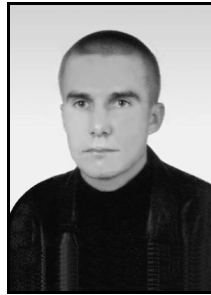


Sergiusz SIENKOWSKI
UNIwersytet Zielonogórski

Uogólniony model błędu kwantowania w pomiarze wartości skutecznej sygnałów

Mgr inż. Sergiusz SIENKOWSKI

Absolwent Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Zielonogórskiej (2001 r.) oraz Wydziału Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego (2003 r.). Obecnie asystent w Instytucie Metrologii Elektrycznej Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zajmuje się zagadnieniami związanymi z cyfrowym przetwarzaniem sygnałów i oceną niepewności pomiarów.



e-mail: s.sienkowski@ime.uz.zgora.pl

Streszczenie

Z zastosowaniem teorii kwantowania Widrowa opracowano wynikający z kwantowania model błędu w pomiarze wartości skutecznej sygnałów. Na podstawie opracowanego modelu zbadano wpływ kwantowania na dokładność estymacji wartości skutecznej. W artykule przedstawiono wyniki analiz wpływu kwantowania na dokładność estymacji wartości skutecznej sygnału sinusoidalnego, sygnałów losowych o rozkładach gaussowskim, równomiernym i trójkątnym oraz wybrane kombinacje tych sygnałów.

Słowa kluczowe: błąd wynikający z kwantowania w pomiarze wartości skutecznej.

Generalized model of quantization error in measurement of signal RMS value

Abstract

The model of the bias of the root mean square (RMS) value estimator was worked out with applying the Widrow theory of quantization. The influence of quantizing on the accuracy of the RMS value estimator was studied on the basis of this model. The main subjects of the research were: sinusoidal signal, Gaussian signal, uniformly distributed signal, triangular probability density function (PDF) signal and selected combinations of the studied signals. In the first paragraph Eq. (6) and (7) describing the RMS value estimator bias are presented. The bias of the RMS value estimator is given by Eq. (6). The normalized bias is given by Eq. (7). In the next paragraph the Eq. of the PDFs and the characteristic functions for deterministic and random signals are given. In the second paragraph the process of bias estimation in the RMS value measurements caused by quantization is described. The normalized biases of the RMS value estimator of selected random signals are given by Eq. (10), (14), (18) and shown in Fig. 1. The normalized biases of the RMS value estimators of sinusoidal signal with random signals are given by (21) and shown in Fig. 2.

Keywords: bias of the RMS value estimator.

1. Model błędu kwantowania w pomiarze wartości skutecznej

Komercyjne przetworniki A/C są kategoryzowane ze względu na skończoną długość słowa wyjściowego. Implementacja w przyrządach cyfrowych przetworników mających skończoną długość słowa, jest źródłem nieuniknionych błędów kwantyzacji. Przyczyną tych błędów jest stacjonarny proces przypadkowy, czyli stałe w czasie funkcjonowanie przetwornika A/C.

Jeżeli funkcja gęstości prawdopodobieństwa błędu kwantyzacji jest jednostajna [6], przetwornik A/C jest idealny w swoim działaniu, wszystkie możliwe błędy pomiędzy $-q/2$ a $q/2$ są równie prawdopodobne oraz błąd kwantyzacji $e_q = x_q - x$, to wartość skuteczną $RMS[x_q]$ sygnału x_q można obliczyć na podstawie wzoru

$$RMS[x_q] = \sqrt{E[x_q^2]} = \sqrt{E[x^2] + 2E[xe_q] + E[e_q^2]}, \quad (1)$$

gdzie q jest krokiem kwantowania, $E[x^2]$ - odpowiada wartości średniokwadratowej sygnału x . Ponadto wyrażenia $E[xe_q]$ i $E[e_q^2]$ można opisać zależnościami [1, 5]

$$E[xe_q] = \frac{q}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_x(v) \Big|_{v=\frac{2\pi}{q}i} \frac{(-1)^{i+1}}{i}, \quad (2)$$

$$E[e_q^2] = \frac{q^2}{12} + \frac{q^2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_x\left(\frac{2\pi}{q}i\right) \frac{(-1)^i}{i^2}, \quad (3)$$

gdzie Φ_x to funkcja charakterystyczna sygnału x [1, 6].

