

Radosław KŁOSIŃSKI

UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii Elektrycznej

Zastosowanie MDFT do analizy widmowej sygnałów okresowych próbkowanych niesynchronicznie

Dr inż. Radosław KŁOSIŃSKI

Starszy wykładowca w Instytucie Metrologii Elektrycznej Wydziału Elektrotechniki Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego. Obszar zainteresowań naukowych to elektrotechnika teoretyczna, w szczególności układy o okresowo zmiennych parametrach oraz cyfrowe przetwarzanie sygnałów.



e-mail: r.klosinski@ime.uz.zgora.pl

Streszczenie

MDFT to modyfikowane DFT dające zdecydowaną redukcję przecieku widma i poprawę dokładności estymacji harmonicznych sygnałów okresowych próbkowanych niesynchronicznie. Przedstawione zostały idea, wyprowadzenie, źródła błędów oraz sposób i skutki stosowania okien sygnałowych. Zaprezentowano wyniki analizy widmowej wygenerowanego oraz rzeczywistego sygnału pokazujące możliwość wyznaczenia widma amplitudowego i fazowego za pomocą MDFT z dokładnością znacznie większą w porównaniu z m algorytmem DFT. MDFT może znaleźć zastosowanie do analizy sygnałów występujących w systemie elektroenergetycznym, gdzie naturalna zmienność częstotliwości utrudnia analizę.

Słowa kluczowe: modyfikowane DFT, analiza widmowa, niesynchroniczne próbkowanie, przeciek widma.

Application of the MDFT in spectral analysis of non-coherently sampled periodic signals

Abstract

The paper subject is the identification of periodic signal harmonics on the basis of samples in case of a non-coherent sampling. The modification of DFT is presented which leads to a distinct minimization of spectrum leakage effect and improvement in signal harmonics estimation accuracy. The modification consists in adjusting base functions frequencies of the Fourier series to frequencies of analyzed signal harmonics. The paper presents ideas, introduction, error analysis of the method and signal windowing effects for the modified discrete Fourier transform (MDFT). The presented examples indicate the possibility to determine amplitude and phase spectrums with higher accuracy in comparison to the classical DFT. Signal spectrum estimation by means of MDFT can be used for signal analysis in an electro-energetic system, where natural frequency variability hinders the analysis.

Keywords: modified DFT, spectrum estimation, non-coherent sampling, spectrum leakage effect.

1. Wstęp

W przypadku próbkowania równomiernego, koherentnego i zgodnego z założeniami twierdzenia o próbkowaniu, algorytm DFT pozwala na wyznaczenie widma sygnału z dokładnością zależną jedynie od błędów pomiaru i numerycznej reprezentacji liczb. Jeżeli jednak zestaw próbek branych do analizy nie obejmuje czasu stanowiącego całkowitą wielokrotność okresu sygnału, pojawia się przeciek widma powodujący znaczne błędy. Przyczyną tego zjawiska jest niedopasowanie pulsacji funkcji bazowych szeregu Fouriera do pulsacji składowych harmonicznych sygnału oraz uśrednianie w przedziale czasowym różnym od całkowitej wielokrotności okresu sygnału.

Powszechnie wykorzystywane metody zmniejszania skutków przecieku widma to stosowanie okien sygnałowych oraz zwiększanie rozdzielczości widma przez dopisywanie zerowych próbek. W celu zwiększenia dokładności wyznaczenia harmonicznych

stosuje się również interpolację obwiedni widma (tzw. interpolated FFT [1, 2]), metody korelacyjne (np. algorytm ESPRIT, [1, 3]), metodę Prony'ego [3] i inne.

Problemy z wyznaczaniem widma napięć i prądów oraz parametrów dotyczących jakości energii elektrycznej, za pomocą układów pomiarowych o stałej częstotliwości próbkowania, wynikają z naturalnej zmienności częstotliwości systemu energetycznego [4, 5]. Aby dokładniej zlokalizować harmoniczne w widmie i wyznaczyć ich amplitudę stosuje się również przepróbkowanie sygnałów pomiarowych, np. [5], lub wykorzystuje się transformację świergotową [6].

