

Jerzy JAKUBIEC

INSTYTUT METROLOGII, ELEKTRONIKI I AUTOMATYKI

Losowe właściwości błędu kwantowania w systemie pomiarowym

Prof. dr hab. inż. Jerzy JAKUBIEC

Zastępca dyrektora ds. naukowych Instytutu Metrologii, Elektroniki i Automatyki Politechniki Śląskiej. Studia ukończył na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej w 1971 r., w 1978 uzyskał stopień doktora, w 1989 – doktora habilitowanego, w 2004 – tytuł profesora. Zainteresowania naukowe: analiza propagacji błędów w systemach pomiarowo-sterujących, synteza modeli niepewności algorytmów przetwarzania danych pomiarowych, modelowanie metrologicznych właściwości torów przetwarzania analogowo-cyfrowego.



e-mail: jerzy.jakubiec@polsl.pl

Streszczenie

Obliczanie niepewności wyników realizacji algorytmów przetwarzania w systemie pomiarowym wymaga losowego opisu błędu kwantowania. Podstawą uzyskiwania tego rodzaju opisu jest analiza właściwości układu realizującego kwantowanie. W pracy przedstawiono wstępne wyniki badań symulacyjnych wybranych rozwiązań kwantyzatorów przeprowadzonych przy użyciu metody Monte Carlo, co pozwala na uzyskanie histogramów charakteryzujących w pełni losowe właściwości błędu kwantowania.

Słowa kluczowe: kwantowanie, rozkład błędu kwantowania.

Random properties of quantization error in measuring system

Abstract

Digital processing in measuring systems requires, shown in Fig. 1, digitalization of varying in time continuous signals. Quantization of samples is a measuring process, so it should be described in metrological categories. Complete information about inaccuracy of quantization can be given by probabilistic description of error sources arising during this operation [1]. The paper deals with analysis of random properties of quantization errors on example of chosen realizations of quantizers. The analysis has been made by using Monte Carlo method, which permits to obtain, in a relatively simple way, large sets of data that can be presented as histograms. The investigated types of quantizers are shown in Figs. 2, 6 and 8, while the exemplary histograms in Figs. 4, 5, 7 and 9. The histograms can be divided into two categories. The first one describes properties of quantization errors in the situation when the quantized quantity changes randomly in its measuring range. The quantization error in this case has the rectangular or triangle distribution. The second kind of histograms shows properties of errors when the quantized quantity is constant in time. In this case the histograms contains one or two values only so the properties of the errors should be seen as deterministic. Moreover, the shape of histogram depends on the value of the quantized quantity. One may try to average a series of quantization results but the obtained results vary dependently on the measure value, number of the series elements and a kind of the quantize. The general conclusion is that in the second case there is necessary to continue investigations directed to the problems of averaging data obtained from ADC converters.

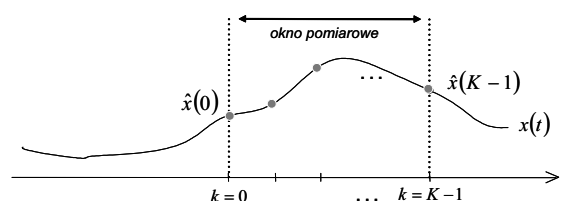
Keywords: quantization, quantization error distribution.

1. Wstęp

We współczesnych systemach pomiarowych dominująca część przetwarzania realizowana jest w sposób programowy, przy użyciu odpowiednich algorytmów wykonujących swoje działania na ciągach wyników pomiaru. Zadania spełniane przez algorytm mogą być interpretowane ogólnie jako przetwarzanie ciągu liczb reprezentujących wartości chwilowe sygnału zmiennego w czasie. Uzyskiwanie w praktyce takich ciągów, nazywane digitalizacją sygnału, jest domeną pomiarów i może być graficznie opisane w sposób pokazany na rys. 1.

Efekt digitalizacji jest zastąpienie fragmentu sygnału analogowego, wycinanego przez okno pomiarowe, ciągiem

liczb $\{\hat{x}(0), \hat{x}(1), \dots, \hat{x}(K-1)\}$ będących skwantowanymi próbkami tego sygnału w wybranych chwilach o numerze $k, k = 0, 1, \dots, K-1$. Zatem sygnał analogowy, ciągły i zmienny w czasie, jest zastępowany ciągiem liczb całkowitych reprezentujących ten sygnał w wybranych chwilach próbkowania. Fizycznie digitalizacja jest procesem składającym się z próbkowania oraz pomiaru próbek na zasadzie kwantowania. Zatem z pomiarowego punktu widzenia podstawowym zagadnieniem jest taki opis kwantowania, aby można było ocenić niepewność jego wyników, a w szczególności wykorzystać ten opis do obliczenia niepewności danych uzyskiwanych w efekcie realizacji algorytmu przetwarzania.