Twierdzenie (Widrowa)

Jeżeli funkcja charakterystyczna ma ograniczoną dziedzinę, tj.

$$\Phi_x(v) = 0 \text{ dla } |v| > \frac{2\pi}{q} - \varepsilon, \quad (4)$$

gdzie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią, to wszystkie istniejące momenty sygnału x mogą być wyznaczone z momentów skwantowanego sygnału x_q .

Zgodnie z teorią kwantowania [6, 7] w warunkach spełnienia założeń twierdzenia Widrowa słuszną jest zależność

$$RMS[x_q] = \sqrt{E[x^2] + \frac{q^2}{12}}, \quad (5)$$

łącząca wartość skuteczną sygnału x z jej estymatorem uzyskanym na podstawie sygnału skwantowanego x_q . Oznacza to, że podczas pomiaru wartości skutecznej sygnału x_q , źródłem błędów b są sytuacje, w których $E[xe_q] \neq 0$ oraz $E[e_q^2] \neq q^2/12$. Zgodnie z (1) i (5) błąd ten można opisać zależnością

$$b = \sqrt{E[x^2] + 2E[xe_q] + E[e_q^2]} - \sqrt{E[x^2] + \frac{q^2}{12}}. \quad (6)$$

Błąd b wyrażony w odniesieniu do $RMS[x] = \sqrt{E[x^2]}$ ma postać

$$\delta = \frac{b}{RMS[x]}. \quad (7)$$

2. Błędy kwantowania w pomiarze wartości skutecznej wybranych klas sygnałów

Istnieją sygnały, które spełniają zależność (5), chociaż nie można przypisać im nawet przybliżonego spełnienia warunków odwrotności według Widrowa [6, 7]. Takim sygnałem jest sygnał losowy n o trójkątnej funkcji gęstości prawdopodobieństwa

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{A_n} \left(1 - \frac{|t|}{A_n}\right), & |t| \leq A_n, \\ 0, & |t| > A_n \end{cases}, \quad (8)$$

gdzie A_n jest amplitudą sygnału. Sygnałowi temu odpowiada funkcja charakterystyczna, którą opisać można zależnością [3]

$$\Phi_n(v) = \frac{2 - 2 \cos(A_n v)}{A_n^2 v^2}. \quad (9)$$

Na podstawie wzorów (2) i (3) oraz (7) i (9) można otrzymać wyrażenie opisujące odpowiadający temu sygnałowi błąd δ_1

$$\delta_1 = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{A_n}{q} \right)^{-2} + \frac{12q}{A_n^2 \pi} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\Phi}_n(v) \Big|_{v=\frac{2\pi i}{q}} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{A_n}{q} \right)^{-2} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_n \left(\frac{2\pi i}{q} \right) \frac{(-1)^i}{i^2} \right\}^{1/2} - \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{A_n}{q} \right)^{-2} \right\}^{1/2} \quad (10)$$

Można wykazać, że dla

$$A_n = kq, \quad k \in N \setminus \{0\}, \quad (11)$$

błąd δ_1 przyjmuje wartość równą zero.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla sygnału n o rozkładzie normalnym, którego funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest postaci

$$p(t) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp\left(-t^2 / 2\sigma_n^2\right), \quad (12)$$

gdzie σ_n jest odchyleniem standardowym sygnału. Sygnałowi temu odpowiada funkcja charakterystyczna [1]

$$\Phi_n(v) = \exp\left(-0.5v^2\sigma_n^2\right). \quad (13)$$

Względny błąd δ_2 można dla tego sygnału wyrazić wzorem

$$\delta_2 = \left\{ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\sigma_n}{q} \right)^{-2} + \frac{2q}{\sigma_n^2 \pi} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\Phi}_n(v) \Big|_{v=\frac{2\pi i}{q}} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\sigma_n}{q} \right)^{-2} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_n \left(\frac{2\pi i}{q} \right) \frac{(-1)^i}{i^2} \right\}^{1/2} - \left\{ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\sigma_n}{q} \right)^{-2} \right\}^{1/2} \quad (14)$$

Można sprawdzić, że dla

$$0.5q \leq \sigma_n \leq q, \quad (15)$$

błąd δ_2 przyjmuje wartość bliską zeru ($\delta_2(\sigma_n = q) = -5.3 \cdot 10^{-9}$).

Analogiczną analizę można przeprowadzić dla sygnału n o prostokątnej funkcji gęstości prawdopodobieństwa

$$p(t) = \begin{cases} 1/2A_n, & |t| \leq A_n, \\ 0, & |t| > A_n \end{cases}, \quad (16)$$

gdzie $2A_n$ jest wartością międzyszczytową sygnału.

Funkcję charakterystyczną odpowiadającą temu sygnałowi możemy opisać zależnością [1]

$$\Phi_n(v) = \frac{\sin(A_n v)}{A_n v}, \quad (17)$$

natomiast błąd δ_3 wynikający z kwantowania sygnału n , można obliczyć na postawie wzoru

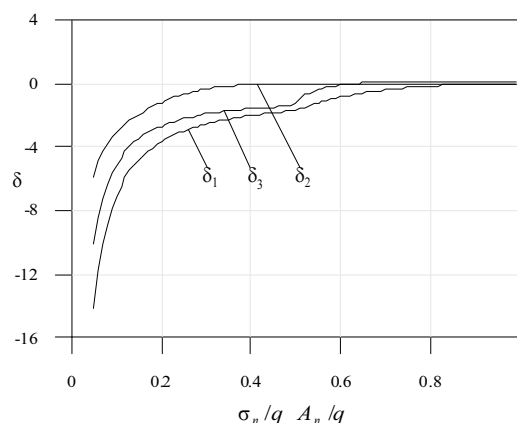
$$\delta_3 = \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{A_n}{q} \right)^{-2} + \frac{6q}{A_n^2 \pi} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\Phi}_n(v) \Big|_{v=\frac{2\pi i}{q}} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{A_n}{q} \right)^{-2} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_n \left(\frac{2\pi i}{q} \right) \frac{(-1)^i}{i^2} \right\}^{1/2} - \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{A_n}{q} \right)^{-2} \right\}^{1/2} \quad (18)$$

W przypadku sygnału losowego o rozkładzie równomiernym nie można znaleźć takiej amplitudy A_n dla której $\delta_3 = 0$. Można jednak łatwo sprawdzić, że dla

$$A_n = 0.5kq, \quad k \in N \setminus \{0\}, \quad (19)$$

$\Phi_n(v) = 0$ oraz $\dot{\Phi}_n(v) \neq 0$.

Na rys. 1 przedstawiono wykresy wynikające z kwantowania sygnału x błędów w pomiarze wartości skutecznej badanych sygnałów losowych.



Rys. 1. Względne błędy wynikające z kwantowania w pomiarze wartości skutecznej sygnału losowego o rozkładzie trójkątnym δ_1 , gaussowskim δ_2 , równomiernym δ_3

Fig. 1. Normalized biases of the RMS value estimator for triangular PDF signal δ_1 , Gaussian signal δ_2 and uniformly distributed signal δ_3

Rozważmy na koniec sygnał sinusoidalny x występujący w obecności sygnału losowego n . Funkcję charakterystyczną odpowiadającą sygnałowi sinusoidalnemu można wyrazić zależnością [1]

$$\Phi_x(v) = J_0(Av), \quad (20)$$

gdzie A to amplituda sygnału, J_0 to funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu 0.

Łączna funkcja charakterystyczna sygnałów x i n jest równa iloczynowi $\Phi_{x+n}(v) = \Phi_x(v)\Phi_n(v)$ funkcji charakterystycznych składowych.

Dla sygnału sinusoidalnego i sygnałów losowych o rozkładzie trójkątnym (21), gaussowskim (22) i rozkładzie równomiernym (23) słuszna jest zależność

$$\delta_{4,5,6} = \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left(\frac{A}{q} \right)^{-2} + \frac{4q}{A^2 \pi} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{x+n}(v) \Big|_{v=\frac{2\pi i}{q}} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{A}{q} \right)^{-2} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{x+n} \left(\frac{2\pi i}{q} \right) \frac{(-1)^i}{i^2} \right\}^{1/2} - \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left(\frac{A}{q} \right)^{-2} \right\}^{1/2} \quad (21)$$

Łączne funkcje charakterystyczne ze wzoru (21) i pochodne tych funkcji dla poszczególnych kombinacji sygnałów, można wyrazić wzorami

$$\Phi_{x+n}(v) = J_0(Av) \frac{2 - 2\cos(A_nv)}{A_n^2 v^2}, \quad (22)$$

$$\dot{\Phi}_{x+n}(v) = \left(AJ_1(Av) + \frac{2}{v} J_0(Av) \right) \frac{2\cos(A_nv) - 2}{A_n^2 v^2} + J_0(Av) \frac{2\sin(A_nv)}{A_n v^2} \quad (23)$$

$$\Phi_{x+n}(v) = J_0(Av) \exp(-0.5v^2\sigma_n^2), \quad (24)$$

$$\dot{\Phi}_{x+n}(v) = (-v\sigma_n^2 J_0(Av) - AJ_1(Av)) \exp(-0.5v^2\sigma_n^2), \quad (25)$$

$$\Phi_{x+n}(v) = J_0(Av) \frac{\sin(A_nv)}{A_nv}, \quad (26)$$

$$\dot{\Phi}_{x+n}(v) = \left(AJ_1(Av) - \frac{1}{v} J_0(Av) \right) \frac{\sin(A_nv)}{A_nv} + J_0(Av) \frac{\cos(A_nv)}{v}, \quad (27)$$

gdzie J_1 to funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu 1.

Można wykazać, że jeżeli $\Phi_n(v) = \dot{\Phi}_n(v) = 0$, to dla sumy sygnałów x i n błąd δ przyjmuje wartość równą zero.

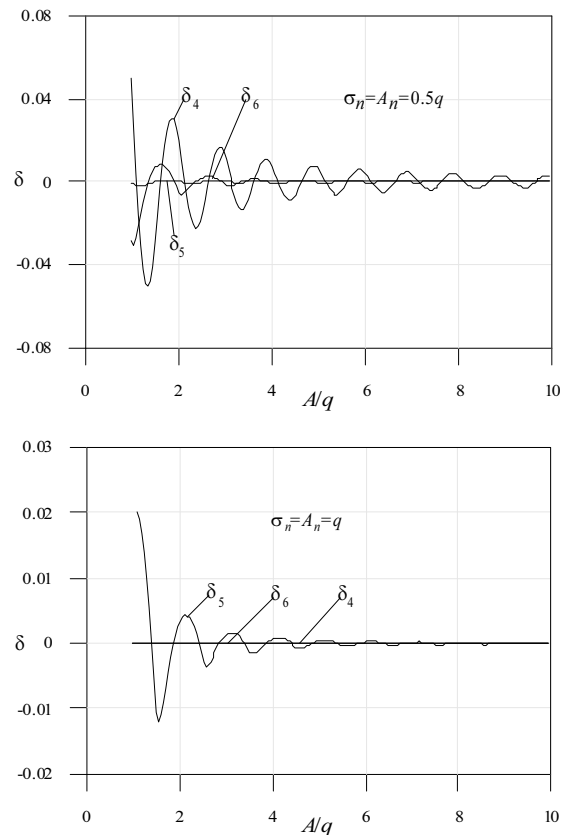
Sygnałowi losowemu n o rozkładzie trójkątnym nie można przypisać nawet przybliżonego spełnienia warunków odtwarzalności według Widrowa, ale łatwo wykazać, że dla sumy sygnałów x i n oraz dla $A_n = kq$, $k \in N \setminus \{0\}$ $\Phi_{x+n}(v) = \dot{\Phi}_{x+n}(v) = 0$ oraz $\delta_4 = 0$.

