

Janusz KOZŁOWSKI, Zdzisław KOWALCZUK

POLITECHNIKA GDAŃSKA, WYDZIAŁ ELEKTRONIKI TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI

## Identyfikacja ciągłoczasowych modeli obiektów niestacjonarnych

Dr inż. Janusz KOZŁOWSKI

Urodził się w 1966 r. w Gdańsku. Studia na Wydziale Elektroniki Politechniki Gdańskiej ukończył w roku 1990, a pracę doktorską na temat identyfikacji modeli ciągłych obronił w roku 2000. W 1994 r. odbył staż przemysłowy w firmie ABB w Finlandii, gdzie tworzył oprogramowanie dla potrzeb energetyki. Obecnie, jako adiunkt w Katedrze Systemów Decyzyjnych, prowadzi badania w dziedzinie identyfikacji i sterowania adaptacyjnego, wyniki których znalazły się w około 30 publikacjach.



e-mail: jk23@eti.pg.gda.pl

Prof. dr hab. inż. Zdzisław KOWALCZUK

Profesor zwyczajny i kierownik Katedry Systemów Decyzyjnych, Wydział Elektroniki Telekomunikacji i Informatyki Politechniki Gdańskiej. Urodzony w Gdańsku 1953, mgr inż. 1978, dr 1986, dr hab. 1993, profesor nauk technicznych 2003. Zakres badań naukowych: teoria i projektowanie komputerowych systemów sterowania i diagnostyki oraz adaptacja, modelowanie i identyfikacja, przetwarzanie sygnałów i sztuczna inteligencja. Laureat Nagrody Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej (1999) w dziedzinie nauk techn.



e-mail: kova@eti.pg.gda.pl

### Streszczenie

W pracy przedstawia się metody estymacji parametrycznej liniowych modeli obiektów niestacjonarnych. Dynamikę identyfikowanych obiektów opisuje się za pomocą liniowych równań różniczkowych zwyczajnych o znanym rzędzie. Ponieważ stosowane w praktyce algorytmy estymacji parametrycznej oparte są na przetwarzaniu danych rejestrowanych w sposób dyskretny, stosuje się różne techniki dyskretnoczasowej aproksymacji modeli ciągłych. Uzyskane w taki sposób i zachowujące oryginalną parametryzację opisy z czasem dyskretnym identyfikuje się stosując metodę ważonych najmniejszych kwadratów oraz odporną na wewnętrznie skorelowane zakłócenia metodę zmiennej instrumentalnej.

**Słowa kluczowe:** estymacja parametryczna, metoda najmniejszych kwadratów, metoda zmiennej instrumentalnej, modele z czasem ciągłym.

### Identification of continuous-time models of nonstationary plants

#### Abstract

In this paper the parameter estimation methods of continuous-time nonstationary plant models are introduced. Linear ordinary differential equations of known order are used to describe the dynamics of the identified plants. Consequently, various discrete-time approximation techniques are proposed in order to obtain auxiliary discrete-time descriptions retaining the original parametrization. Among such numerical solutions the technique involving specific finite-horizon integrating filters gives promising results. Eventually, with the aid of the weighted least-squares method and the instrumental variable method robust to cross-correlated disturbances, the considered models are identified.

**Keywords:** parameter estimation, least-squares method, instrumental variable method, continuous-time models.

### 1. Wstęp

W klasycznym podejściu do identyfikacji parametrycznej stosowane są najczęściej liniowe modele z czasem dyskretnym dane w postaci równań różnicowych lub odpowiednich transmitancji zmiennej zespolonej  $z$ . Parametry takich modeli są wielkościami niemianowanymi i nie mającymi zazwyczaj interpretacji fizycznej. Wyniki identyfikacji mają wówczas charakter instrumentalny, a uzyskiwane wartości ocen parametrów ściśle zależą od przyjętej w danej implementacji częstotliwości próbkowania sygnałów. Ponadto przy wzroście tej częstotliwości dochodzić może do unifikacji biegunów identyfikowanej  $z$ -transmitancji oraz wystąpienia w tej transmitancji kłopotliwych nieminimalno-fazowych zer, nawet w przypadku analizy obiektów minimalnofazowych.

Zastosowanie natomiast liniowych modeli z czasem ciągłym (równania różniczkowe zwyczajne,  $s$ -transmitancje) pozwala zachować sens fizyczny estymowanych parametrów, co istotnie ułatwia interpretację oraz weryfikację wyników identyfikacji.

