

Kazimierz BRYDAK, Mykhaylo DOROZHOVETS  
POLITECHNIKA RZESZOWSKA, ZAKŁAD METROLOGII I SYSTEMÓW POMIAROWYCH

## Metoda wyznaczania macierzy wrażliwości w tomografii elektrycznej przy aproksymacji elementami skończonymi

Mgr. inż. Kazimierz BRYDAK

Jest absolwentem (1978) Wydziału Elektrycznego Politechniki Rzeszowskiej – specjalność metrologia i automatyka. Jest zatrudniony na stanowisku starszego wykładowcy w Zakładzie Metrologii i Systemów Pomiarowych. W pracy naukowo-badawczej zajmuje się zagadnieniami pomiarów tomograficznych, problemami przetwarzania sygnałów pomiarowych w mikrokontrolerach analogowych.



e-mail: brydak@prz.eu.pl

Prof. dr hab. inż. M. DOROZHOVETS

Jest absolwentem (1975) Katedry Techniki Informatyczno-Pomiarowej Politechniki Lwowskiej. Doktorat nauk technicznych uzyskał w 1986 r., a w 2001 r. obronił habilitację. Obecnie jest profesorem w Politechnice Lwowskiej i w Zakładzie Metrologii i Systemów Pomiarowych Politechniki Rzeszowskiej. Prowadzi prace naukowo-badawcze z dziedziny pomiarów tomograficznych, przetwarzania sygnałów pomiarowych oraz analizy i oceny niepewności wyników pomiarów.



e-mail: michdor@prz.edu.pl

### Streszczenie

W pracy przedstawiono podstawowe problemy spotykane podczas wyznaczania macierzy wrażliwości w tomografii elektrycznej. W ogólnym przypadku przy obliczaniu elementów Jakobianu metodami numerycznymi towarzyszą błędy spowodowane aproksymacją zagadnień polowych związanych z ograniczoną liczbą elementów skończonych, aproksymacją skończonych różnic przy obliczaniu numerycznym pochodnych (obliczanie nachylenia siecznej a nie stycznej) i powodowane niedokładnością obliczania różnicy dwóch bliskich wartości napięć międzyelektrodowych (ograniczenia precyzji reprezentacji liczb w procesorze komputera). Zaproponowano szybszą i bardziej precyzyjną metodę obliczania macierzy Jacobiego bez błędów metody wykorzystującą własności ekwiwalentnych sieci elektrycznych elementów skończonych.

**Słowa kluczowe:** tomografia elektryczna, macierz Jacobiego, macierz wrażliwości, sieci elektryczne.

### Sensitivity matrix in electrical tomography calculation method by approximation finite elements

#### Abstract

This article describes basic problems that appear during the sensitivity matrix in electrical tomography calculation. Generally, there occur errors during Jacobian matrix elements calculation. Those errors are results of field problems with limited number finite elements approximation, difference finite during numerical derivation (calculation secant gradient versus secant) approximation, and inaccurate two relative voltage values between electrodes (limitation of precision numerical representation in the computer processor) difference calculation. The fast and precise Jacobian matrix calculation method with no methodical error for the aid of equivalent electrical grid finite elements is proposed.

**Keywords:** electrical tomography, Jacobian matrix, sensitivity matrix, electrical grid.

### 1. Wybrane problemy wyznaczania wrażliwości w tomografii elektrycznej

Tomografia elektryczna wykorzystywana jest do wyznaczania rozkładów przestrzennych, np. dwuwymiarowych w płaszczyźnie  $(x,y)$  parametrów elektrycznych  $p(x,y)$  takich jak: rezystywności  $\rho(x,y)$ , konduktywności  $\gamma(x,y)$  lub stałej dielektrycznej  $\epsilon(x,y)$  wewnątrz badanego obiektu, wykorzystując wyniki pomiarów wielkości elektrycznych (na przykład potencjałów  $U$ ) na obrzeżu obiektu przy jego zewnętrznym pobudzeniu (na przykład prądowym  $I$ ). W przypadku środowiska przewodzącego  $p(x,y)=\gamma(x,y)$  podstawą do rozwiązań zagadnień tomografii jest zagadnienie polowe elektryczne, które jest opisywane prawem Ohma [1]

$$\mathbf{j}(x,y) = \gamma(x,y) \cdot \mathbf{E}(x,y) = -\gamma(x,y) \mathbf{grad} \varphi(x,y), \quad (1)$$

gdzie:

$\varphi(x,y)$  - jest rozkładem potencjału;  
 $\mathbf{j}(x,y)$  - jest wektorem gęstości prądu;  
 $\mathbf{E}(x,y)$  - jest wektorem natężenia pola elektrycznego.

