

Krzysztof NOZDRZYKOWSKI  
 AKADEMIA MORSKA W SZCZECINIE

## Nowe ujęcie matematycznego zapisu zarysu okrągłości przy podparciu dwupryzmowym

Dr inż. Krzysztof NOZDRZYKOWSKI

Dr inż. Krzysztof Nozdrzykowski jest kierownikiem Zakładu Podstaw Budowy i Eksploatacji Maszyn Instytutu Nauk Podstawowych Technicznych Akademii Morskiej w Szczecinie. Jego działalnością naukową objęte są zagadnienia metrologii, makro- i mikrogeometrii powierzchni ze szczególnym uwzględnieniem pomiarów błędów kształtu i położenia osi cylindrycznych dużych elementów maszyn.



e-mail: [inpt@am.szczecin.pl](mailto:inpt@am.szczecin.pl)

### Streszczenie

W artykule przedstawiono nowe ujęcie matematycznego zapisu zarysu okrągłości odpowiadające pomiarom cylindrycznych elementów maszyn podpartych w dwóch pryzmach. W oparciu o opracowany schemat pomiarów odniesieniowych, uwzględniający związki kątowe pomiędzy promieniem zarysów okrągłości wyprowadzone zostały wzory mające zastosowanie w symulacyjnych obliczeniach mierzonej odchyłki okrągłości  $\Delta z_3$  oraz wartości współczynnika wykrywalności  $kn_3$ .

**Słowa kluczowe:** pomiary, zarys okrągłości.

### A new approach to mathematical description of roundness shape by two-prism support

#### Abstract

In the paper was shown a new approach to mathematical description of roundness shape corresponding to measurements of cylindrical machinery parts supported onto two prisms. Basing on reference measurement schema, taking in regard angular relations between radius of roundness shape, the formulae used in simulating computations of measured roundness deviation  $\Delta z_3$  as well as detectability coefficient  $kn_3$  were presented.