W tej pracy do identyfikacji harmonicznych sygnału próbkowanego niesynchronicznie wykorzystywane jest modyfikowane dyskretne przekształcenie Fouriera (MDFT). Idea modyfikacji polega na dopasowaniu pulsacji funkcji bazowych szeregu Fouriera do pulsacji analizowanego sygnału oraz na uśrednianiu w czasie jak najbliższym całkowitej wielokrotności okresu sygnału obejmującym niecałkowitą liczbę okresów próbkowania. W pracy [7] zastosowano tzw. korekcję końcową (end correction) do kompensacji różnicy między ostatnią próbką a rzeczywistym okresem mierzonego sygnału. Błąd uśredniania opartego na niecałkowitej liczbie okresów próbkowania analizowany jest w [8], natomiast zagadnienie stosowania okien sygnałowych na potrzeby MDFT jest przedmiotem prac [9, 10].

Wyprowadzenie MDFT oraz analiza błędów szczegółowo opisane zostały w [11, 12]. Wynika z nich, że błędy estymacji widma w przypadku niesynchronicznego próbkowania zależą od fazy początkowej analizowanego sygnału. W tej pracy przedstawione jest porównanie wyników stosowania DFT i MDFT do analizy widmowej sygnałów wieloharmonicznych na przykładzie sygnału sztucznie wygenerowanego oraz rzeczywistego prądu odbiornika nieliniowego mierzonego zgodnie z normą [13].

Analiza widmowa za pomocą MDFT wymaga wcześniejszej znajomości pulsacji podstawowej analizowanego sygnału. Sposób wyznaczenia tej pulsacji może być dowolny. W przykładach zamieszczonych artykule założono, że pulsacja jest znana.

2. Idea i właściwości MDFT

Zakłada się niesynchroniczne próbkowanie, tzn. iloczyn liczby próbek i okresu próbkowania nie pokrywa się z całkowitą wielokrotnością okresów sygnału:

$$NT_s \neq mT. \quad (1)$$

Natomiast spełniona jest równość:

$$N'T_s = mT, \quad (2)$$

gdzie N jest liczbą (całkowitą) próbek zebranych w czasie trwania całkowitej liczby m okresów sygnału, N' jest liczbą rzeczywistą określającą ilość okresów próbkowania przypadających na całkowitą wielokrotność okresów sygnału T .

Pulsacja podstawowa sygnału określona jest następująco:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N'T_s}, \quad (3)$$

Modyfikowane dyskretne przekształcenie Fouriera tym różni się od klasycznego DFT, że pomimo niekoherentnego próbkowania funkcje bazowe szeregu Fouriera są cosinusoidami o pulsacjach stanowiących całkowitą wielokrotność pulsacji podstawowej (3).

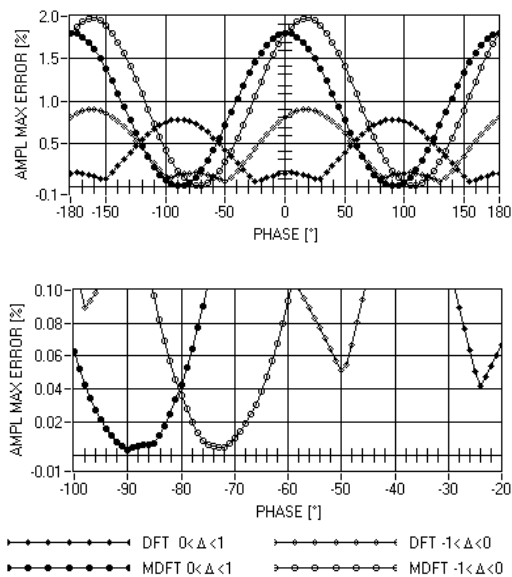
Równanie analizy MDFT ma postać:

$$c_k = \frac{1}{N'} \sum_{n=0}^{N'-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N'} kn} \quad (4)$$

Uzyskane w MDFT dopasowanie pulsacji powoduje znaczne ograniczenie zjawiska przecieku widma. Problem nadal stanowi błąd uśredniania. Analiza błędów metody, szczegółowo opisana w [10, 11] prowadzi do następujących wniosków. Aby uzyskać jak największą dokładność analizy za pomocą MDFT obliczenia należy realizować w oparciu o zestaw próbek w przybliżeniu obejmujący całkowitą wielokrotność okresów sygnału, tzn. liczba próbek N powinna być całkowitym zaokrągleniem ilości okresów próbkowania N' . Rozbieżność między tymi liczbami, definiowana jest jako:

$$\Delta = N - N' \quad (5)$$

Błąd estymacji amplitudy i fazy sygnału cosinusoidalnego próbkowanego niesynchronicznie zależy od fazy początkowej sygnału i jest najmniejszy dla $\varphi = \pm 90^\circ$, dla $0 \leq \Delta < 1$, co odpowiada sytuacji, gdy analizowany fragment sygnału cosinusoidalnego zaczyna się i kończy w miejscach przejścia przez zero.



