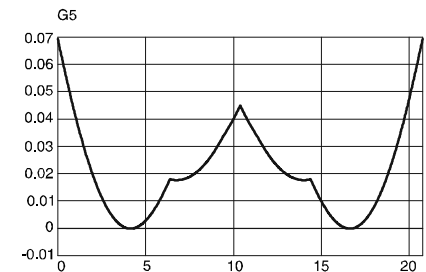
Rys. 7. Funkcja ograniczenia G_2
Fig. 7. Constraint function G_2



Rys. 8. Funkcja ograniczenia G_3
Fig. 8. Constraint function G_3



Rys. 9. Funkcja ograniczenia G_4
Fig. 9. Constraint function G_4



Rys. 10. Funkcja ograniczenia G_5
Fig. 10. Constraint function G_5

8. Podsumowanie

Przedstawiony w pracy przykład obliczeniowy dotyczy realizowanego obiektu użyteczności publicznej i obejmuje jedną z dwóch metod, jakie zostały w obliczeniach zastosowane. Obliczenia z zastosowaniem zasady maksimum pozwoliły na wyznaczenie przekroju poprzecznego dźwigara stalowego, którego masa okazała się mniejsza niż w przypadku obliczeń tradycyjnych. Biorąc jednak pod uwagę relację oszczędności materiału do kosztów robocizny z tym związanej należy stwierdzić, że przy tak małych przekrojach elementów oszczędności materiałowe nie są istotne. W tym przypadku korzyścią, wynikającą z zastosowania tej metody, jest możliwość uwzględnienia dowolnych kombinacji obciążeń w każdej sytuacji obliczeniowej i wyznaczenie rozwiązania, przy którym nie zostaną osiągnięte stany graniczne nośności i użytkowania.

9. Literatura

- [1] Laskowski H., Mikulski L., Ostaficzuk J.: Rozwiązania teoretyczne i ich praktyczne zastosowania w optymalizacji konstrukcji, *Pomiary, Automatyka, Kontrola* 8/2007, s. 38-43.
- [2] Laskowski H.: Optymalne kształtowanie stalowo-betonowych dźwigarów zespolonych w kategoriach teorii sterowania, praca doktorska, WIL PK, 2006, <http://bc.biblos.pk.edu.pl>.
- [3] von Stryk O.: User's Guide DIRCOL A Direct Collocation Method For The Numerical Solution of Optimal Control Problems. Technische Universität Darmstadt, Fachgebiet Simulation und Systemoptimierung (SIM). Version 2.1, 2002.
- [4] PN-90/B-03200: Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie.