

Dariusz JANECKI, Stanisław ADAMCZAK, Krzysztof STĘPIEŃ
POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA W KIELCACH, WYDZIAŁ MECHATRONIKI I BUDOWY MASZYN

Calculation of the associated feature for barrel- and saddle-shaped cylindrical elements

Dr hab. inż. Dariusz JANECKI

Studia wyższe na Wydziale Elektroniki Politechniki Warszawskiej ukończył w 1981, a w 1996 obronił tam pracę doktorską. W 1996 obronił pracę habilitacyjną w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN. Obecnie pracuje na stanowisku profesora w Politechnice Świętokrzyskiej i jest kierownikiem Zakładu Informatyki i Sterowania. Zainteresowania naukowe obejmują teorię sterowania ze szczególnym uwzględnieniem metod identyfikacji i sterowania adaptacyjnego oraz matematyczne podstawy metrologii powierzchni.

e-mail: djanecki@tu.kielce.pl



Prof. dr hab. inż. Stanisław ADAMCZAK

Jest Dziekanem Wydziału Mechatroniki i Budowy Maszyn Politechniki Świętokrzyskiej oraz kierownikiem Katedry Technologii Mechanicznej i Metrologii na tym wydziale. Jego zainteresowania naukowe obejmują podstawy metrologii i metrologię wielkości geometrycznych. Jest członkiem wielu organizacji i stowarzyszeń naukowych, m.in. Komitetu Metrologii i Aparatury Naukowej PAN oraz prezesem Sekcji Metrologii SIMP. W kwietniu 2008 r. wybrany na Rektora Politechniki Świętokrzyskiej.

e-mail: adamczak@tu.kielce.pl



Dr inż. Krzysztof STĘPIEŃ

Dr inż. Krzysztof Stępień jest adiunktem w Katedrze Technologii Mechanicznej i Metrologii Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach. W swoich pracach zajmuje się zagadnieniami podstaw metrologii i pomiarów wielkości geometrycznych, a w szczególności pomiarami zarysów okrągłości i walcowości. Jest współautorem 37 prac prezentowanych w czasopiśmie krajowych i zagranicznych oraz na konferencjach międzynarodowych.

e-mail: kstepien@tu.kielce.pl



In this paper surfaces, whose generatrix is the fragment of the circle will be analyzed. Two types of such surfaces will be considered: a barrel shaped surface (see Fig. 1a) described by the equation

$$R_n(z) = r_c + \sqrt{R_c^2 - (z - z_c)^2} \quad (1)$$

and a saddle shaped one (See Fig. 1b) described by the equation

$$R_n(z) = r_c - \sqrt{R_c^2 - (z - z_c)^2} \quad (2)$$

Abstract

Accurate measurement of irregularities of the geometrical surface structure requires mathematical definition of relevant reference surface, which is called, according to the newest terminology, an associated surface. The surface is the reference feature in relation to which appropriate surface parameters are calculated. Frequently, the least squares or minimum zone cylinders have been used as associated features in measurements of cylindricity. The associated feature which is an ideal cylinder is not suitable for measuring elements that are not nominally cylindrical but for example barrel- or saddle-shaped. The paper describes the problem of calculation of the associated feature for barrel- or saddle-shaped surfaces.

Keywords: associated surface, form deviation, barrel, saddle.

1. Introduction

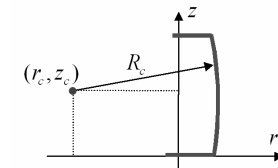
Accurate measurement of irregularities of the geometrical surface structure requires mathematical definition of relevant reference surface, which is called according to the newest terminology, an associated surface [1, 2]. The surface is the reference feature in relation to which appropriate surface parameters are calculated. In cylindricity measurements, the least squares or minimum zone cylinders have mostly been used as associated features [3]. However, an ideal cylinder cannot be employed as an associated feature when measuring elements are not nominally cylindrical but for example barrel- or saddle-shaped. This paper is concerned with new methods of calculation of the associated feature for barrel- or saddle-shaped surfaces.

2. Associated surfaces

Let us consider Cartesian coordinate system xyz and cylindrical coordinate system associated to the system xyz . Let coordinates of the cylindrical coordinate system be described by sets of three numbers (r, φ, z) . We will consider rotary surface, whose generatrix can be described by the following equation:

$$r = R_n(z), \quad z \in [0, H]$$

a)



b)

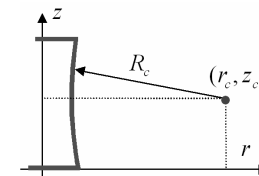


Fig. 1. Mathematical description of the associated surface: a) a barrel shaped surface, b) a saddle shaped surface

As we can see, for $z_p = z_c$ radius of the barrel reaches its maximum and equals $R_o = r_c + R_c$. Moreover, for $z_p = z_c$ radius of the saddle shaped surface reaches its minimum, too and equals $R_o = r_c - R_c$. Point (r_c, z_c) is the centre of the circle containing the fragment of the circle (1) and circle (2).

In Fig. 2 views of typical barrel and saddle shaped surfaces are presented.

Let us assume that the workpiece is lying on the measuring table of the device for cylindricity measurements. Let us consider another Cartesian coordinate system $X'Y'Z'$ and cylindrical coordinate system associated to the Cartesian coordinate system. The Z' axis of the cylindrical coordinate system coincides the axis of the measuring table or spindle. If position of the axis Z' is approximately the same as the position of the Z axis we can assume that dependence between coordinates (r', φ', z') in the system associated to the measuring table and coordinates (r, φ, z) in the system associated to the workpiece can be written as

follows: $r' = r - e_x \cos \varphi - e_y \sin \varphi - d_x z \cos \varphi - d_y z \sin \varphi$, $\varphi' = \varphi$, $Z' = Z$. Parameters e_x, e_y, d_x, d_y define mutual location of axes Z' and Z [2].

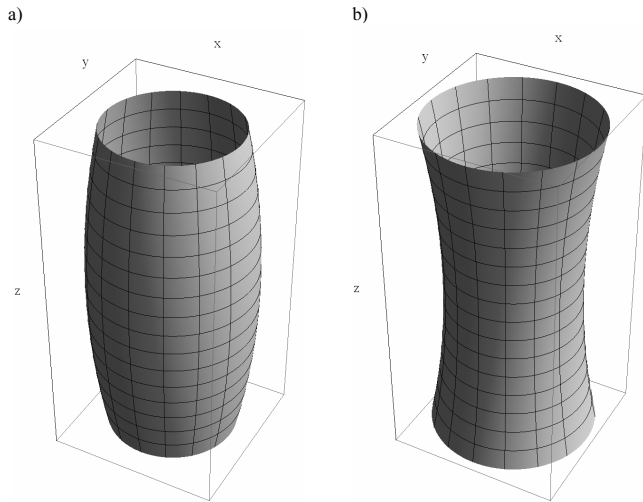


Fig. 2. Graphical representation of considered surfaces: a) barrel, b) saddle

Let $(\Delta r_i', \varphi_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, M$ be the series of recorded samples related to relevant points on the surface of the workpiece. Because measurements of the radius change are relative, therefore in order to accent this we replace symbol r_i' with $\Delta r_i'$. Coordinates (φ_i, z_i) of the samples depend on measurement method applied. In cylindricity measurements typical measurement methods are: cross-sections method, longitudinal sections method, “bird-cage” method and spiral trace method. As it was previously written, in order to calculate deviations from the nominal surface, so-called associated (reference) surface should be determined at first. Associated surface has shape responding the shape of nominal surface and it is appropriately fitted to measurement data. Associated surfaces are usually calculated by the least squares or minimum zone method. It should be noted that method of the radius change measurement is the relative method. Therefore, as a nominal surface we should consider whole group of surfaces described by the formula $r = R_n(z) + c$, where c is constant.

In the next sections of the paper the method allowing calculation of barrel and saddle shaped associated surfaces will be described. The method consists of three steps. At first the shape of generatrix is approximated by the polynomial of relevant order. The second step is calculation of approximated values of generatrix parameters R_c, z_c on the basis of analytical equations. In the last step values calculated in step two become the input parameters in the iterative Gauss-Newton procedure [3].

3. Algorithm for the calculation of the barrel and saddle shaped associated surfaces

Let us assume that obtained series of samples, whose coordinates in the cylindrical coordinate system associated to the measuring table, are equal $(\Delta r_i, \varphi_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, M$ [4, 5]. Measurements of radius change are relative, thus we can calculate only surface parameters R_c and z_c . Parameters of the reference surface we can calculate using the least squares method by minimization of the indicator

$$J(r_c, R_c, z_c, e_x, e_y, d_x, d_y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M h_i(r_c, R_c, z_c, e_x, e_y, d_x, d_y)^2 \quad (3)$$

where

$$h_i(r_c, R_c, z_c, e_x, e_y, d_x, d_y)^2 = r_c + \sqrt{R_c^2 - (z_i - z_c)^2} - \Delta r_i + e_x \cos \varphi_i + e_y \sin \varphi_i + d_x z_i \cos \varphi_i + d_y \sin \varphi_i \quad (4)$$

Function h_i is not linear. Therefore, for minimization of the indicator J the Gauss-Newton algorithm can be used. This algorithm requires knowledge of sufficiently accurate evaluations of input parameters. However, such evaluation is often not available (for example if nominal radius R_c is very large). In such cases development of the method allowing good preliminary evaluation of parameters R_c and z_c is required. In the next section procedure of calculation of reference surface parameters consisting of three steps is presented. The first two steps allow calculation of good evaluations of parameters. The third step is the Gauss-Newton procedure.

3.1. Step 1

Let us calculate parameters of regression surface and approximation of the function $R_n(z)$ by the polynomial of relevant order [2].

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \quad (5)$$

Thus, the reference surface will be described by

$$R_r(\varphi, z) = p(z) - e_x \cos \varphi - e_y \sin \varphi - d_x z \cos \varphi - d_y z \sin \varphi = w^T \theta \quad (6)$$

Obviously, we can apply another method of approximation. For example, in order to ensure good conditions of the task, we can replace series $\{z^j\}$ with relevant Legendre or Tchebyshev polynomials [6]. Referring to the least squares criterion, optimum solution will be calculated from the formula:

$$\theta = \left(\sum_{i=1}^M w_i w_i^T \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^M w_i v_i \right), \quad v_i = \Delta r_i, \quad w_i = \begin{bmatrix} 1 & z_i & \dots & z_i^n & -\cos \varphi_i & \dots & -z_i \sin \varphi_i \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

In order to check quality of approximation by described method, computer simulations were performed. The simulations allowed to select appropriate approximation order.

Assuming that surface axis coincides axis of rotation we can calculate parameters of the polynomial $p(z)$ by the minimization of the integral:

$$\int_0^H (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n - R_n(z))^2 dz \quad (8)$$

For simulation parameters: $H = 20$ mm, $R_c = 50$ mm, $z_c = 10$ mm, $r_c = 45$ mm and for the degree of the approximation polynomial $n = 2$ following values of approximation parameters were obtained:

$$a_0 = 3,99216, \quad a_1 = 0,201743, \quad a_2 = -0,0100872.$$

Accordingly, for the same simulation parameters but for the approximation by the polynomial of the 4th degree, following approximation coefficients values were obtained:

$$a_0 = 3,98981, a_1 = 0,204093, a_2 = -0,0106159, \\ a_3 = 0,0000411, a_4 = -1,02803 \times 10^{-6}.$$

Comparison of obtained approximation coefficients show that approximation of 2nd order is sufficient.

3.2. Step 2

Let us notice that points lying on the nominal surface (r, z) fulfill the condition

$$(z - z_c)^2 + (r - r_c)^2 = R_c^2. \quad (9)$$

It should be noted that $z = z_p$. Thus, transforming equation (9) we can written it in the following form

$$(z^2 + R^2) = (R_c^2 - r_c^2 - z_c^2) + 2zz_c + 2rr_c \quad (10)$$

and then in the linear form

$$v = w^T \mathcal{G}, \quad v = (z^2 + r^2), \quad w = [1 \quad 2z \quad 2r]^T, \\ \mathcal{G} = [(R_c^2 - r_c^2 - z_c^2)z_c r_c]^T. \quad (11)$$

If we assume that points (r, z) approximately fulfill dependence

$$r_p = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \quad (12)$$

then we can calculate approximate values \mathcal{G} by minimization of the indicator

$$J = \int_0^H (v - w^T \mathcal{G})^2 dz, \quad (13)$$

and then we obtain

$$\mathcal{G} = \left(\int_0^H w w^T dz \right)^{-1} \left(\int_0^H w v dz \right). \quad (14)$$

So, parameters \mathcal{G} can be calculated analytically using approximation (5).

After developing equations allowing approximation of 2nd and 4th order and after performing calculations we obtain following results:

- coefficients of the approximation of 2nd order:

$$a_0 = 3,99215, a_1 = 0,201746, a_2 = -0,0100873,$$

- coefficients of the approximation of the 4th order:

$$a_0 = 3,98981, a_1 = 0,204093, a_2 = -0,0106159, \\ a_3 = 0,0000411, a_4 = -1,02803 \times 10^{-6}.$$

Comparison of coefficients values shows that approximation of 4th order allows obtaining accurate results.

3.3. Step 3

In step three we apply Gauss-Newton method starting from the values $(r_c, R_c, z_c, e_x, e_y, d_x, d_y)$ obtained in the previous two steps. Partial derivatives of the function (4) written as relevant elements of the vector w_i are following

$$w_i = \left[1, \frac{R_c}{\sqrt{R_c^2 - (z - z_c)^2}}, \frac{z - z_c}{\sqrt{R_c^2 - (z - z_c)^2}}, \cos \varphi, \sin \varphi, z \cos \varphi, z \sin \varphi \right] \quad (15)$$

Then we apply following procedure:

1. On the basis of steps one and two we define input parameters values

$$\chi = [r_c, R_c, z_c, e_x, e_y, d_x, d_y]^T$$

2. We calculate the corrections:

$$\Delta \chi = \left(\sum_{i=1}^M w_i w_i^T \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^M w_i v_i \right),$$

$$w_i = \left[1, \frac{R_c}{\sqrt{R_c^2 - (z - z_c)^2}}, \frac{z - z_c}{\sqrt{R_c^2 - (z - z_c)^2}}, \cos \varphi, \sin \varphi, z \cos \varphi, z \sin \varphi \right]$$

$$v_i = h_i(r_c, R_c, z_c, e_x, e_y, d_x, d_y).$$

We assume $\chi := \Delta \chi + \chi$ and if the correction $\Delta \chi$ is sufficiently small we stop, if not, we go back to the point 2.

4. Verification of the algorithm

4.1. Input parameters

In order to verify developed algorithm practically, following barrel shaped profile was considered:

$$R_c(z) = r_c + \sqrt{R_c^2 - z(z - z_c)^2}.$$

Following barrel parameters: $H = 20$ mm, $R_c = 50$ mm, $z_c = 12$ mm, $r_c = -45$ mm and unknown position of the axis of cylindrical surface: $e_x = 0.01$ μ m, $e_y = -0.01$ μ m, $d_x = 0.01/H$ μ m, $d_y = 0.02/H$ μ m were assumed.

The data set was generated assuming that samples are distributed randomly in the area

$$(\varphi, z) = [0, \pi] \times [0, H/2] \cup [\pi, 2\pi] \times [H/2, H].$$

Diagram of the sampling points in the coordinate system associated to the workpiece is presented in Fig. 3.

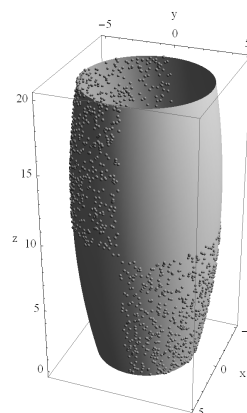


Fig. 3. Diagram of the sampling points in the coordinate system associated to the workpiece

4.2. Simulation results

Calculations were performed in three stages responding to consecutive steps of the algorithm described in Section 3. In Fig. 4 diagram of difference between the datum profile and the profile obtained after conducting the first step of the algorithm is presented.

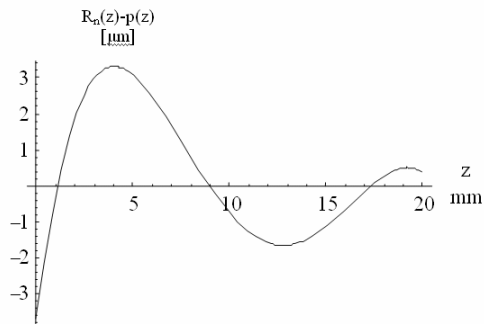


Fig. 4. Difference between the datum profile and the profile obtained after conducting the first step of the algorithm

As we can see in Fig. 4, the maximum value of the difference after performing the first step of the algorithm equals about 3.1 μm .

Figure 5 presents the difference between the datum profile and the profile obtained in the second step of the algorithm.

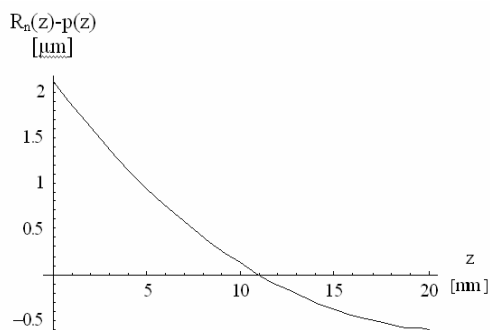


Fig. 5. Difference between the datum profile and the profile obtained after conducting the second step of the algorithm

As was shown in Fig. 5, the maximum value of the difference between the profiles decreased from 3.1 μm to 2.1 μm after conducting the second step of the algorithm.

Figure 6 presents the difference between the datum profile and the profile obtained in the last step of the algorithm (first iteration).

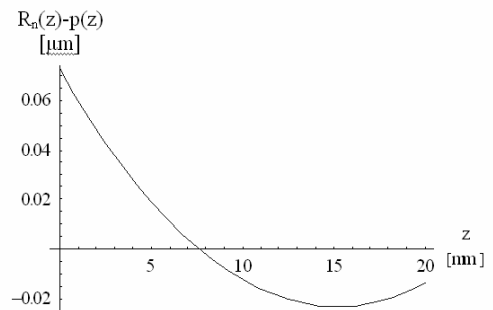


Fig. 6. Difference between the datum profile and the profile obtained after conducting the last step of the algorithm (first iteration)

Analyzing diagram shown in Fig. 6, we can conclude that the maximum difference between datum profile and profile after approximation equals about 0.07 μm . Therefore we can assume that after conducting only one iteration of the third step of the algorithm we practically obtain accurate parameters values.

5. Conclusions

Results of investigations described in the previous section show that after conducting first iteration of the third step of the algorithm we obtain accurate parameters of associated surface. In order to investigate the algorithm more accurately additional simulations were performed. Their results proved that consecutive iterations did not cause significant increase of approximation quality and conducting only one iteration is sufficient. One can notice that obtained parameters values are not exactly the same as input parameters. This is the reason of the fact that model of dependences between the coordinates in the system fixed to the workpiece and coordinates in the system fixed to the table used for generating measurement data was not linear, but method of calculation of the parameters presented in this paper is based on the linear model. In order to obtain higher accuracy more precise centering and leveling of the workpiece should be applied.

The work was presented at the IV. International Congress on Precision Machining – ICPM 2007, Sandomierz-Kielce, September 2007.

Obliczanie elementu skojarzonego dla obrotowych części maszyn z odchyłką baryłkowości i siodłowości

Streszczenie

Dokładny pomiar struktury geometrycznej powierzchni wymaga matematycznego zdefiniowania odpowiedniej powierzchni odniesienia, zwanej zgodnie z najnowszą terminologią, powierzchnią skojarzoną. Powierzchnia taka stanowi element odniesienia, względem którego obliczane są odpowiednie jej parametry. W pomiarach odchyłek walcowości najczęściej stosowane są walce skojarzone metodą najmniejszych kwadratów lub minimalnej strefy. Element skojarzony, którym jest idealny matematycznie walec nie jest jednak odpowiedni dla części maszyn, które nominalnie cechują się odchyłką baryłkowości lub siodłowości. Niniejszy artykuł dotyczy zagadnienia obliczenia elementu skojarzonego dla powierzchni baryłkowych i siodłowych.

Słowa kluczowe: powierzchnia skojarzona, odchyłka kształtu, baryłkowość, siodłowość.

1. Wstęp

Dokładny pomiar błędów struktury geometrycznej powierzchni wymaga matematycznego zdefiniowania odpowiedniej powierzchni odniesienia, zwanej zgodnie z najnowszą terminologią, powierzchnią odniesienia [1, 2]. Powierzchnia taka stanowi element odniesienia, względem którego obliczane są odpowiednie parametry.

W pomiarach walcowości, najczęściej stosowanymi elementami skojarzonymi są walce obliczone metodą najmniejszych kwadratów lub metodą minimalnej strefy [3]. Jednak, idealny matematycznie walec nie jest odpowiednim elementem skojarzonym w przypadku części maszyn, które nie jest nominalnie walcowe, lecz cechują się np. odchyłką baryłkowości lub siodłowości.

2. Powierzchnie skojarzone

Rozważmy kartezjański układ współrzędnych xyz i związany z nim cylindryczny układ współrzędnych $r\varphi z$. Współrzędne punktów w cylindrycznym układzie współrzędnych będą opisane za pomocą trójki liczb (r, φ, z) . Rozważmy także powierzchnię obrotową, której tworząca jest opisana za pomocą poniższej zależności:

$$r = R_n(z), \quad z \in [0, H]$$

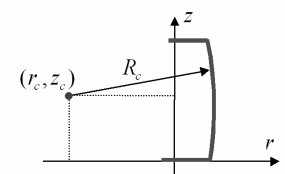
Niniejsza praca dotyczy powierzchni, których tworzące stanowią odcinek okręgu. Można rozważyć dwa typy takich powierzchni: powierzchnię cechującą się odchyłką baryłkowości (patrz rys. 1a) opisaną zależnością:

$$R_n(z) = r_c + \sqrt{R_c^2 - (z - z_c)^2} \quad (1)$$

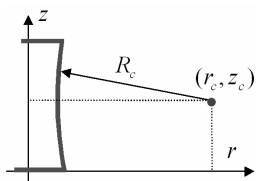
oraz powierzchnię cechującą się odchyłką siodłowości (patrz rys. 1b)) opisaną zależnością

$$R_n(z) = r_c - \sqrt{R_c^2 - (z - z_c)^2} \quad (2)$$

a)



b)



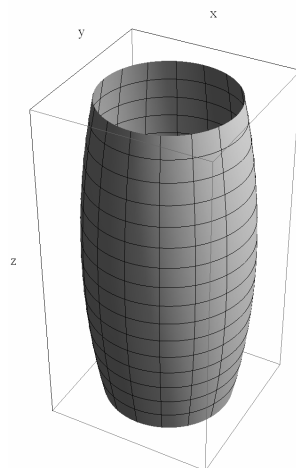
Rys. 1. Matematyczny opis powierzchni skojarzonej: a) baryłkowej, b) siodłowej

Jak widać, dla $z_p = z_c$ promień baryłkowości osiąga maksimum i wynosi $R_o = r_c + R_c$. Ponadto, również dla $z_p = z_c$ wartość minimalną osiąga promień siodłowości i wynosi $R_o = r_c - R_c$. Punkt (r_c, z_c) stanowi środek okręgu zawierającego odcinek okręgu (1) i okręgu (2). Na rysunku 2 przedstawiono typową powierzchnię baryłkową oraz siodłową.

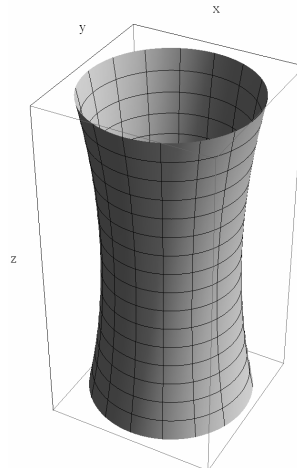
Załóżmy że przedmiot cylindryczny umieszczony jest na stole pomiarowym przyrządu do pomiaru walcowości. Rozważmy kolejny układ współrzędnych kartezjańskich $X'Y'Z'$ i odpowiadający mu układ współrzędnych cylindrycznych związany ze stołem tak, że oś Z' pokrywa się z osią obrotu stołu lub wrzeciona. Jeżeli położenie osi Z' niewiele odbiega od położenia osi Z , to możemy przyjąć, że zależność pomiędzy współrzędnymi punktu (r', φ', z') w układzie związanym ze stołem pomiarowym, a współrzędnymi punktu

(r, φ, z) w układzie związanym z przedmiotem jest następujący $r' = r - e_x \cos \varphi - e_y \sin \varphi - d_x z \cos \varphi - d_y z \sin \varphi$, $\varphi' = \varphi$, $Z' = Z$. Parametry e_x, e_y, d_x, d_y definiują wzajemne położenie osi Z' i Z [2].

a)



b)



Rys. 2. Graficzne przedstawienie analizowanych powierzchni: a) baryłkowej, b) siodłowej

Niech $(\Delta r_i', \varphi_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, M$ będzie ciągiem zarejestrowanych próbek pomiarowych odpowiadającym wybranym punktom powierzchni przedmiotu. Ponieważ pomiary promienia mają charakter względny, dla podkreślenia tego faktu w miejsce r_i' zastosowano oznaczenie $\Delta r_i'$. Współrzędne próbek (φ_i, z_i) zależą od zastosowanej metody pomiarowej. Przykładowo stosowane są metody przekrojów poprzecznych, wzdłużnych, kłatki, spirali.

W celu oceny odstępstwa mierzonej powierzchni od powierzchni nominalnej definiuje się tzw. powierzchnię odniesienia. Jest to powierzchnia o kształcie odpowiadającym kształtowi powierzchni nominalnej odpowiednio dopasowana do danych pomiarowych. Do wyznaczenia powierzchni odniesienia zazwyczaj stosuje się kryterium najmniejszej sumy kwadratów lub kryterium najmniejszej strefy. Należy pamiętać, że ze względu na względny charakter pomiaru promienia mówiąc o powierzchni nominalnej tak naprawdę mamy na myśli całą rodzinę powierzchni, opisanych zależnością $r = R_n(z) + c$, gdzie c jest pewną stałą.

W dalszej części pracy zostanie szczegółowo opisana metoda obliczania parametrów powierzchni odniesienia dla elementów cechujących się baryłkowością lub siodłowością. Metoda składa się z trzech kroków. W pierwszym wyznaczana jest aproksymacja równania tworzącej za pomocą wielomianu odpowiedniego rzędu. W kroku drugim na podstawie wyprowadzonych zależności analitycznych wyznaczane są przybliżone oceny parametrów tworzącej R_c, z_c . W kroku trzecim parametry te są parametrami początkowymi iteracyjnej procedury optymalizacji Gaussa-Newtona [3].

3. Algorytm obliczania elementów skojarzonych dla powierzchni baryłkowych i siodłowych

Założmy, że mamy ciąg próbek pomiarowych, których współrzędne zapisane w układzie cylindrycznym związanym ze stołem pomiarowym są równe $(\Delta r_i, \varphi_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, M$ [4, 5]. Ponieważ pomiar wartości promienia ma charakter względny, można wyznaczyć jedynie parametry R_c i z_c powierzchni. Wykorzystując kryterium najmniejszych kwadratów, parametry

powierzchni odniesienia możemy wyznaczyć minimalizując wskaźnik

$$J(r_c, R_c, z_c, e_x, e_y, d_x, d_y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M h_i(r_c, R_c, z_c, e_x, e_y, d_x, d_y)^2 \quad (3)$$

gdzie

$$h_i(r_c, R_c, z_c, e_x, e_y, d_x, d_y)^2 = r_c + \sqrt{R_c^2 - (z_i - z_c)^2} - \Delta r_i + e_x \cos \varphi_i + e_y \sin \varphi_i + d_x z_i \cos \varphi_i + d_y \sin \varphi_i \quad (4)$$

Zwróćmy uwagę, że funkcja h_i jest nieliniowa. Do minimalizacji wskaźnika J można więc np. zastosować algorytm Gaussa-Newtona. Algorytm ten wymaga znajomości dość dobrych ocen początkowych parametrów. Jednak często taka ocena nie jest dostępna, np. wtedy gdy wartości promienia nominalnego R_c są bardzo duże. W takim przypadku istotne staje się opracowanie metody pozwalającej na wstępne dobre oszacowanie parametrów R_c i z_c .

Poniżej przedstawiona jest procedura wyznaczania parametrów powierzchni odniesienia składająca się z trzech kroków. Pierwsze dwa na wyznaczenie dobrych ocen parametrów $r_c, R_c, z_c, e_x, e_y, d_x, d_y$. Krok trzeci to procedura Gaussa-Newtona.

3.1. Krok 1

Wyznaczamy parametry osi regresji powierzchni oraz aproksymacji funkcji $R_n(z)$ za pomocą wielomianu odpowiedniego rzędu [2]

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \quad (5)$$

Zatem powierzchnia odniesienia będzie opisana równaniem

$$R_r(\varphi, z) = p(z) - e_x \cos \varphi - e_y \sin \varphi - d_x z \cos \varphi - d_y z \sin \varphi = w^T \theta \quad (6)$$

Oczywiście można zastosować inny sposób aproksymacji. Np. w celu zapewnienia dobrego uwarunkowania zadania można w miejsce ciągu $\{z^i\}$ zastosować ciąg odpowiednio przeskalowanych wielomianów Legendre'a lub wielomianów Czebyszewa [6]. Optymalne w sensie kryterium minimum sumy kwadratów błędów parametry wyznaczamy ze wzoru

$$\theta = \left(\sum_{i=1}^M w_i w_i^T \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^M w_i v_i \right), \quad v_i = \Delta r_i, \quad w_i = \begin{bmatrix} 1 & z_i & \dots & z_i^n & -\cos \varphi_i & \dots & -z_i \sin \varphi_i \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

Aby sprawdzić jakość aproksymacji za pomocą przedstawionej metody, przeprowadzone zostały symulacje komputerowe. Symulacje te pozwoliły na prawidłowy dobór rzędu aproksymacji.

Zakładając, że oś powierzchni pokrywa się z osią obrotu możemy obliczyć parametry wielomianu $p(z)$ minimalizując całkę:

$$\int_0^H (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n - R_n(z))^2 dz \quad (8)$$

Dla parametrów symulacji równych: $H = 20$ mm, $R_c = 50$ mm, $z_c = 10$ mm, $r_c = 45$ mm oraz dla stopnia wielomianu aproksymującego równego $n = 2$ uzyskano następujące wartości współczynników aproksymacji:

$$a_0 = 3,99216, \quad a_1 = 0,201743, \quad a_2 = -0,0100872.$$

Analogicznie, dla tych samych parametrów symulacji, lecz przy założeniu aproksymacji wielomianem czwartego stopnia, uzyskano następujące wartości współczynników:

$$a_0 = 3,98981, \quad a_1 = 0,204093, \quad a_2 = -0,0106159, \\ a_3 = 0,0000411, \quad a_4 = -1,02803 \times 10^{-6}.$$

Porównując uzyskane wartości współczynników aproksymacji można stwierdzić, że aproksymacja wielomianem drugiego stopnia jest w zupełności wystarczająca.

3.2. Krok 2

Zwróćmy uwagę, że punkty leżące na powierzchni nominalnej (r, z) spełniają równanie

$$(z - z_c)^2 + (r - r_c)^2 = R_c^2. \quad (9)$$

Pamiętając, że $z = z_p$ i przekształcając powyższe równanie możemy je zapisać w postaci

$$(z^2 + R^2) = (R_c^2 - r_c^2 - z_c^2) + 2zz_c + 2rr_c \quad (10)$$

a następnie w postaci formy liniowej

$$v = w^T \vartheta, \quad v = (z^2 + r^2), \quad w = \begin{bmatrix} 1 & 2z & 2r \end{bmatrix}^T, \\ \vartheta = \begin{bmatrix} (R_c^2 - r_c^2 - z_c^2)z_c r_c \end{bmatrix}^T. \quad (11)$$

Jeśli przyjmiemy, że punkty (r, z) spełniają w przybliżeniu zależność

$$r_p = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \quad (12)$$

to odpowiednie przybliżone wartości ϑ możemy wyznaczyć z warunku minimalizacji funkcjonau

$$J = \int_0^H (v - w^T \vartheta)^2 dz, \quad (13)$$

i otrzymujemy

$$\vartheta = \left(\int_0^H w w^T dz \right)^{-1} \left(\int_0^H w v dz \right). \quad (14)$$

Zatem parametry ϑ możemy wyznaczyć analitycznie na podstawie aproksymacji (5).