Rys. 1. Zależność maksymalnych błędów estymacji amplitudy cosinusoidy dla DFT i MDFT (dla $N' \in [100; 105,5]$), od fazy początkowej dla $0 \leq \Delta \leq 1$ oraz $-1 \leq \Delta \leq 0$. U dołu powiększenie fragmentu wykresu górnego
Fig. 1. The dependency of cosine amplitude determination maximum error by means of the DFT and MDFT (for $N' \in [100; 105,5]$) on the cosine initial phase for $0 \leq \Delta \leq 1$ and $-1 \leq \Delta \leq 0$. The lower diagram is the enlargement of the upper diagram fragment

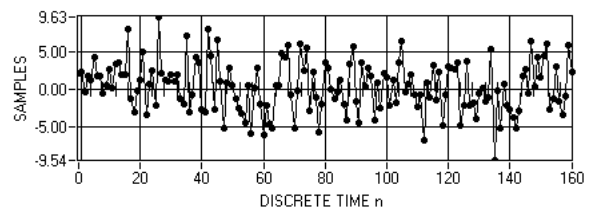
Na rysunku 1 pokazano zależność maksymalnych błędów amplitudy DFT i MDFT (dla $N' \in [100; 105,5]$), w funkcji fazy początkowej kosinusoidy, dla dwóch przypadków $0 \leq \Delta \leq 1$ oraz $-1 \leq \Delta \leq 0$. Na rysunku widać, że dla dodatnich Δ błędy amplitudy MDFT są najmniejsze dla fazy początkowej $\varphi = \pm 90^\circ$, natomiast dla ujemnych Δ maksymalne błędy amplitudy, w rozpatrywanym przykładzie, osiągają minima dla fazy początkowej $\varphi = -72^\circ$ lub $\varphi = 108^\circ$. Odpowiada to sytuacji, gdy zestaw próbek branych do analizy zaczyna się i kończy w okolicach przejścia sygnału przez zero. Można to interpretować tak, że największy wpływ na powstawanie błędów uśredniania mają próbki na początku i na końcu ciągu próbek branych do analizy, jeżeli te próbki mają małą wartość to błąd MDFT jest również mały. Aby uzyskiwać jak największą dokładność estymacji widma sygnałów o dominującej podstawowej harmonicznej, niezależnie się od jej fazy początkowej, można z ciągu próbek wybierać podciąg między przejściami

przez zero, zawierający próbki przypadające na całkowitą (w przybliżeniu) liczbę okresów analizowanego sygnału.

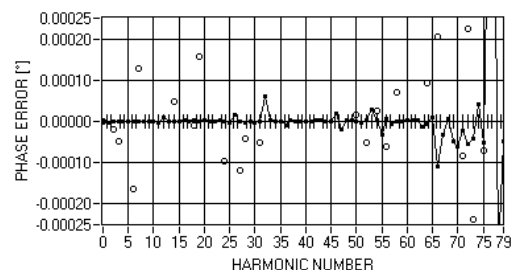
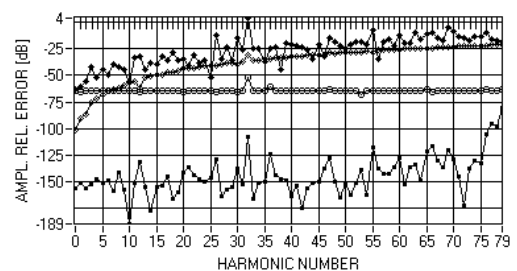
Do redukcji przecieku widma powszechnie stosowane są okna sygnałowe. Dzięki temu redukowane jest wzajemne zakłócanie sąsiadujących harmoniczných (tzw. short-range leakage [14]) jednak w przypadku precyzyjnej analizy widmowej nadal stanowi to problem. Zastosowanie okna sygnałowego powoduje zwiększenie znaczenia próbek znajdujących się w środku ciągu próbek kosztem zmniejszenia znaczenia próbek znajdujących się na początku i na końcu. Taka sytuacja jest korzystna dla MDFT ze względu na redukcję błędów uśredniania. Okazuje się jednak, że zastosowanie okna w zwykły sposób daje tylko częściową poprawę sytuacji. Aby w pełni wykorzystać zalety stosowania okna sygnałowego na potrzeby MDFT niezbędna jest jego synchronizacja z pulsacją. Zabieg ten powoduje, że zera charakterystyki widmowej okna sygnałowego przypadają na częstotliwości składowych harmoniczných sygnału i dzięki temu eliminowany jest wpływ listków bocznych charakterystyki widmowej okna, czyli znika problem wzajemnego zakłócania sąsiadujących harmoniczných. Jest to możliwe pomimo niesynchronicznego próbkowania dzięki synchronizacji uzyskiwanej w MDFT. Sytuacja staje się podobna do tej, gdy sygnał próbkowany koherentnie analizowany jest za pomocą DFT.