Ponieważ jednak stosowane w praktyce procedury identyfikacji oparte są na przetwarzaniu danych rejestrowanych w sposób dyskretny, niezbędne jest przeprowadzenie (zachowującej oryginalną parametryzację) dyskretnoczasowej aproksymacji przyjętego modelu z czasem ciągłym. Uzyskany opis dyskretny można już łatwo zidentyfikować stosując algorytmy estymacji parametrycznej (np. estymator najmniejszych kwadratów lub estymator zmiennej instrumentalnej). Wprowadzenie do takich algorytmów mechanizmów zapominania pozwala zaś śledzić trajektorie parametrów modelowanego obiektu niestacjonarnego.

### 2. Dyskretna aproksymacja modeli ciągłych

Przyjmijmy, że dynamika identyfikowanego obiektu opisana jest za pomocą liniowego równania różniczkowego zwyczajnego o znanym rzędzie ( $n > m \geq 0$ )

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_{n-i} y^{(n-i)}(t) = \sum_{i=0}^m b_{m-i} u^{(m-i)}(t) \quad (1)$$

z  $u(t)$  i  $y(t)$  oznaczającymi sygnały obserwowane odpowiednio na wejściu i wyjściu obiektu. Stosując do równania (1) przekształcenie Laplace'a ( $\mathcal{L}$ ) oraz oznaczając  $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$  i  $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$  dostaje się równoważny opis w dziedzinie zmiennej zespolonej  $s$

$$A(s)Y(s) = B(s)U(s) + C(s) \quad (2)$$

z wielomianami operatorowymi  $A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$  i  $B(s) = b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0$ , przy czym współczynniki

$$c_i = y^{(n-i-1)}(0) + \sum_{j=i}^{n-2} a_{j+1} y^{(j-i)}(0) - \sum_{j=i}^{m-1} b_{j+1} u^{(j-i)}(0) \quad (3)$$

(obliczane dla  $i=0, \dots, n-1$ ) wielomianu  $C(s) = c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_0$  modelują efekt niezerowych warunków początkowych równania różniczkowego (tj.  $u(0), \dots, u^{(m-1)}(0), y(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ ).

Przekształcając model (2) otrzymuje się równanie wyjścia

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s) + \frac{C(s)}{A(s)} = H(s)U(s) + V(s), \quad (4)$$

w którym  $H(s) = B(s)/A(s)$  oznacza transmitancję operatorową modelowanego obiektu, zaś  $V(s) = C(s)/A(s)$  jest transformata Laplace'a odpowiedzi swobodnej tego obiektu. Zakładając, że modelowany obiekt jest stabilny (tzn. pierwiastki wielomianu  $A(s)$  leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej  $s$ ), można zaniedbać zmierną asymptotycznie do zera odpowiedź swobodną i równanie (4) zapisać w postaci  $Y(s) = H(s)U(s)$ .

Ponieważ identyfikacja modeli ciągłych jest z założenia oparta na przetwarzaniu danych spróbkowanych, należy przeprowadzić dyskretną aproksymację równania (1) z zachowaniem oryginalnej parametryzacji. Metody takiej aproksymacji, polegające na zastąpieniu kolejnych pochodnych sygnałów  $u(t)$  i  $y(t)$  odpowiednimi miarami uzyskiwanymi na bieżąco w czasie dyskretnym, przedstawiono w niniejszej pracy.

### Metoda operatora delta

Najprostszy sposób aproksymacji pochodnej  $dx/dt$  polega na zastąpieniu różniczek  $dt$  i  $dx$  odpowiednio okresem próbkowania sygnałów ( $dt = T$ ) oraz różnicą skończoną  $dx|_{t=kT} \approx \Delta x(kT) = x(kT+T) - x(kT)$ . Stosując notację z operatorem delta  $\delta x(kT) = \Delta x(kT)/T$  można wówczas oszacować pochodne  $u^{(r)}(t)$  i  $y^{(r)}(t)$  sygnałów pomiarowych wg ogólnego wzoru:  $x^{(r)}(t)|_{t=kT} \approx \delta^r x(kT) = (q-1)^r x(kT)/T^r$ , gdzie  $q$  jest operatorem przesunięcia ( $qx(kT) = x(kT+T)$ ). Zachowujący oryginalną parametryzację dyskretny odpowiednik modelu (1) identyfikuje się następnie metodami klasycznymi. Chociaż modele deltowe są dla małych okresów próbkowania ( $T \rightarrow 0$ ) zbieżne do użytecznych modeli z czasem ciągłym, posługiwanie się takimi opisami jest kłopotliwe. Z uwagi na górnoprzepustowy charakter operatora  $\delta$  wysokoczęstotliwościowe szумы pomiarowe nie mogą być bowiem skutecznie odfiltrowane. W przypadku modeli wyższych rzędów natomiast ( $n \geq 2$ ) oceny parametrów uzyskane metodą najmniejszych kwadratów zawierają błąd systematyczny [9], dlatego do identyfikacji modeli deltowych wymagane są bardziej złożone procedury estymacji (np. metoda zmiennej instrumentalnej). Wreszcie nieprzyczynowość operatora  $\delta$  powoduje, że ocenę  $n$ -tej pochodnej sygnału  $y(t)$  w chwili  $t=kT$  można wyznaczyć z  $n$ -krokowym opóźnieniem, wynikającym z konieczności pobrania próbek sygnału  $y(t)$  w następnych momentach próbkowania ( $t=kT+T \dots kT+nT$ ).

Opisane trudności numeryczne nie występują w podejściu deltowym z filtracją obserwatorową [6]. W proponowanym rozwiązaniu dzieli się równanie operatorowe (2) obustronnie przez pewien wielomian  $F(s) = s^n + f_{n-1}s^{n-1} + \dots + f_1s + f_0$  uzyskując

$$\frac{s^n}{F(s)} Y(s) = \frac{s^n - A(s)}{F(s)} Y(s) + \frac{B(s)}{F(s)} U(s) + \frac{C(s)}{F(s)}. \quad (5)$$

Ponieważ z założenia operator  $1/F(s)$  jest stabilny, składnik  $C(s)/F(s)$  związany z filtrowaną odpowiedzią swobodną stabilnego obiektu (1) można pominąć. Równoważny (5) model regresyjny ma zatem postać:

$$y_f^{(n)}(t) = \Phi^T(t) \theta + \epsilon(t) \quad (6)$$

$$\Phi(t) = [-y_f^{(n-1)} \dots -y_f \quad u_f^{(m)} \dots u_f]^T \quad (7)$$

$$\theta = [a_{n-1} \dots a_0 \quad b_m \dots b_0]^T \quad (8)$$

z  $u_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)/F(s)]$  i  $y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)/F(s)]$  oznaczającymi filtrowane pochodne sygnałów pomiarowych  $u(t)$  i  $y(t)$  oraz  $\epsilon(t)$  reprezentującym zarówno szумы pomiarowe, jak i błędy modelowania. Z uwagi na przemienność liniowych operacji filtracji i różniczkowania, dla  $u(t)$  i  $y(t)$  obowiązuje zależność:  $dx_f^{(r)}(t)/dt = x_f^{(r+1)}(t)$ , gdzie  $r = 1, \dots, n-1$ . Z kolei z równania  $(s^n + f_{n-1}s^{n-1} + \dots + f_1s + f_0)X(s)/F(s) = X(s)$  wynika natychmiast wzór:  $x_f^{(n)}(t) = x(t) - [f_{n-1}x_f^{(n-1)}(t) + f_{n-2}x_f^{(n-2)}(t) + \dots + f_0x_f(t)]$ . Wykorzystując ostatecznie operator  $\delta$  do realizacji pojedynczego różniczkowania uzyskuje się rekurencyjną formułę wyznaczania współrzędnych regresyjnych  $u_f^{(r)}(t)$  i  $y_f^{(r)}(t)$  modelu (6)

$$x_f^{(r)}(t)|_{t=kT} = [x_f^{(r)}(t) + T x_f^{(r+1)}(t)]|_{t=kT-T}; \quad r = 1, \dots, n-1 \quad (9)$$

$$x_f^{(n)}(t)|_{t=kT} = x(kT) - [f_{n-1}x_f^{(n-1)}(t) + \dots + f_0x_f(t)]|_{t=kT}. \quad (10)$$

Opisana metoda modelowania daje dobre wyniki pod warunkiem właściwego dostrojenia wielomianu obserwatorowego  $F(s)$ . W praktyce jednak początkowa wiedza na temat dynamiki identyfikowanego obiektu nie zawsze jest dostępna, w związku z czym właściwy dobór współczynników  $f_i$  wielomianu może być utrudniony. Poważną wadą opisanej metody jest natomiast to, że procesy identyfikacji współczynników (8) i rekonstrukcji obserwatorowej (9)–(10) współrzędnych regresyjnych (7) przebiegają jednocześnie. W rezultacie, przy braku właściwego dostrojenia wielomianu  $F(s)$ , niedokładność danych regresyjnych przyczynić się może do zafałszowania ocen parametrów.

### Metoda wielokrotnego całkowania

Zasadniczą wadą deltowych metod aproksymacji górnoprzepustowych operatorów różniczkowania jest wzmacnianie wysokoczęstotliwościowych szумы pomiarowych. Może to być przyczyną znacznych błędów modelowania i prowadzić w konsekwencji do wypaczenia wyników identyfikacji. Stosując operator wielokrotnego całkowania ( $1/s^n$ ) do przekształcenia opisu (2) uzyskuje się model regresyjny ze współrzędnymi wektora  $\Phi(t)$  wyznaczanymi drogą dolnoprzepustowej filtracji sygnałów pomiarowych. Dokonując zatem  $n$ -krotnego całkowania równania (1) obustronnie na przedziale  $[0, t]$  otrzymuje się zależność:

$$Y(s) = \frac{s^n - A(s)}{s^n} Y(s) + \frac{B(s)}{s^n} U(s) + \frac{C(s)}{s^n}. \quad (11)$$

Ponieważ przy niezerowych warunkach początkowych ( $c_i \neq 0$ ) składnikowi związanemu z wielokrotnie scałkowaną odpowiedzią swobodną odpowiada nie zanikający do zera przebieg dany wzorem  $\mathcal{L}^{-1}[C(s)/s^n] = c_{n-1} + c_{n-2}t + \dots + c_0 t^{n-1}/(n-1)!$ , w modelu muszą zostać uwzględnione współczynniki wielomianu  $C(s)$ . Model regresyjny przyjmuje wówczas postać [4]

$$y(t) = \Phi^T(t) \theta + \epsilon(t) \quad (12)$$

$$\Phi(t) = \left[ -J^1 y \dots -J^n y \quad J^{n-m} u \dots J^n u \quad 1 \dots \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right]^T \quad (13)$$

$$\theta = [a_{n-1} \dots a_0 \quad b_m \dots b_0 \quad c_{n-1} \dots c_0]^T, \quad (14)$$

gdzie:

$$J^r x(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{r-1}} x(t_r) dt_r dt_{r-1} \dots dt_1. \quad (15)$$

Dyskretnoczasowy odpowiednik modelu (12) dostaje się stosując znane algorytmy numerycznego całkowania do wyznaczania regresorów (15). W najprostszy sposób obliczenia takie można wykonać zastępując operator całkowania znanym operatorem Tustina:  $1/s \leftrightarrow 0,5T(1+z^{-1})/(1-z^{-1})$ . Natomiast numerycznie dokładniejsze, a zarazem minimalizujące kumulowanie błędów, całkowanie metodą trapezów dane jest wzorem rekurencyjnym ( $r = 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots$ )

$$J^r x(t)|_{t=kT} = \sum_{i=1}^r \frac{T^{i-1}}{(i-1)!} J^{r-i+1} x(t) \Big|_{t=kT-T} + \frac{T^r}{(r+1)!} [x(kT) + r x(kT-T)]. \quad (16)$$

W opisanym podejściu całkowym nie występują już problemy związane ze wzmacnianiem wysokoczęstotliwościowych szumów pomiarowych, a wymaganą dokładność całkowania (16) daje się uzyskać nawet przy stosunkowo dużej wartości okresu próbkowania  $T$ . Metoda całkowita nie może być niestety stosowana do bieżącej identyfikacji parametrów (14) modelu, gdyż naturalne narastanie wartości całkowych regresorów prowadzi nieuchronnie do numerycznych przepełnień (filtr  $1/s^n$  jest niestabilny). Identyfikację opisu (12) można oczywiście realizować *off-line*, jednak konieczność modelowania warunków początkowych ( $c_i$ ) istotnie zwiększa nakład obliczeń.