Rys. 1. Graficzna interpretacja digitalizacji sygnału ciągłego i zmiennego w czasie

Fig. 1. Graphical interpretation of digitalization of a continuous and varying in time signal

Przetwarzanie programowe może być rozpatrywane pod kątem zastosowania procedur zmniejszających niedokładność uzyskiwanych wyników. W tym celu stosowane są algorytmy uśredniania, który nazywane są również algorytmami wygładzania danych lub algorytmami filtracji przypadkowych błędów danych. Realizacja uśredniania wymaga spełnienia przez ciąg wyników dwóch wymagań. Przede wszystkim zmienność wyników poddawanych uśrednianiu (czyli objętych oknem pomiarowym) musi być tego rodzaju, aby działanie nie wprowadzało dodatkowych błędów do wyniku końcowego. Dla celów analizy najprościej jest założyć, że przebieg w ramach okna jest praktycznie stały w czasie. Drugie wymaganie dotyczy właściwości błędów, którymi obciążone są wyniki tworzące ciąg danych poddawanych uśrednianiu – błędy te muszą dać się opisywać w kategoriach probabilistycznych.

Podstawowym rodzajem błędu powstającym w procesie kwantowania jest błąd związany z samą istotą tego procesu, czyli błąd kwantowania. Jest on powodowany kwantową budową wzorca [1] używanego do bezpośredniego porównywania z wielkością mierzoną w trakcie pomiaru realizowanego na zasadzie kwantowania. Wzorec taki jest sumą (złożeniem) elementarnych wzorców, nazywanych kwantami, o jednakowych wartościach wielokrotnie mniejszych od zakresu pomiarowego. Liczba kwantów przyporządkowanych wielkości mierzonej stanowi niemianowane wskazanie kwantyzatora. Z analizy procesu kwantowania wynika, że błąd kwantowania opisuje zależność:

$$\delta_q = x - \hat{x}, \quad (1)$$

gdzie x jest wartością wielkości mierzonej, a \hat{x} wskazaniem mianowanym kwantyzatora uzyskiwanym jako:

$$\hat{x} = N \cdot q, \quad (2)$$

w którym N oznacza liczbę kwantów przyporządkowanych wielkości mierzonej, a q jest wartością kwantu.

Właściwości błędu kwantowania zależą od pomiarowych warunków procesu kwantowania oraz od sposobu jego realizacji.

Jak pokazano to w pracy [1], przyjęcie założenia, że wielkość kwantowana przyjmuje wartości jednakowo prawdopodobne w całym zakresie pomiarowym skutkuje występowaniem błędu kwantowania o losowo zmieniających się wartościach. Oznacza to, że jeżeli zastosuje się model wyniku pomiaru, otrzymany po przekształceniu wyrażenia (1), w postaci:

$$x = \hat{x} + \delta_q, \quad (3)$$

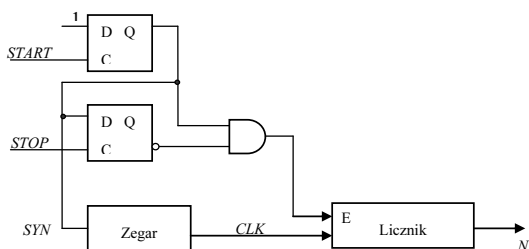
to wówczas wynik ten może być interpretowany jako suma mianowanego wskazania kwantyzatora i realizacji błędu losowego pobranej z populacji o znanym rozkładzie, właściwym dla użytego kwantyzatora.