**Keywords:** measurements, roundness shape.

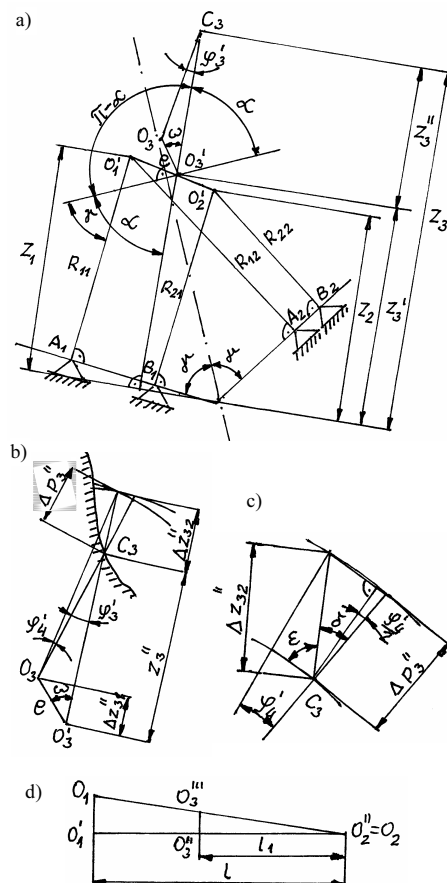
### 1. Wstęp

Jednym z najczęściej stosowanych sposobów ustalenia długich i ciężkich wałów jest ich ustalenie w dwóch a niekiedy w kilku pryzmach. Podparcie w pryzmach powoduje jednak przemieszczanie bazowanego w nich elementu cylindrycznego. Prowadzi to do tego, iż wyniki pomiarów są niekiedy w mniejszym lub większym stopniu zniekształcane [1, 2]. Zniekształcenie to uzależnione jest od dwóch grup powiązanych wzajemnie parametrów: parametrów układu pomiarowego oraz parametrów obiektu mierzonego. Do pierwszej grupy parametrów należy zaliczyć: wielkości kątowe i liniowe wzajemnego usytuowania punktów podparcia (podwójny kąt rozwarcia pryzmy  $2\gamma$  i odległość między pryzmami ustalającymi  $l$ ) oraz punktów pomiarowych (kątowe usytuowanie końcówki pomiarowej czujnika względem przyjętego układu współrzędnych  $\alpha$  i współrzędna określająca położenie przekroju mierzonego  $l_1$ ). Wychodząc z analizy harmonicznej błędów okrągłości i przedstawiając zarys kołowy w układzie współrzędnych biegunowych, którego środek pokrywa się z osią obrotu mierzonego obiektu, drugą grupę parametrów tworzą: amplitudy odchyłek zarysu kształtu okrągłości przekrojów ustalonych w pryzmach i przekroju mierzonego  $An_1, An_2, An_3$  oraz ich graniastości  $n_1, n_2$  i  $n_3$ . Razem te dwie grupy parametrów noszą nazwę parametrów układu. Miarą zniekształcenia pomiarów błędów geometrycznych jest tzw. współczynnik zniekształcenia nazywany też współczynnikiem wykrywalności  $k_n$ , wyrażony stosunkiem zmierzonej wartości odchyłki kształtu do jej wartości rzeczywistej [3, 4, 5].

### 2. Nowe ujęcie modelu matematycznego zapisu zarysu okrągłości przy podparciu dwupryzmowym

Przyjęty w dotychczasowych opracowaniach [2, 6] model matematyczny zapisu zarysu okrągłości przy podparciu w dwóch pryzmach nie uwzględniał możliwości wystąpienia mimośrodowości spowodowanej np.: nie pokrywaniem się środka obrotu przekroju mierzonego z osią obrotu realizowaną przez układ pomiarowy. W pomiarach praktycznych niewspółodkowość (określona mimośrodowością  $e$ ) jest często nie do wyeliminowania i może przyjmować znaczne wartości, w niektórych pomiarach elementów maszyn (zespołu czopów głównych wału korbowego) niewspółodkowość jest nieodłącznym elementem pomiarów, wynikającym z konstrukcji i technologii wykonania tych elementów. Prowadzi to do tego, iż rzeczywiste pomiary są dodatkowo zniekształcone a ich analiza i interpretacja może prowadzić do błędnej oceny mierzonego zarysu okrągłości [5].

Opracowany nowy model matematyczny jest kompleksowym, przejrzystym zapisem drogi przemieszczenia czujnika dokonującego pomiaru zarysu okrągłości przedmiotu cylindrycznego ustalonego w dwóch pryzmach.



Rys. 1. Schemat odniesieniowych metod pomiarów zarysów okrągłości przy podparciu dwupryzmowym, określający związki kątowe pomiędzy promieniami tego zarysu

Fig. 1. Schema of reference measurement of roundness shape by two-prism support, determining angular relations between radii of this shape

Uwzględniając zależności geometryczne wynikające z pomocniczego schematu przedstawionego na rys. 1a i d mierzona umownie odległość  $z_3$  jest równa:

$$z_3 = z_3' + z_3'' \quad (1)$$

przy czym:

$$z_3' = z_2 + \frac{(z_1 - z_2) \cdot l_1}{l} = z_2 \frac{(l - l_1)}{l} + z_1 \frac{l_1}{l} \quad (2)$$

$$z_1 = \left[ \frac{R_{11} \cdot \sin(\gamma + \alpha)}{\sin 2\gamma} - \frac{R_{12} \sin(\gamma - \alpha)}{\sin 2\gamma} \right] \quad (3)$$

$$z_1 = \left[ \frac{R_{21} \cdot \sin(\gamma + \alpha)}{\sin 2\gamma} - \frac{R_{22} \sin(\gamma - \alpha)}{\sin 2\gamma} \right] \quad (4)$$

gdzie:

$$R_{11} = R_{10} + \sum_{n_1=2}^{k_1} A_{n_1} \cos n_1(\varphi + \pi - \alpha + \gamma),$$

$$R_{12} = R_{10} + \sum_{n_1=2}^{k_1} A_{n_1} \cos n_1(\varphi - \alpha + \gamma),$$

$$R_{21} = R_{20} + \sum_{n_2=2}^{k_2} A_{n_2} \cos n_2(\varphi + \pi - \alpha + \gamma),$$

$$R_{22} = R_{20} + \sum_{n_2=2}^{k_2} A_{n_2} \cos n_2(\varphi - \alpha + \gamma).$$