**Metoda filtracji formującej**

Przytoczonych powyżej mankamentów modelowania całkowego nie posiada metoda, w której do formowania współrzędnych regresyjnych wykorzystuje się odpowiednie filtry dolno-przepustowe typu

$$G(s) = \frac{1}{(s\tau + 1)^{n+1}} \tag{17}$$

albo

$$G(s) = \frac{(1 - e^{-s\tau})^n}{s^n}, \tag{18}$$

gdzie  $G(s)$  są transmitancjami spotykanych w praktyce filtrów Poissona i całkującego (tj. realizującego  $n$ -krotne całkowanie w oknie czasowym  $[t - \tau, t]$  o stałej długości  $\tau$ ). Przekształcone równanie operatorowe (2) przyjmuje wówczas postać

$$G(s)s^n Y(s) = G(s) \{ [s^n - A(s)]Y(s) + B(s)U(s) + C(s) \}. \tag{19}$$

Ponieważ operację  $G(s)X(s)$  interpretuje się w dziedzinie czasu jako spłot  $g(t) * x(t)$  sygnału  $x(t)$  z odpowiedzią impulsową  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$  filtru, metoda ta – z uwagi na wzory spłotowe – nazywana bywa metodą momentów [1]. Zaniedbując składnik  $G(s)C(s)$  związany z zanikającą odpowiedzią swobodną uzyskuje się równoważny (19) model regresyjny [1, 7]

$$g(t) * y^{(n)}(t) = \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\theta} + \epsilon(t) \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = g(t) * [-y^{(n-1)} \dots -y \quad u^{(m)} \dots u]^T \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\theta} = [a_{n-1} \dots a_0 \quad b_m \dots b_0]^T, \tag{22}$$

gdzie:

$$g(t) * x^{(r)}(t) = \int_0^t g(t-\gamma) x^{(r)}(\gamma) d\gamma \tag{23}$$

oznacza wynik filtracji  $G(s)$  kolejnych pochodnych ( $r=0, \dots, n$ ) opisany spłotem.

Uwzględniając w dalszej dyskusji dogodniejszy realizacyjnie liniowy filtr całkujący (18) dochodzimy do następującej formuły obliczania regresorów (23) w czasie dyskretnym [2, 4]

$$g(t) * x^{(r)}(t) = \int_{t-\tau}^t \int_{t_1-\tau}^{t_1} \dots \int_{t_{n-1}-\tau}^{t_{n-1}} x^{(r)}(t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1 \Big|_{t=kT} \approx \approx Q_{n-r}(q^{-1})D_r(q^{-1})\Omega_n(q^{-1})x(kT) \tag{24}$$

z  $q^{-1}$  oznaczającym jednostkowe opóźnienie:  $q^{-1}x(kT) = x(kT - T)$ . Dyskretyzacja (23) przeprowadzona za pomocą podstawienia Tustina prowadzi do formuły (24) z wielomianami operatorowymi

$\Omega_n(q^{-1}) = (1 + q^{-1} + \dots + q^{-L+1})^n$ ,  $Q_{n-r}(q^{-1}) = (0,5T)^{n-r} (1 + q^{-1})^{n-r}$  oraz  $D_r(q^{-1}) = (1 - q^{-1})^r$ , przy czym  $L = \tau/T$  określa dyskretny horyzont obserwacji filtru całkującego (tj. liczbę próbek mieszczącą się w oknie czasowym o szerokości  $\tau$ ). Stosując zaś metodę trapezową dostaje się identyczną formułę (24) z nowym wielomianem  $Q_{n-r}(q^{-1}) = T^{n-r} N_{n-r+1}(q^{-1}) / (n-r+1)!$  oraz wielomianami  $D_r(q^{-1})$  i  $\Omega_n(q^{-1})$  podanymi wyżej. W obliczeniach wykorzystuje się wielomiany normalne [2] ( $N_0(q^{-1}) = 1$ ;  $p = 1, \dots, n+1$ )

$$N_p(q^{-1}) = \sum_{i=1}^p \mu_{i,p} q^{-i+1} ; \mu_{i,p} = \sum_{j=1}^i (-1)^{i-j} \binom{p+1}{i-j} j^p. \tag{25}$$

W przedstawionej metodzie dyskretnej aproksymacji modelu (20) wykorzystuje się łatwo realizowalne cyfrowe filtry formujące typu FIR (filtr całkujący) lub IIR (filtr Poissona). Ze względu na dolnopaśmowy charakter przetwarzania sygnałów szumy pomiarowe mogą być wstępnie odfiltrowane, zaś nieznanne warunki początkowe równania (1) nie mają wpływu na poprawność identyfikacji. Stałą czasową  $\tau$  zaleca się [7] dobierać tak, aby charakterystyka amplitudowa  $|G(j\omega)|$  filtru była dopasowana do pasma przenoszenia obiektu.

**3. Algorytmy estymacji parametrycznej**

Dotychczas rozważono różne techniki dyskretnej aproksymacji zidentyfikowanego modelu z czasem ciągłym. Zachowujący oryginalną parametryzację opis dyskretny przyjmuje wówczas postać  $\psi(kT) = \boldsymbol{\varphi}^T(kT)\boldsymbol{\theta} + \epsilon(kT)$ , gdzie sygnał odniesienia  $\psi$ , wektor regresji  $\boldsymbol{\varphi}$  i wektor nieznanych parametrów  $\boldsymbol{\theta}$  dane są wzorami (6)–(8), (12)–(14) lub (20)–(22). Najprostszy sposób oceny parametrów modelu polega na zastosowaniu algorytmu (ważonych) najmniejszych kwadratów (LS). Minimalizując wskaźnik jakości w postaci wykładniczo ważonej ( $0 < \lambda \leq 1$ ) sumy błędów  $\epsilon(kT)$  dostaje się znany wzór LS

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \left[ \sum_{\ell=1}^k \lambda^{k-\ell} \boldsymbol{\varphi}(\ell)\boldsymbol{\varphi}^T(\ell) \right]^{-1} \left[ \sum_{\ell=1}^k \lambda^{k-\ell} \boldsymbol{\varphi}(\ell)\psi(\ell) \right], \tag{26}$$

w którym dla uproszczenia zapisu argument czasowy  $kT$  zastąpiono indeksem  $k$ .

Łatwo pokazać, że dla  $\lambda = 1$  i  $k \rightarrow \infty$  oceny LS opisuje zależność korelacyjna:  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \boldsymbol{\theta} + \{E[\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)]\}^{-1} E[\boldsymbol{\varphi}(k)\epsilon(k)]$ . Oceny te są zatem asymptotycznie zbieżne do prawdziwych wartości  $\boldsymbol{\theta}$ , jeżeli regresory  $\boldsymbol{\varphi}(k)$  są nieskorelowane z błędem resztowym  $\epsilon(k)$  (wówczas  $E[\boldsymbol{\varphi}(k)\epsilon(k)] = 0$ ). Taka zbieżność zachodzi wtedy, gdy  $\epsilon(k)$  jest szumem białym, czyli ciągiem niezależnych zmiennych losowych o zerowych wartościach oczekiwanych. W przypadku wewnętrznie skorelowanych szumów  $\epsilon(k)$  pojawia się natomiast niezerowa korelacja  $E[\boldsymbol{\varphi}(k)\epsilon(k)]$  i oceny (26) zawierają błąd systematyczny (obciążenie).

Zastępując w (26) kolumnowy wektor regresji pewnym wektorem  $\boldsymbol{\xi}(k)$  nieskorelowanym z procesem  $\epsilon(k)$  otrzymuje się estymator zmiennej instrumentalnej (IV)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \left[ \sum_{\ell=1}^k \lambda^{k-\ell} \boldsymbol{\xi}(\ell)\boldsymbol{\varphi}^T(\ell) \right]^{-1} \left[ \sum_{\ell=1}^k \lambda^{k-\ell} \boldsymbol{\xi}(\ell)\psi(\ell) \right]. \tag{27}$$

Z uwagi na zależność  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \boldsymbol{\theta} + \{E[\boldsymbol{\xi}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)]\}^{-1} E[\boldsymbol{\xi}(k)\epsilon(k)]$  oceny (27) są już asymptotycznie zgodne, gdyż  $E[\boldsymbol{\xi}(k)\epsilon(k)] = 0$ .