Z opisu powyższej sytuacji wynika, że zmienność wielkości kwantowanej skutkuje występowaniem losowego błędu kwantowania. Inaczej jest w przypadku, gdy wielkość mierzona nie zmienia się w kolejnych cyklach kwantowania. Uzyskiwany ciąg wskazań jest wówczas taki sam, co oznacza zgodnie z zależnością (1), że realizacje błędu kwantowania kolejnych wyników są jednakowe. Jednak w stosowanych w praktyce rozwiązaniach kwantyzatorów występują różnego rodzaju czynniki losowe, w związku z czym nie można jednoznacznie rozstrzygnąć czy właściwości błędu kwantowania są w takim przypadku losowe lub nie, jeżeli nie przeprowadzi się analizy procesu kwantowania odpowiedniej dla danej konstrukcji kwantyzatora.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie wyników wstępnych badań mających na celu analizę wybranych, typowych rozwiązań kwantyzatorów po kątem możliwości uzyskania losowego opisu błędów kwantowania. Rozpatrywane są dwa przypadki: gdy wielkość mierzona zmienia się w kolejnych cyklach kwantowania oraz gdy przyjmuje stałe wartości. Badania zrealizowano w sposób symulacyjny z użyciem metody Monte Carlo, co pozwala na uzyskiwanie dużych ilości danych stosunkowo prostymi środkami. Efektem tych badań są rozkłady błędów w postaci histogramów, dzięki czemu możliwa jest bezpośrednia weryfikacja hipotezy o losowości tych błędów.

2. Błędy synchronicznego i asynchronicznego kwantowania odcinka czasu

Jednym z najprostszych i często stosowanych rozwiązań kwantyzatorów jest układ do pomiaru odcinka czasu na zasadzie zliczania impulsów zegarowych, które w tym rozwiązaniu spełniają funkcje kwantów czasu. Kwantowanie można realizować w sposób synchroniczny i asynchroniczny. Schemat blokowy układu z synchronizacją generowania impulsów zegarowych z początkiem procesu kwantowania pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Schemat blokowy układu do pomiaru odcinka czasu z synchronizacją początku kwantowania.

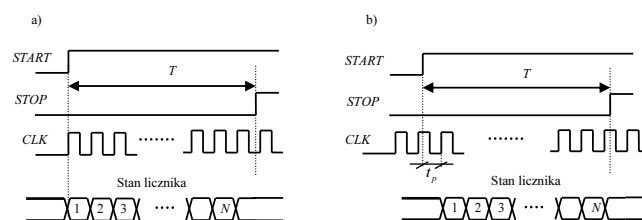
Fig. 2. Block-diagram of a time interval measuring instrument with synchronization of quantization process beginning

Mierzony odcinek czasu ograniczony jest momentami występowania następujących zboczy sygnałów *START* i *STOP*, jak to pokazano na rys. 3a. W chwili pojawienia się zbocza sygnału *START* pojawia się impuls *SYN* inicjujący generowanie impulsów przez zegar, które są zliczane przez licznik tak długo, dopóki jego wejście zezwalające *E* jest w stanie aktywnym.

Po zakończeniu zliczania wynik pomiaru \hat{T} odcinka czasu T uzyskuje się mnożąc liczbę zliczonych impulsów N przez wartość kwantu czasu $t_q = 1/f_w$, gdzie f_w jest częstotliwością zegara. Zatem błąd kwantowania ma postać:

$$\delta_q = T - \hat{T} = T - N \frac{1}{f_w}. \quad (4)$$

Zależność (4) pokazuje, że w przypadku, gdy wielokrotnie mierzony jest taki sam odcinek czasu błąd kwantowania ma zawsze taką samą wartość, chociaż nie jest ona znana ($T = const.$ jednak nie wiadomo ile wynosi jego wartość). Zatem w tej sytuacji nie ma sensu próba zmniejszania wartości tego błędu przez operację uśredniania ciągu wyników pomiaru tego samego odcinka czasu.

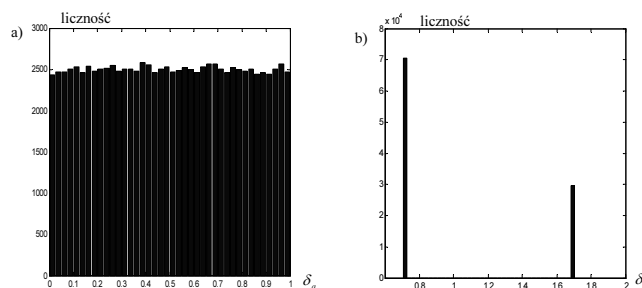


Rys. 3. Ilustracja graficzna przebiegu kwantowania w układzie a) z synchronizacją zegara z początkiem zliczania, b) bez synchronizacji

Fig. 3. Graphical interpretation of the quantization process in the instrument a) with synchronization of the clock and the beginning of counting, b) without the synchronization