Istnieje wiele metod wyznaczania poszukiwanego rozkładu przestrzennego  $\gamma(x,y)$ , w których bezpośrednio lub pośrednio są wykorzystywane funkcje wrażliwości wyników pomiaru  $U$  względem lokalnych zmian konduktywności  $\gamma$  [5, 9]:

$$J = \frac{\partial U}{\partial \gamma}. \quad (2)$$

W ogólnym przypadku niejednorodnego rozkładu konduktywności  $\gamma(x,y)$  równanie (1) nie może być rozwiązane bezpośrednio analitycznie i dlatego funkcja wrażliwości (2) też nie może być obliczona analitycznie. W praktyce, w tym celu są wykorzystywane metody numeryczne, najczęściej bazowane na metodzie elementów skończonych (MES) z wcześniejszą aproksymacją rozkładu potencjału i rozkładu konduktywności [3, 9, 11]. W procesie wyznaczania funkcji wrażliwości realizowany jest proces zastępowania badanej przestrzeni siatką elementów, najczęściej w postaci elementów trójkątnych lub czworokątnych, o niezmiennym rozkładzie przestrzennym wewnątrz elementu ( $\gamma_j(x,y)=\text{const}$ ). W wyniku takiej aproksymacji przestrzeni funkcja wrażliwości przyjmuje postać macierzy, której elementy można wyznaczać definitywnie z przybliżonej zależności:

$$J_{i,j} \approx \frac{\Delta U_i}{\Delta \gamma_j} = \frac{U_i(\gamma_j + \Delta \gamma) - U_i(\gamma_j)}{\Delta \gamma_j}, \quad (3)$$

gdzie:

$\gamma_j$  - jest konduktywnością  $j$ -tego elementu aproksymacyjnego;  
 $\Delta \gamma_j$  - jest przyrostem konduktywności tego elementu;  
 $\Delta U_i = U_i(\gamma_j + \Delta \gamma) - U_i(\gamma_j)$  - jest przyrostem wartości napięcia pomiędzy  $i$ -tą parą elektrod pomiarowych;  
 $U_i(\gamma_j)$ ,  $U_i(\gamma_j + \Delta \gamma)$  - są wartościami różnicy potencjałów pomiędzy  $i$ -tą parą elektrod przy wartościach konduktywności  $\gamma_j$  oraz  $\gamma_j + \Delta \gamma_j$   $j$ -tego elementu odpowiednio.

W praktycznych zastosowaniach wymagane jest obliczanie elementów macierzy wrażliwości:

- szybko
  - dokładnie,
- a procesy obliczeniowe realizowane metodami iteracyjnymi wymagają również większego nakładu obliczeniowego.

W ogólnym przypadku obliczaniu elementów Jakobianu wg (3) towarzyszą następujące typy błędów:

- spowodowany aproksymacją zagadnienia polowego ograniczoną liczbą elementów skończonych;
- spowodowany aproksymacją skończonych różnic przy obliczaniu pochodnej ( $\Delta\gamma_j \neq 0$ ) według wyrażenia (3) – obliczanie nachylenia siecznej a nie stycznej,
- spowodowany niedokładnością obliczania różnicy dwóch bliskich wartości napięć między elektrodowych  $\tilde{U}_i(\gamma_j + \Delta\gamma)$  i  $\tilde{U}_i(\gamma_j)$ , na przykład w wyniku ograniczeń długości liczb w procesorze komputera.

Pierwszy komponent może być zmniejszony poprzez odpowiedni wybór liczby i kształtu elementów skończonych. Na ogół te parametry decydują o przestrzennej rozdzielczości następnego odtwarzania obrazu rozkładu konduktywności. Jednak zwiększenie liczby elementów powoduje wzrost nakładów obliczeniowych proporcjonalnie co najmniej do ich trzeciej potęgi.

Drugi komponent może być zmniejszony poprzez zmniejszenie wartości przyrostów  $\Delta\gamma_j$  elementów. Jednak determinuje to wzrost trzeciej składowej błędów, a mianowicie błędów obliczania różnicy dwóch bliskich wartości funkcji napięciowej  $\tilde{U}_i(\gamma_j + \Delta\gamma)$  i  $\tilde{U}_i(\gamma_j)$ , co w konsekwencji może powodować znaczny wzrost błędów w obliczeniach elementów Jakobianu.

## 2. Ekwiwalentne sieci elektryczne elementów skończonych

Dwa ostatnie problemy w dokładnym obliczaniu elementów Jakobianu mogą być skutecznie rozwiązane przez zastosowanie elektrycznych układów zastępczych dla elementów skończonych [9]. Naturalną dla zagadnień tomografii elektrycznej jest przestrzenna dyskretyzacja środowiska badanego [5]:

- elementami trójkątnymi,
- elementami prostokątnymi,
- innymi elementami z odpowiednią aproksymacją pola elektrycznego oraz przewodności wewnątrz nich.