Tak więc:

$$z_3' = \left\{ \left[ R_{10} + \sum_{n_1=2}^{k_1} A_{n_1} \cos n_1(\varphi + \pi - \alpha + \gamma) \right] \frac{\sin(\gamma + \alpha)}{\sin 2\gamma} + \right. \\ \left. - \left[ R_{10} + \sum_{n_1=2}^{k_1} A_{n_1} \cos n_1(\varphi - \alpha + \gamma) \right] \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin 2\gamma} \right\} \frac{l_1}{l} + \\ + \left\{ \left[ R_{20} + \sum_{n_2=2}^{k_2} A_{n_2} \cos n_2(\varphi + \pi - \alpha + \gamma) \right] \frac{\sin(\gamma + \alpha)}{\sin 2\gamma} + \right. \\ \left. - \left[ R_{20} + \sum_{n_2=2}^{k_2} A_{n_2} \cos n_2(\varphi - \alpha + \gamma) \right] \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin 2\gamma} \right\} \frac{(l - l_1)}{l} \quad (5)$$

oraz

$$z_3'' = \sqrt{\left( R_{30} + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3\gamma \right)^2 - e^2 \sin^2(\varphi + \omega) + e \cos(\varphi + \omega)} \quad (6)$$

Jednocześnie:

$$z_3 = z_{R_3} + \Delta z_3 = (z'_{R_3} + z''_{R_3}) + (\Delta z_3' + \Delta z_3'') = \\ = (z'_{R_3} + z''_{R_3}) + (\Delta z_3' + \Delta z_{31}'' + \Delta z_{32}'') \quad (7)$$

Podczas rzeczywistych pomiarów odniesieniowych czujnik pomiarowy dokonuje pomiaru tylko odchyłki okrągłości  $\Delta z_3$ .

Składową  $\Delta z_3'$  mierzonej odchyłki okrągłości  $\Delta z_3$  wyznaczyć można bezpośrednio z zależności (5).

$$\Delta z_3' = \left\{ \left[ \sum_{n_1=2}^{k_1} A_{n_1} \cos n_1(\varphi + \pi - \alpha + \gamma) \right] \frac{\sin(\gamma + \alpha)}{\sin 2\gamma} + \right. \\ \left. - \left[ \sum_{n_1=2}^{k_1} A_{n_1} \cos n_1(\varphi - \alpha + \gamma) \right] \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin 2\gamma} \right\} \frac{l_1}{l} + \\ + \left\{ \left[ \sum_{n_2=2}^{k_2} A_{n_2} \cos n_2(\varphi + \pi - \alpha + \gamma) \right] \frac{\sin(\gamma + \alpha)}{\sin 2\gamma} + \right. \\ \left. - \left[ \sum_{n_2=2}^{k_2} A_{n_2} \cos n_2(\varphi - \alpha + \gamma) \right] \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin 2\gamma} \right\} \frac{(l - l_1)}{l} \quad (8)$$

Składową  $\Delta z_{31}''$  opisuje składowa  $e \cos(\varphi + \omega)$  wzoru (6).

Do wyznaczenia składowej  $\Delta z_{32}''$  posłużono się z kolei schematem przedstawionym na rys. 1b i c. Zgodnie ze schematem rys. 1c:

$$\frac{\Delta p_3'' \cos \frac{\varphi_4'}{2}}{\Delta z_{32}''} = \cos \left( \varphi_3' - \frac{\varphi_4'}{2} \right) \quad (9)$$

gdzie:

$$\Delta p_3'' = \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3\varphi$$

Tak więc:

$$\Delta z_{32}'' = \frac{\sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3\varphi \cdot \cos \frac{\varphi_4'}{2}}{\cos \left( \varphi_3' - \frac{\varphi_4'}{2} \right)} \quad (10)$$