Gdy przeprowadzi się eksperyment symulacyjny przy założeniu, że kolejne mierzone odcinki czasu zmieniają się losowo w zakresie pomiarowym, określonym przez pojemność licznika, to otrzyma się histogram błędu pokazany na rys.4a. Histogram ten pokazuje licznosc występowania wartości błędu kwantowania w eksperymencie składającym się 100 000 kroków, z których każdy polega na obliczeniu wartości tego błędu dla losowo wybranej wartości mierzonego odcinka czasu, przy założeniu, że prawdopodobieństwo wystąpienia dowolnej wartości z zakresu pomiarowego jest takie same. Na osi poziomej histogramów odkładane są wartości błędu kwantowania obliczane przy założeniu, że mierzone odcinki czasu zmieniają się w zakresie od 0 do 1000, a pojemność licznika wynosi 1000 impulsów.

Z rys. 4a wynika, że błąd kwantowania ma w tym przypadku rozkład jednostajny. Tą właściwość błędu należy interpretować w taki sposób, że pojedynczy wynik pomiaru odcinka czasu o dowolnej wartości z zakresu pomiarowego obarczony jest losowym błędem kwantowania o rozkładzie pokazanym na rys. 4a.



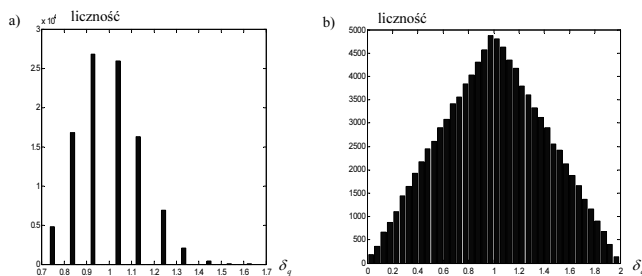
Rys. 4. Przykładowe histogramy błędów kwantowania a) dla synchronicznego pomiaru odcinka czasu o wartościach losowo zmiennych w zakresie pomiarowym, b) dla asynchronicznego pomiaru odcinków czasu o takich samych wartościach

Fig. 4. Exemplary histograms of quantization error a) for synchronous measuring of a time interval randomly changing in the measuring range, b) for asynchronous measuring of the same time intervals

Układ pokazany na rys. 2 może być stosowany do asynchronicznego pomiaru odcinka czasu, jeżeli zrezygnuje się z synchronizacji początku procesu kwantowania sygnałem *SYNC*. Przebiegi sygnałów w takim przypadku pokazuje rys. 3b. Odległość chwili pojawienia się impulsu *START* do chwili pojawienia się pierwszego aktywnego zbocza sygnału zegarowego, oznaczona jako t_p , ma charakter losowy. Dla celów eksperymentu przyjęto, że ma ona rozkład jednostajny w zakresie od 0 do T_w , gdzie T_w jest okresem impulsów zegarowych.

Przeprowadzono dwa rodzaje eksperymentów symulacyjnych, podobnie jak w przypadku kwantyzatora synchronicznego. Pierwszy rodzaj dotyczył sytuacji, gdy wszystkie mierzone odcinki czasu mają takie same wartości. Przykładowy histogram błędu kwantowania dla takiego przypadku pokazano na rys. 4b. Wyniki eksperymentów wskazują, że błąd ten ma rozkład dwuwartościowy, a wartości te, jak również wysokości słupków, zależą od wartości mierzonego odcinka czasu. Odległość między słupkami histogramu jest stała i wynosi 1 kwant. Te właściwości wskazują na deterministyczny charakter błędu kwantowania. Można jednak wskazać także losową właściwość tego rodzaju błędów, gdy weźmie się długi ciąg wyników kwantowania. Mianowicie sekwencje występowania poszczególnych wartości błędu mają charakter losowy. Oznacza to, że jeżeli z długiego ciągu wyników będzie się wycinać jednakowe fragmenty składające się z n wyników, a następnie wyliczy się ich wartość średnią, to uzyska się efekt, który można rozpatrywać w kategoriach filtracji błędów losowych. Przykładowy histogram błędu średniej z 10 kolejnych wyników pokazano na rys. 5a. Istotną właściwością tego błędu jest zależność jego rozkładu od wartości mierzonego odcinka czasu.