Na rys. 2 przedstawiono wykresy wynikające z kwantowania błędów w pomiarze wartości skutecznej sygnału sinusoidalnego występującego w obecności sygnału losowego o rozkładzie trójkątnym, gaussowskim i równomiernym. Wykresy sporządzono na podstawie wzoru (21).

3. Podsumowanie

Artykuł dotyczy problematyki wyznaczania funkcji opisujących obszar zmienności błędów wynikających z kwantowania, podczas pomiaru wartości skutecznej sygnału okresowego występującego w obecności sygnału losowego. Na podstawie teorii kwantowania Widrowa opracowano wyrażony wzorem (6) uogólniony model błędów w pomiarze wartości skutecznej, a następnie dokonując odpowiednich przekształceń analitycznych wyznaczono dla poszczególnych sygnałów, zależności umożliwiające obliczanie wartości tych błędów. Poszukiwanie funkcji opisujących obszar zmienności błędów zrealizowano dla sygnału sinusoidalnego oraz wybranych sygnałów losowych. Sprawdzono, że w pomiarze wartości skutecznej błąd wynikający z kwantowania jest tłumioną oscylacyjną funkcją amplitudy i kroku kwantowania, zanikającą szybciej dla sygnału z zakłóceniem niż dla sygnału niezakłóconego. Potwierdzono, że mierząc wartość skuteczną sumy sygnału zdeterminowanego i losowego o odpowiednio dobranej amplitu-

dzie lub odchyleniu standardowym, można sprowadzić do zera błąd wynikający z kwantowania, powstały w wyniku niespełnienia warunku odtwarzalności dla kwantowania.



Rys. 2. Względne błędy wynikające z kwantowania w pomiarze wartości skutecznej sumy sygnału sinusoidalnego i sygnałów losowych o rozkładzie trójkątnym δ_4 , gaussowskim δ_5 , równomiernym δ_6

Fig. 2. Normalized biases of the RMS value estimator for sinusoidal signal with triangular PDF signal δ_4 , Gaussian signal δ_5 and uniformly distributed signal δ_6

4. Literatura

- [1] Kollar I.: Bias of mean value and mean square value measurements based on quantized data, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol.43, no. 5, pp.733-739, 1994.
- [2] Lal-Jadziak J.: Wpływ kwantowania na dokładność estymacji wartości średniokwadratowej, PAK nr 7,8, 2002.
- [3] Lal-Jadziak J., Sienkowski S.: Modelowanie obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej wybranych klas sygnałów. PAK BIS, nr 53, 2007, s. 93-97.
- [4] Sienkowski S.: Wspomagana komputerowo analiza obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego. PAK BIS, nr 53, s. 97-101, 2007.
- [5] Sripad B.; Snyder D., A necessary and sufficient condition for quantization errors to be uniform and white, IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Process., vol. ASSP-25, no. 5, pp. 442-448, 1977.
- [6] Widrow B., Kollar I., Liu M.-C.: Statistical theory of quantization, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 45, no. 2, pp. 353-361, 1996.
- [7] Widrow B., Kollar I., Liu M.-C.: Quantization Noise - A Book on Uniform and Floating-Point Quantization, Department of Measurement and Information Systems, Budapest, 2006.