Jednocześnie też rys. 1b

$$\left( \Delta z_{32}'' \right)^2 = R_{30}^2 + \left( R_{30} + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3\varphi \right)^2 + \\ - 2R_{30} \left( R_{30} + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3\varphi \right) \cos \varphi_4' \quad (11)$$

oraz

$$\sin \varphi_3' = \frac{e \sin(\varphi + \omega)}{R_{30} + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3\varphi} \quad (12)$$

$$\cos \varphi_3' = \frac{\sqrt{\left( R_{30} + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3\varphi \right)^2 - e^2 \sin^2(\varphi + \omega)}}{R_{30} + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3\varphi} \quad (13)$$

Rozwiązaniem układu równań (10), (11), (13) jest równanie stopnia czwartego o postaci:

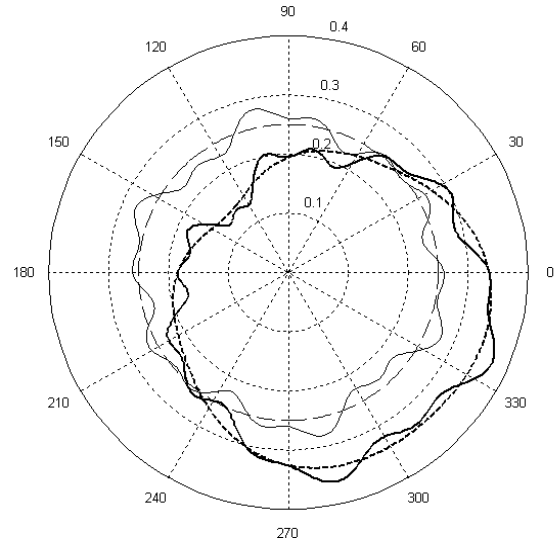
$$\begin{aligned}
& \left[ R_{30} + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3 \varphi \right] \cdot (\Delta z_{32}^n)^4 + \\
& + 2 \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3 \varphi \sqrt{\left( R_{30} + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3 \varphi \right)^2 - e^2 \sin^2(\varphi + \omega)} (\Delta z_{32}^n)^3 + \\
& - \left\{ 4 R_{30} \left[ R_{30} + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3 \varphi \right]^2 - e^2 \sin^2(\varphi + \omega) \right\} (\Delta z_{32}^n)^2 + \\
& + \left\{ 8 R_{30} \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3 \varphi \left( R_{30} + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3 \varphi \right) \cdot \right. \\
& \cdot \sqrt{\left( R_{30} + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3 \varphi \right)^2 - e^2 \sin^2(\varphi + \omega)} + \\
& \left. + 2 \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3}^3 \cos^3 n_3 \varphi \sqrt{\left( R_{30} + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3 \varphi \right)^2 - e^2 \sin^2(\varphi + \omega)} \right\} \Delta z_{32}^n + \\
& - \left[ 4 R_{30} \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3}^2 \cos^2 n_3 \varphi \left( R_{30} + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3 \varphi \right) + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3}^4 \cos^4 n_3 \varphi \right] \cdot \\
& \cdot \left( R_{30} + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3 \varphi \right) \Big\} = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Wyznaczone w środowisku MATLAB pierwiastki równania (14) przyjmują postać złożonych zależności matematycznych mało przydatnych w obliczeniach praktycznych. Biorąc jednak pod uwagę, że kąt  $\varphi_4$  przyjmuje bardzo małe wartości, składową  $\Delta z_{32}^n$  można zapisać następująco:

$$\Delta z_{32}^n = \frac{\sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3 \varphi \left( R_{30} + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3 \varphi \right)}{\sqrt{\left( R_{30} + \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3 \varphi \right)^2 - e^2 \sin^2(\varphi + \omega)}} \tag{15}$$