3. Porównanie wyników DFT i MDFT

Porównano błędy wyznaczenia amplitud oraz faz składowych harmoniczných sygnału, którego fragment przedstawia na rys. 2.



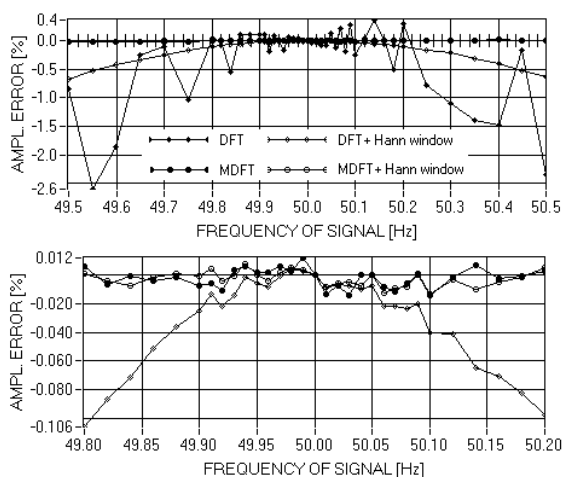
Rys. 2. Analizowany sygnał wieloharmoniczny
Fig. 2. The analyzed multiharmonic signal



Rys. 3. Błędy estymacji widma sygnału wieloharmonicznego, przedstawionego na rys. 2., próbkowanego niesynchronicznie
Fig. 3. Spectrum estimation errors of the non-coherently sampled multiharmonic signal presented in fig. 2

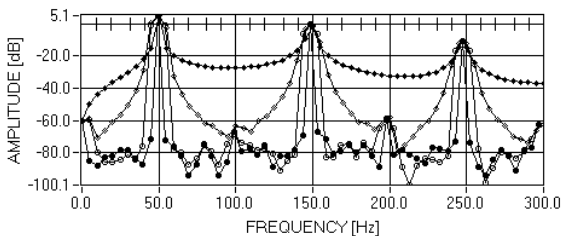
Symulowany sygnał uzyskano jako złożenie 80 harmoniczných o amplitudach i fazach wybranych losowo (rozkład równomierny odpowiednio z przedziałów $[0,1]$ i $[-180^\circ, 180^\circ]$). Sygnał o częstotliwości podstawowej $f=49.7$ Hz próbkowano niesynchronicznie z częstotliwością $f_s=8$ kHz. Rys. 3 pokazuje wyniki analizy przeprowadzonej na podstawie próbek pobranych z ok. 8 okresów sygnału. Wyznaczano jedynie faktyczne harmoniczne sygnału (co ósmy prążek widma). Dzięki temu szerszy, tzw. listek główny widma zastosowanego okna Hanna, nie miał wpływu na wartości harmoniczných wyznaczanych za pomocą MDFT. Najlepsze wyniki uzyskano właśnie dla MDFT z zsynchronizowanym oknem Hanna. Rysunek 3 nie obejmuje wykresów błędów wyznaczenia faz za pomocą DFT i tylko niektóre błędy faz wyznaczonych za pomocą MDFT z niesynchronizowanym oknem ze względu na zbyt duże wartości w stosunku do przyjętej skali.

Przeprowadzono również eksperymenty polegające na wyznaczeniu widma prądu odbiornika nieliniowego w postaci układu prostowniczego obciążonego równoległym połączeniem rezystora i kondensatora. Pomiar prądu polegał na akwizycji próbek spadku napięcia na rezystorze wzorcowym za pomocą 16 bitowego przetwornika A/C z częstotliwością próbkowania 100 kHz. Analizę widmową realizowano za pomocą DFT w oparciu o 20000 próbek, a za pomocą MDFT w oparciu o próbki przypadające na 10 okresów sygnału, tj. od 19800 do 20202. Zależność błędów wyznaczenia amplitudy pierwszej harmoniczných prądu od częstotliwości podstawowej sygnału przedstawia rys. 4.