Przekształcając wyrażenie (27) i korzystając ze znanego lematu o odwracaniu macierzy algorytmowi IV można nadać dogodną formę rekursywną ( $k = 1, 2, \dots$ )

$$\mathbf{P}(k) = \frac{1}{\lambda} \left[ \mathbf{P}(k-1) - \frac{\mathbf{P}(k-1)\xi(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)\mathbf{P}(k-1)}{\lambda + \boldsymbol{\varphi}^T(k)\mathbf{P}(k-1)\xi(k)} \right] \quad (28)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{P}(k)\xi(k)[\psi(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)], \quad (29)$$

przy czym dla  $\xi(k) = \boldsymbol{\varphi}(k)$  otrzymuje się algorytm LS. Wartością początkową macierzy kowariancyjnej jest w metodzie LS macierz diagonalna, np.  $\mathbf{P}(0) = \text{diag}(10^5, \dots, 10^5)$ . W metodzie IV natomiast zaleca się wykorzystać jako początkowe wartości  $\mathbf{P}(k_0)$  i  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k_0)$  uzyskane algorytmem LS po wykonaniu  $k_0$  (np.  $k_0 = 100$ ) początkowych obliczeń (28)–(29). Z kolei nieskorelowany z błędem resztowym wektor instrumentalny  $\xi(k)$  wyznacza się [2] zgodnie ze wzorami (21) i (24). W miejsce zakłóconych danych pomiarowych  $y(k)$  należy wówczas wstawić nie zawierającą szumu ocenę uzyskaną z równania filtracyjnego (4)

$$\hat{y}(k) = \frac{\sum_{i=0}^m \hat{b}_{m-i} T^{n-m+i} 2^{m-i} (1+q^{-1})^{n-m+i} (1-q^{-1})^{m-i}}{\sum_{i=0}^n \hat{a}_{n-i} T^i 2^{n-i} (1+q^{-1})^i (1-q^{-1})^{n-i}} u(k) \quad (30)$$

(z  $a_n = 1$ ), przy czym zmienną  $s^{-1}$  zastąpiono tu operatorem Tustina. W przypadku estymacji (28)–(29) realizowanej *on-line* w miejsce parametrów  $a_i$  i  $b_i$  wstawia się ich bieżące oceny.

W przeprowadzonych testach numerycznych identyfikowany był model (1) rzędu  $n=2$ . Przyjęto, że sygnał wejściowy ma postać  $u(t) = \sin 0,7t + \sin 1,1t + \sin 1,7t + \sin 2,1t$ , a pomiar sygnału wyjściowego  $y(k) = y(t)|_{t=kT}$ , przy okresie próbkowania  $T = 0,05$  s, zakłócony jest gaussowskim szumem białym  $w(k)$ . Aproksymację dyskretną współrzędnych regresyjnych przeprowadzono za pomocą filtru całkującego z horyzontem obserwacji  $\tau = 1$  s ( $L = 20$ ). Oceny LS i IV parametrów modelu uzyskano metodami rekursywnymi (czas symulacji 300 s, bez zapominania:  $\lambda = 1$ ), przy czym w kolejnych testach zmieniano moc szumu pomiarowego, tak aby stosunek  $\rho = \sigma_w / \sigma_y$  dyspersji szumu pomiarowego do dyspersji sygnału wyjściowego przyjmował wartości w zakresie od 10% do 30%. Przedstawione w tabeli 1 wyniki zostały dla kolejnych wartości  $\rho$  uśrednione każdorazowo po 50 realizacjach.

Tab. 1. Oceny parametrów modelu uzyskane metodami LS i IV  
Tab. 1. Parameter estimates of a model, obtained from the LS and IV methods

$\rho$	$a_1 \pm \sigma_{a1}$ ( $a_1 = 3,0$ )	$a_0 \pm \sigma_{a0}$ ( $a_0 = 4,0$ )	$b_1 \pm \sigma_{b1}$ ( $b_1 = 0,8$ )	$b_0 \pm \sigma_{b0}$ ( $b_0 = 6,0$ )
10% LS	2,811 ± 0,031	3,684 ± 0,054	0,892 ± 0,018	5,495 ± 0,085
IV	3,001 ± 0,035	4,001 ± 0,061	0,800 ± 0,020	6,000 ± 0,096
20% LS	2,421 ± 0,044	3,042 ± 0,078	1,076 ± 0,029	4,460 ± 0,120
IV	3,000 ± 0,071	4,001 ± 0,122	0,799 ± 0,041	5,999 ± 0,193
30% LS	2,060 ± 0,044	2,466 ± 0,085	1,233 ± 0,035	3,521 ± 0,125
IV	3,001 ± 0,108	4,004 ± 0,186	0,797 ± 0,062	6,003 ± 0,293