Po wyprowadzeniu równań umożliwiających aproksymację wielomianami drugiego i czwartego stopnia oraz przeprowadzeniu odpowiednich obliczeń uzyskujemy następujące wyniki:

- współczynniki aproksymacji wielomianem drugiego stopnia:

$$a_0 = 3,99215, \quad a_1 = 0,201746, \quad a_2 = -0,0100873,$$

- aproksymacji wielomianem czwartego stopnia:

$$a_0 = 3,98981, a_1 = 0,204093, a_2 = -0,0106159,$$

$$a_3 = 0,0000411, a_4 = -1,02803 \times 10^{-6}.$$

Porównując wartości otrzymanych współczynników można stwierdzić, że aproksymacja wielomianem czwartego stopnia daje praktycznie dokładne wyniki.

3.3. Krok 3

Stosujemy metodę Gaussa-Newtona rozpoczynając od wyznaczonych w poprzednich krokach wartości ocen $(r_c, R_c, z_c, e_x, e_y, d_x, d_y)$. Pochodne cząstkowe funkcji (4) zapisane jako kolejne elementy wektora w_i są następujące

$$w_i = \left[1, \frac{R_c}{\sqrt{R_c^2 - (z - z_c)^2}}, \frac{z - z_c}{\sqrt{R_c^2 - (z - z_c)^2}}, \cos \varphi, \sin \varphi, z \cos \varphi, z \sin \varphi \right] \quad (15)$$

Następnie stosujemy algorytm:

1. Na podstawie kroku 1 i 2 definiujemy początkowe wartości ocen parametrów

$$\chi = [r_c, R_c, z_c, e_x, e_y, d_x, d_y]^T$$

2. Obliczamy poprawki parametrów:

$$\Delta\chi = \left(\sum_{i=1}^M w_i w_i^T \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^M w_i v_i \right),$$

$$v_i = \left[1, \frac{R_c}{\sqrt{R_c^2 - (z - z_c)^2}}, \frac{z - z_c}{\sqrt{R_c^2 - (z - z_c)^2}}, \cos \varphi, \sin \varphi, z \cos \varphi, z \sin \varphi \right]$$

$$v_i = h_i(r_c, R_c, z_c, e_x, e_y, d_x, d_y).$$

Zakładamy, że $\chi := \Delta\chi + \chi$ i jeśli poprawka $\Delta\chi$ ma wystarczająco małą wartość przerywamy działanie algorytmu. Jeśli nie, to wracamy do punktu 2.

4. Praktyczna weryfikacja algorytmu

4.1. Parametry początkowe

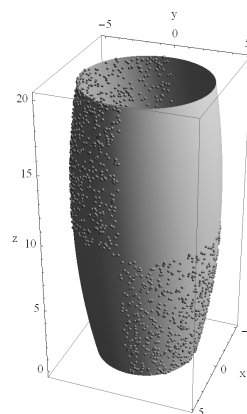
W celu praktycznej weryfikacji opracowanego algorytmu, rozważono następujący zarys o kształcie baryłkowym:

$$R_c(z) = r_c + \sqrt{R_c^2 - z(z - z_c)^2}.$$

Przyjęto następujące parametry baryłkowości: $H = 20$ mm, $R_c = 50$ mm, $z_c = 12$ mm, $r_c = -45$ mm oraz nieznanne położenie osi powierzchni cylindrycznej: $e_x = 0.01$ μm , $e_y = -0.01$ μm , $d_x = 0.01/H$ μm , $d_y = 0.02/H$ μm .

Lista danych została wygenerowana przy założeniu, że dane rozłożone są w sposób losowy równomiernie w obszarze $(\varphi, z) = [0, \pi] \times [0, H/2] \cup [\pi, 2\pi] \times [H/2, H]$.

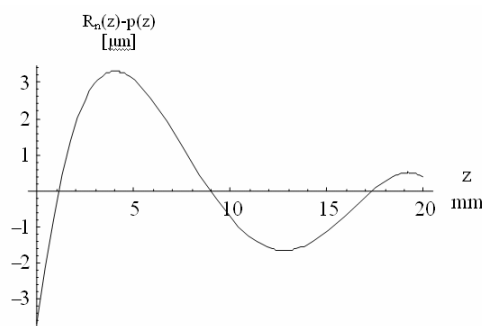
Wykres punktów profilu w układzie związanym z przedmiotem jest przedstawiony na rys. 3.



Rys. 3. Wykres punktów profilu w układzie związanym z przedmiotem

4.2. Wyniki symulacji

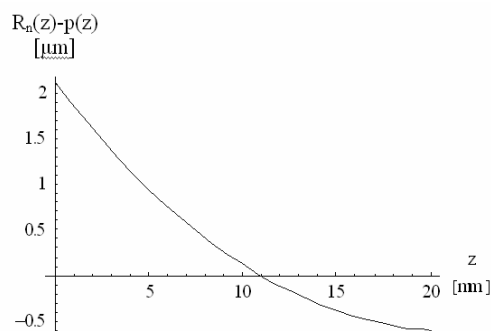
Obliczenia zostały wykonane w trzech etapach, odpowiadającym kolejnym krokom algorytmu opisanego w punkcie 3. Na rysunku 4 przedstawiono wykres różnicy między zarysem wzorcowym i zarysem uzyskanym po przeprowadzeniu pierwszego kroku algorytmu.



Rys. 4. Różnica między zarysem wzorcowym i zarysem uzyskanym po przeprowadzeniu pierwszego kroku algorytmu

Jak widać, maksymalna wartość różnicy między zarysami po przeprowadzeniu pierwszego kroku algorytmu wynosi ok. 3.1 μm .