Drugi rodzaj eksperymentu przeprowadzono dla odcinków czasu o wartościach losowo zmiennych w zakresie pomiarowym. Błąd ma wówczas charakter losowy, a jego histogram przedstawia rys. 5b.



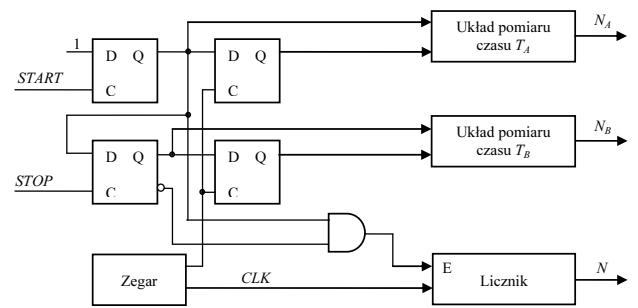
Rys. 5. Przykładowe histogramy błędu kwantowania dla asynchronicznego pomiaru odcinka czasu, a) o takich samych wartościach z uśrednianiem 10 kolejnych wyników, b) o wartościach losowo zmiennych w zakresie pomiarowym

Fig. 5. Exemplary histograms of quantization error a) for asynchronous measuring of the same time intervals with averaging 10 succeeding results, b) randomly changing in the measuring range

3. Błąd kwantowania pomiaru odcinka czasu metodą różnicową

Zasadę pomiaru odcinka czasu metodą różnicową, nazywaną również metodą Nutta i powszechnie stosowaną do pomiaru bardzo krótkich odcinków czasu z rozdzielczością rzędu pikosekund [2, 3], przedstawiono na rys. 6.

Istota metody Nutta polega na wytworzeniu wzorcowego odcinka czasu o długości różniącej się od długości odcinka mierzonego o nie więcej niż 1 okres generatora wzorcowego, a następnie na zmierzeniu odległości T_A i T_B początku i końca tego odcinka od najbliższych aktywnych zboczy impulsów zegara wzorcowego. Specyfika pomiaru różnicowego powoduje, że niedokładność pomiaru tych odległości może być relatywnie duża.



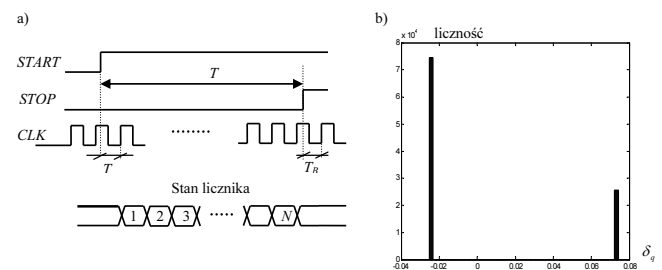
Rys. 6. Schemat blokowy układu do pomiaru odcinka czasu metodą Nutta
Fig. 6. Block-diagram of the quantizer using the Nutt method

Opis metod stosowanych w przypadku pomiaru krótkich odcinków czasu można znaleźć w pracy [4]. Przebiegi sygnałów podczas procesu kwantowania pokazuje rys. 7a.

Wynik pomiaru w metodzie Nutta określa się na podstawie zależności:

$$\hat{T} = N \cdot T_w + T_A - T_B, \quad (5)$$

gdzie N jest zawartością licznika odmierzającego wzorcowy odcinek czasu, a T_w jest okresem impulsów zegarowych. Dla celów eksperymentalnych przyjęto, że czasy T_A i T_B mierzone są niezależnie metodą koincydencyjną [] przy użyciu impulsów zegarowych o częstotliwościach f_c i $0,9f_c$, co odpowiada pomiarowi tych czasów z częstotliwością zegara równą $10f_w$.



Rys. 7. a) Zasada pomiaru odcinka czasu metodą Nutta, b) przykładowy histogram błędu kwantowania dla $T = const$.

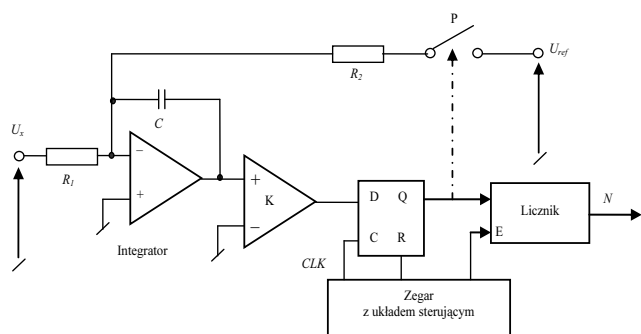
Fig. 7. a) The principle of time interval measurement using the Nutt method, b) exemplary histogram of the quantization error for $T = const$.