Przeprowadzone testy numeryczne pokazują, że algorytm zmiennej instrumentalnej zadowalająco radzi sobie z wewnątrznie skorelowanymi szumami pomiarowymi, podczas gdy obciążenie ocen LS znacząco rośnie ze wzrostem poziomu szumu. Jednocześnie przy zwiększaniu mocy tego szumu nie następuje zauważalne pogorszenia dokładności ocen IV. Warto zauważyć, że metoda IV

pozwała usuwać błąd systematyczny estymacji niezależnie od typu rozkładu prawdopodobieństwa addytywnego zakłócenia.

#### 4. Wnioski

W pracy przedstawiono i porównano różne metody dyskretnej aproksymacji modeli z czasem ciągłym. Wykazano, że stosując odpowiednio dostrojony filtr formujący uzyskuje się prosty w implementacji dyskretnoczasowy odpowiednik równania różniczkowego. Ponieważ otrzymywane w ten sposób opisy regresyjne zachowują oryginalną parametryzację modelu w dziedzinie ciągłej, zadanie identyfikacji daje się rozwiązywać klasycznymi metodami estymacji parametrycznej. Trzeba ponadto podkreślić, że metoda aproksymacji z liniowym filtrem całkującym typu FIR nadaje się także do dyskretnej aproksymacji równań różniczkowych nieliniowych [5] oraz równań różniczkowych cząstkowych [8]. Przydatność metod identyfikacji modeli ciągłych, gdzie zachowanie fizycznej interpretacji parametrów ułatwia weryfikację uzyskiwanych wyników, wykazano również w pracach [3, 6, 10].

#### 5. Literatura

- [1] H. Garnier, P. Sibille, H.L. Nguyen, T. Spott: A bias-compensating least-squares method for continuous-time system identification via Poisson moment functionals. In: 10th IFAC Symposium on System Identification, vol. 3, pp. 675-680, Copenhagen, Denmark, 1994.
- [2] Z. Kowalczyk, J. Kozłowski: Continuous-time approaches to identification of continuous-time systems. *Automatica*, 36, pp. 1229-1236, 2000.
- [3] Z. Kowalczyk, J. Kozłowski: Continuous-time versus discrete-time modeling in system identification. In: 7th Int. Symp. Methods and Models in Automation and Robotics, 2, pp. 981-986, Międzyzdroje, 2001.
- [4] Z. Kowalczyk, J. Kozłowski: Metoda czasu ciągłego i dyskretnego w identyfikacji liniowych modeli obiektów sterowania. XIV Krajowa Konferencja Automatyki, 1, ss. 395-400, Zielona Góra, 2002.
- [5] J. Kozłowski, Z. Kowalczyk: Odporne na przekłamania pomiarowe algorytmy estymacji parametrycznej w zagadnieniach diagnostyki systemów. W: Inteligentne wydobywanie informacji w celach diagnostycznych (red. Z. Kowalczyk i B. Wiszniewski), ss. 221-240, Pomorskie Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Gdańsk, 2007.
- [6] B.M. Ninness, G.C. Goodwin: The relationship between discrete time and continuous time linear estimation. In: Identification of continuous-time systems (N.K. Sinha, G.P. Rao, Eds.), pp. 79-122. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [7] S. Sagara, Z.J. Yang, K. Wada: Identification of continuous systems using digital low-pass filters. *Int. J. Systems Science*, 22, pp. 1159-1176, 1991.
- [8] S. Sagara, Z.Y. Zhao: Identification of system parameters in distributed parameter systems. In: 11th IFAC Triennial World Congress, pp. 471-476, Tallinn, Estonia, 1990.
- [9] T. Söderström, H. Fan, B. Carlsson, S. Bigi: Least squares parameter estimation of continuous time ARX models from discrete-time data. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42, pp. 659-673, 1997.
- [10] Z.Y. Zhao, S. Sagara: Comparison of direct and indirect approaches for continuous system identification. In: 10th IFAC Symposium on System Identification, vol. 3, pp. 639-644, Copenhagen, Denmark, 1994.