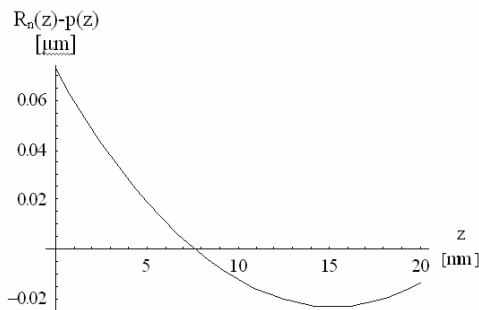
Rysunek 5 przedstawia wykres różnicy między zarysem wzorcowym i zarysem uzyskanym po przeprowadzeniu drugiego kroku algorytmu.



Rys. 5. Różnica między zarysem wzorcowym i zarysem uzyskanym po przeprowadzeniu drugiego kroku algorytmu

Na podstawie wykresu z rysunku 5 można stwierdzić, że maksymalna wartość różnicy między zarysami po przeprowadzeniu drugiego kroku algorytmu spadła z ok. 3.1 μm do ok. 2.1 μm .

Rysunek 6 przedstawia wykres różnicy między zarysem wzorcowym i zarysem uzyskanym po przeprowadzeniu ostatniego kroku algorytmu.



Rys. 6. Różnica między zarysem wzorcowym i zarysem uzyskanym po przeprowadzeniu ostatniego kroku algorytmu (pierwsza iteracja)

Analizując wykres przedstawiony na rysunku 6 można stwierdzić, że maksymalna wartość różnicy zarysu wzorcowego i zarysu po aproksymacji wynosi ok. $0.07 \mu\text{m}$. Wobec tego można założyć, że już po przeprowadzeniu jednej iteracji trzeciego kroku algorytmu uzyskujemy praktycznie dokładne wartości parametrów.

5. Wnioski

Wyniki badań podane w poprzednim punkcie pokazują, że po przeprowadzeniu jednej iteracji trzeciego kroku opracowanego algorytmu uzyskujemy dokładne parametry powierzchni skojarzonej. W celu dokładniejszego zbadania algorytmu przeprowadzone zostały dodatkowe symulacje komputerowe. Ich wyniki potwierdziły, że kolejne iteracje nie powodują znaczącego wzrostu jakości aproksymacji i przeprowadzenie tylko jednej iteracji jest w zupełności wystarczające. Można zauważyć, że uzyskane parametry nie są dokładnie takie same jak parametry

wejściowe. Powodem tego jest fakt, że model zależności między współzrędnymi związanymi z przedmiotem mierzonym i współzrędnymi związanymi ze stołem pomiarowym był nieliniowy, natomiast zaprezentowana metoda obliczania parametrów powierzchni skojarzonej jest oparta na modelu liniowym. Praktycznie, różnicę tę można zniwelować stosując bardziej precyzyjne centrowanie i poziomowanie przedmiotu na stole pomiarowym.

Praca prezentowana podczas IV Międzynarodowego Kongresu ICPM 2007 „Obróbka Precyzyjna”, Sandomierz – Kielce, 2007.

6. Literatura

- [1] ISO/DIS 12180-1, 2: 1999, Geometrical Product Specifications (GPS) – Cylindricity.
- [2] Gao W. et al: Precision measurement of cylinder straightness using a scanning multi-probe system, Precision Engineering, Vol 26., Elsevier, 2002, s. 279-288.
- [3] Osanna P. H. i in.: Cylindricity – a well known problem and solution, International Journal of Machine Tools and Manufacture, t. 32, Nr 1/2, Elsevier 1992, s. 91-97.
- [4] Żebrowska-Łucyk S.: New approach for examination of the displacement sensor characteristics. Measurement 28 (4) 2000, 261-267.
- [5] Żebrowska-Łucyk S.: Bezodniesieniowa metoda badania makrogeometrii powierzchni elementów obrotowych. Politechnika Warszawska. Prace Naukowe. Mechanika, zeszyt 187, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
- [6] Spiegel M. R.: Theory and problems of advanced mathematics for engineers and scientists, Schaum's outline series, McGraw-Hill Book Company, New York, 1971.

Artykuł recenzowany

INFORMACJE

Najnowsza książka Wydawnictwa PAK



założenia polityki krajów UE oraz strategii energetycznej Polski wobec OZE.

Na przełomie sierpnia i września ukazała się kolejna książka Wydawnictwa PAK autorstwa Tomasza Boczara pt.: Energia wiatrowa. Aktualne możliwości wykorzystania.

W niniejszej książce przedstawiono aktualne możliwości wykorzystania energii wiatru do produkcji energii elektrycznej na obszarze Europy, ze szczególnym uwzględnieniem potencjalnych zasobów i stopnia ich wykorzystania na terenie Polski, a także województwa opolskiego. Ponadto scharakteryzowano podstawowe

Książka skierowana jest przede wszystkim do studentów oraz wykładowców prowadzących zajęcia dydaktyczne na kierunkach elektrycznych, jak również związanych z inżynierią i ochroną środowiska. Opisane zagadnienia mogą stanowić materiał dydaktyczny związany z aktualnymi możliwościami oraz przyszłymi kierunkami w pozyskiwaniu energii wiatru do produkcji energii elektrycznej.

Zamówienia prosimy składać na adresy PAK:

Wydawnictwo PAK
00-050 Warszawa, ul. Świętokrzyska 14A,
tel./fax: 022 827 25 40

Redakcja PAK
44-100 Gliwice, ul. Akademicka 10, p. 30b,
tel./fax: 032 237 19 45, e-mail: wydawnictwo@pak.info.pl