Na rys. 7a pokazano przykładowy histogram błędu kwantowania dla pomiarów odcinków czasu o takich samych wartościach. W przypadku pomiaru odcinków czasu o wartościach zmieniających się losowo w zakresie pomiarowym uzyskano histogram o takim samym kształcie jak na rys. 5b. Można zatem powiedzieć, że pomiar odcinka czasu zarówno metodą Nutta, jak i w sposób asynchroniczny, charakteryzują się podobnymi właściwościami błędu kwantowania (różnią się jedynie składową systematyczną, która w metodzie Nutta jest równa zeru).

4. Błąd kwantowania przetwornika sigma-delta

Przetworniki sigma-delta wykorzystywane są do pomiaru napięć z dużą dokładnością. Istnieje wiele rozwiązań układowych tego rodzaju przetworników. Dla celów pracy wybrano rozwiązanie pokazane na rys. 8 [5], które charakteryzuje się prostotą i tym samym jest stosunkowo łatwo użyć go w badaniach symulacyjnych.

Przetwornik sigma-delta działa na zasadzie kompensacji ładunku pobieranego ze źródła napięcia mierzonego U_x przez kwanty ładunku dostarczane ze źródła napięcia wzorcowego U_{ref} .



Rys. 8. Schemat badanego kwantyzatora sigma-delta
Fig. 8. Scheme of the investigated sigma-delta quantizer

Kwantowanie odbywa się w integratorze i jest synchronizowane impulsami zegarowymi, a liczba kwantów N dostarczonych do integratora zliczana jest przez licznik. Kwant ładunku jest przekazywany do integratora w stanie załączenia przełącznika P , który jest sterowany przez przerzutnik typu D ustawiany w stan 1 przednim zboczem impulsu zegarowego w przypadku, gdy napięcie na wyjściu integratora jest większe od zera oraz zerowany każdym tylnym zboczem tego impulsu. Zatem 1 kwant ładunku ma wartość

$$q = \frac{U_{ref} \cdot T_w}{R_2 \cdot 2}, \quad (6)$$

gdzie T_w jest okresem impulsów zegarowych.

Czas kwantowania T określony jest przez pojemność licznika i stanowi krotność okresu zegara. Załóżmy, że $T = k_z T_w$. W takim przypadku można przyjąć, że po zakończeniu kwantowania nieskompensowana część ładunku integratora jest bardzo mała, czyli zachodzi

$$\frac{U_x}{R_1} k_z T_w \approx \frac{U_{ref} \cdot T_w}{R_2 \cdot 2} N. \quad (7)$$

Na podstawie zależności (7) można wyznaczyć wyrażenie określające związek wskazania mianowanego kwantyzatora z liczbą zliczonych impulsów N . Ma ono postać:

$$\hat{U}_x = \frac{R_1 \cdot U_{ref}}{R_2 \cdot 2k_z} N. \quad (8)$$

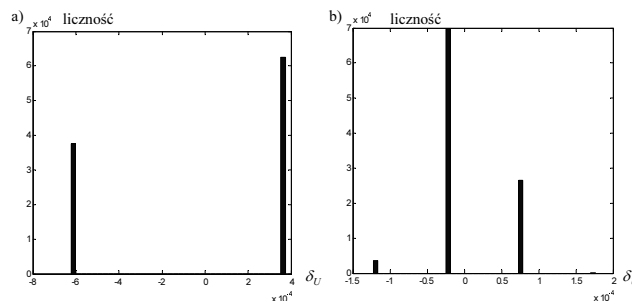
Zgodnie z ogólną zależnością (2), z równania (8) wynika, że kwant napięcia przetwornika sigma-delta opisuje wyrażenie:

$$q_U = \frac{R_1 \cdot U_{ref}}{R_2 \cdot 2k_z}. \quad (9)$$

Tego rodzaju kwant można określić jako najmniejszą rozróżnialną wartość napięcia mierzonego, jednak jego interpretacja fizyczna jest trudna ze względu na to, że w przetworniku sigma-delta występuje wstępne przetwarzanie napięcia na ładunek, który w drugiej fazie jest poddawany kwantowaniu. Zależność (9) jest jednak bardzo użyteczna, gdyż pokazuje jakie czynniki, i w jaki sposób, wpływają na wartość „pozornego” kwantu napięcia. Wynika z niej, między innymi, że wartość kwantu napięcia może być kształtowana przez dobór czasu kwantowania (pojemności licznika). Wydłużanie tego czasu powoduje zmniejszenie wartości kwantu napięcia, a tym samym zmniejszenie błędu kwantowania. Jest to istotna właściwość przetworników sigma-delta, dzięki której osiągają one małą dużą dokładność.