Rys. 4. Zależność błędów wyznaczenia amplitudy pierwszej harmoniczných prądu od częstotliwości podstawowej sygnału

Fig. 4. The dependency of the current first harmonic amplitude determination on the basic frequency of the signal



Rys. 5. Fragment widma prądu uzyskany dla częstotliwości sygnału 49.5 Hz
Legenda jak na rys. 4

Fig. 5. A part of the current spectrum obtained for the signal frequency 49.5 Hz
See legend in fig. 4

Jako wzorzec przyjęto wartość wyznaczoną za pomocą DFT dla częstotliwości sygnału wynoszącej 50 Hz, czyli dla przypadku koherentnego próbkowania. Jak widać na rysunku, uzyskany błąd amplitudy dla MDFT jest praktycznie niezależny stopnia rozsynchronizowania,

czyli od częstotliwości badanego sygnału. Przy tak dużej liczbie analizowanych próbek, dla wartości tego błędu praktycznie nie ma znaczenia stosowanie okna Hanna. Na rys. 5 przedstawiono obraz fragmentu widma uzyskany dla częstotliwości sygnału 49.5 Hz. Na uwagę zasługuje duża selektywność MDFT.

4. Wnioski

W pracy przedstawiono ideę, właściwości oraz źródła błędów MDFT dającego większą, w porównaniu z DFT, dokładność estymacji widma sygnału okresowego próbkowanego niekoherentnie. Zwrócono uwagę na słabo akcentowany w literaturze fakt, że błędy estymacji widma sygnałów próbkowanych niekoherentnie zależą od fazy początkowej dominującej harmoniczných. MDFT może znaleźć zastosowanie do analizy sygnałów występujących w systemie elektroenergetycznym, gdzie naturalna zmienność częstotliwości utrudnia wyznaczanie parametrów związanych z jakością energii elektrycznej za pomocą systemów pomiarowych o stałej częstotliwości próbkowania. Wady MDFT to potrzeba znajomości częstotliwości analizowanego sygnału (co nie jest dużą uciążliwością) oraz brak możliwości implementacji szybkiego algorytmu podobnego do FFT.

5. Literatura

- [1] I. Santamaria, C. Pantaleon, J. Ibanez: A Comparative Study of High-Accuracy Frequency Estimation Methods. *Mechanical Systems and Signal Processing* (2000), 14(0), Academic Press 2000.
- [2] J. Schoukens, R. Pintelon, H. Van Hammer: The Inerpolated Fast Fourier Transform: A Comparative Study. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 41, no. 2, April 1992.
- [3] A. Bracale, G. Carpinelli, R. Langella, A. Testa: Accurate Methods for signal Processing of Distorted Waveforms in Power Systems. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2007.
- [4] Z. Staroszczyk: Power system non-stationarity and accurate power system identification procedures, *Proceedings of the ICHQP2002*, Rio de Janeiro, Brazil, Oct. 6-9, 2002.
- [5] D. Borkowski: On-Line Instantaneous Frequency Estimation And Voltage/Current Coherent Resampling Method. *Metrology and Measurement Systems*, vol. XII, No 1/2006.
- [6] K. Duda: THD measurement method for electric power systems based on chirp-z transform. *PAK*, vol. 53. No 9bis/2007.
- [7] G. N. Stenbakken, "A Wideband Sampling Wattmeter," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-103, no. 10, pp. 2919-2925, October 1984.
- [8] Lu Zu-Liang: "An Error Estimate for Quasi-Integer-Period Sampling and an Approach for Increasing Its Accuracy", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 37, no. 2, 1988.
- [9] D.J. Nyarko, K.A. Stromsmoe: „A New Approach to the Estimation of Harmonics of Digitized Periodic Waveforms”, *IEEE WES-CANEX'1995 Conference*.
- [10] D.J. Nyarko, K.A. Stromsmoe: „A Modified DFT for Improved Accuracy in Harmonic Measurements of Periodic Waveforms”, *Canadian Conference on Electrical and Computer Eng.*, vol. 2, 1996.
- [11] R. Kłosiński: Modyfikacja dyskretnego przekształcenia Fouriera w celu dokładniejszego wyznaczenia widma. *PAK*, nr 6/2006.
- [12] R. Kłosiński: Identyfikacja harmoniczných sygnału okresowego na podstawie próbek za pomocą modyfikowanego dyskretnego przekształcenia Fouriera. *PAK*, nr 10/2006.
- [13] Kompatybilność elektromagnetyczna (EMC). Część 4-7: Metody badań i pomiarów. PN-EN 61000-4-7. PKN, Warszawa 2007.
- [14] D. Agrez: Improving Phase Estimation With Leakage Minimization. *IEEE Trans. on Instr. and Meas.*, vol 54, NO.4, Aug. 2005.