W pomiarach praktycznych  $e \ll R_{30}$ , ostatecznie więc zmierzoną odchyłkę okrągłości przy podparciu dwupryzmowym z uwzględnieniem mimośrodkowości  $e$  oraz przesunięć fazowych  $\varphi_{n1}$  i  $\varphi_{n2}$  poszczególnych składowych harmonicznych  $n_1$  i  $n_2$  względem  $n_3$  [6] można zapisać w postaci następującej zależności:

$$\begin{aligned}
\Delta z_3 = & \sum_{n_3=2}^{k_3} A_{n_3} \cos n_3 \varphi + e \cos(\varphi + \omega) + \\
& + \left\{ \sum_{n_1=2}^{k_1} A_{n_1} \cos n_1(\varphi + \pi - \alpha + \gamma + \varphi_{n1}) \frac{\sin(\gamma + \alpha)}{\sin 2\gamma} + \right. \\
& - \sum_{n_1=2}^{k_1} A_{n_1} \cos n_1(\varphi - \alpha - \gamma + \varphi_{n1}) \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin 2\gamma} \Big\} \frac{l_1}{l} + \\
& + \left\{ \sum_{n_2=2}^{k_2} A_{n_2} \cos n_2(\varphi + \pi - \alpha + \gamma + \varphi_{n2}) \frac{\sin(\gamma + \alpha)}{\sin 2\gamma} + \right. \\
& - \sum_{n_2=2}^{k_2} A_{n_2} \cos n_2(\varphi - \alpha - \gamma + \varphi_{n2}) \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin 2\gamma} \Big\} \frac{(l - l_1)}{l}
\end{aligned} \tag{16}$$



Rys. 2. Przykład graficznej interpretacji mierzonych zarysów okrągłości bez i z uwzględnieniem mimośrodkowości oraz idealnego rzeczywistego zarysu niezdeformowanego

Fig. 2. An example of the graphic interpretation of measured roundness without and with taking in consideration of eccentricity and ideal and real non-deformed shape

Na rys. 2 przedstawiono przykład graficznej interpretacji zapisu matematycznego mierzonego zarysu okrągłości przy podparciu dwupryzmowym opisanego zależnością (16). Na rys. 2 przedstawiono również dla porównania ten sam zarys mierzony bez mimośrodkowości  $e$  (linia cienka) oraz idealny rzeczywisty zarys nie zdeformowany (linia gruba kreskowana).

### 3. Podsumowanie

Stworzony model matematyczny jest kompleksowym, uniwersalnym narzędziem przeznaczonym do symulacyjnych obliczeń komputerowych mierzonej odchyłki okrągłości a w konsekwencji współczynnika zniekształcenia  $kn$ , który jest niezbędny do prawidłowej oceny geometrycznej rzeczywistej odchyłki zarysu kształtu cylindrycznych elementów maszyn ustalonych w dwóch pryzmach.

### 4. Literatura

- [1] K. Nozdrzykowski: Analiza błędów graficznej interpretacji zarysów okrągłości. Zeszyty Naukowe Nr 10(82), Akademia Morska w Szczecinie, Szczecin 2006.
- [2] K. Nozdrzykowski: Ocena zniekształcenia pomiarów błędów kształtu czopów głównych wału korbowego ustalonego w pryzmach. IX Konferencja Naukowo Techniczna –Metrologia w Technikach Wytwarzania Maszyn, Tom 2, Politechnika Częstochowska 2001.
- [3] S. Adamczak: Odniesieniowe metody pomiaru zarysów okrągłości części maszyn. Monografie, Studia, Rozprawy, Politechnika Świętokrzyska, Kielce 1998.
- [4] S. Fita: Analiza błędów metod pomiaru kształtu przedmiotu o przekroju kołowym. Rozprawa doktorska, Politechnika Wroclawska 1972.
- [5] A. Steger: Über Möglichkeiten und Grenzen der Dreipunktmessung zur Bestimmung der Formabweichung von Kreis. Dissertation. TH Chemnitz 1978.
- [6] K. Nozdrzykowski: Analiza wpływu parametrów układu pomiarowego na wartość współczynnika zniekształcenia. Przegląd Mechaniczny 9/2005.