W celu przeprowadzenia eksperymentów symulacyjnych przyjęto, że $R_1 = R_2$, $U_{ref} = 2V$, a pojemność licznika wynosi 1000 impulsów. Napięcie mierzone, dla tak przyjętych wartości parametrów przetwornika, może zmieniać się w zakresie od 0 do 2 V.

Na rys. 9a pokazano przykładowy histogram błędu kwantowania napięcia o stałej wartości. Kwantowanie zrealizowano 100 000 razy, przyjmując że ładunek pozostawiony na kondensatorze po poprzednim kwantowaniu stanowi wartość początkową ładunku dla kolejnego kwantowania. Rys. 9b przedstawia histogram błędu w przypadku, gdy kolejnych 10 wyników kwantowania poddano uśrednieniu. Histogram błędu kwantowania dla losowo zmiennych wartości napięcia mierzonej ma rozkład jednostajny.



Rys. 9. Przykładowe histogramy błędów kwantowania przetwornika sigma-delta dla stałych wartości mierzonego napięcia, a) bez uśredniania, b) z uśrednieniem 10 kolejnych wyników

Fig. 9. Exemplary histograms of the sigma-delta quantizer errors a) without averaging, b) with averaging 10 succeeding results

5. Uwagi końcowe i wnioski

Z analizy uzyskanych histogramów wynika, że dla wielkości mierzonej zmieniającej się w zakresie pomiarowym błąd kwantowania ma charakter losowy o rozkładzie jednostajnym lub trójkątnym zależnie od sposobu działania kwantyzatora. W takim przypadku model w postaci równania (1) może być stosowany do opisu pojedynczego wyniku kwantowania. Jednak gdy mierzona wielkość jest stała, to błąd kwantowania ma rozkład jedno lub dwuwartościowy zależny od wartości wielkości kwantowanej. Operacja uśredniania ciągu wyników prowadzi wówczas do uzyskania wielowartościowego rozkładu błędów kwantowania, który nie daje się opisać jednoznacznie, gdyż zależy zarówno od liczby wyników w ciągu, jak i wartości wielkości mierzonej. Wstępna analiza wskazuje, że tak uzyskane rozkłady są trudne do interpretacji probabilistycznej.

Z przeprowadzonych badań oraz studiów literaturowych wynika ogólny wniosek, że aktualny stan wiedzy odnośnie właściwości błędów kwantowania różnych rozwiązań kwantyzatorów w określonych warunkach pomiarowych jest niewystarczający, aby można było jednoznacznie wskazać reguły składania tych błędów z innymi błędami powstającymi w procesie kwantowania. Uwaga to dotyczy to przede wszystkim operacji uśredniania ciągu wyników. Niezbędne jest zatem podjęcie dalszych badań w celu uzyskania losowego opisu błędów kwantowania przydatnego dla celów wyznaczania niepewności danych w systemie.

6. Literatura

- [1] Jakubiec J.: Błędy i niepewność wyniku kwantowania. PPM'03. Prace Komisji Metrologii Oddz. PAN w Katowicach. Seria: Konf. Nr 5. Gliwice-Ustroń, 11-14.05.2003, ss. 369-382.
- [2] Nutt R.: Digital time intervalometer. Rev. Sci. Instrum., Vol. 39. No. 9, Sept. 1968, pp. 1532-1345.
- [3] Szymanowski R.: Wpływ błędów kwantyzacji na niepewność pomiarową w interpolacyjnym liczniku czasu. PAK Nr 9 bis, 2006, ss. 74-76.
- [4] Kalisz J., Pełka R., Szplet R.: Problemy projektowe w precyzyjnej metrologii odcinków czasu. Mat. MWK'2001. Tom 1. Wykłady. Rynia 21-24.05.2001, ss. 117-165.
- [5] P. Horowitz, W. Hill.: Sztuka Elektroniki. T 2. WKŁ Warszawa, 2003.