Każdemu elementowi skończonemu odpowiada w pełnej mierze ekwiwalentny obwód elektryczny „skonstruowany” z elementów skupionych, np. rezystorów, kondensatorów (elementy czynne i bierne) [3, 4, 5]. Dzięki temu zagadnienie wyznaczania odpowiedzi obiektu na jego zewnętrzne elektryczne pobudzenie oraz obliczenie macierzy wrażliwości można sprowadzić do liniowych zagadnień elektrotechniki teoretycznej.

### Elementy trójkątne

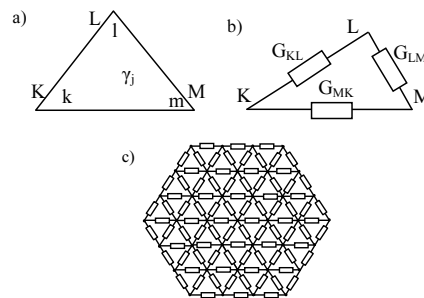
Na rys. 1, przedstawiono proces tworzenia ekwiwalentnej sieci elektrycznej z elementów trójkątnych o konduktywności  $\gamma_j$ , wierzchołkach K, L, M (rys. 1a) i odpowiednio kątach przy wierzchołkach  $k, l, m$ . Element taki może być aproksymowany połączeniem trzech zastępczych konduktancji  $G_{KL}$ ,  $G_{LM}$  i  $G_{MK}$  (rys. 1b). Łącząc odpowiednio wierzchołki zastępczych obwodów elektrycznych (sumując odpowiednie konduktancje) uzyskujemy zastępczą sieć elementów dyskretnych aproksymujących badany obszar o nieznanym rozkładzie przestrzennym np. konduktancji (rys. 1c).

Dla przewodzącej trójkątnej (KLM) warstwy o grubości  $d$  zależności konduktancji węzłowych i międzywęzłowych ( $G_{KL}$ ,  $G_{MK}$  i  $G_{LM}$ ) od parametrów geometrycznych (kątów  $k, l, m$ ) i przewodności  $\gamma_j$  są opisywane wyrażeniem

$$G_{j;KLM} = d \cdot \gamma_j \cdot \chi_{j;KLM}, \quad (4)$$

gdzie  $\chi_{j;KLM}$  jest odpowiednim elementem macierzy charakterystycznej elementu (tab. 1).

Natomiast macierz konduktywności  $G_j$  tego elementu jest przedstawiona w tab. 2.



Rys. 1. Trójkątny element skończony (a), jego ekwiwalentna sieć elektryczna (b) i sieć elektryczna aproksymująca badany obszar (c)

Fig. 1. Triangular finite element (a), its equivalent electrical network (b) and electrical network approximated triangular object (c)

Tab. 1. Macierz charakterystyczna elementu trójkątnego (geometr.)  
Tab. 1. The characteristic matrix of triangular element (geometric)

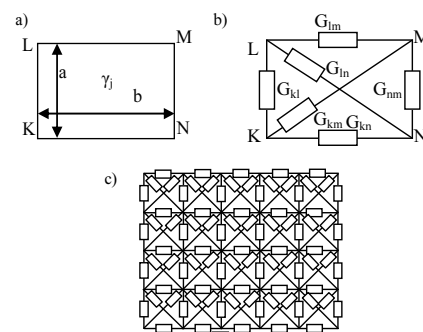
$\chi_{j;KLM}$	<b>K</b>	<b>L</b>	<b>M</b>
<b>K</b>	$\text{ctg}(m) + \text{ctg}(l)$	$-\text{ctg}(m)$	$-\text{ctg}(l)$
<b>L</b>	$-\text{ctg}(m)$	$\text{ctg}(k) + \text{ctg}(m)$	$-\text{ctg}(k)$
<b>M</b>	$-\text{ctg}(l)$	$-\text{ctg}(k)$	$\text{ctg}(k) + \text{ctg}(l)$

Tab. 2. Macierz konduktywności elementu trójkątnego  
Tab. 2. The conductivity matrix of triangular element

$G_j$	<b>K</b>	<b>L</b>	<b>M</b>
<b>K</b>	$G_{KL} + G_{KM}$	$-G_{KL}$	$-G_{KM}$
<b>L</b>	$-G_{LK}$	$G_{LM} + G_{KL}$	$-G_{LM}$
<b>M</b>	$-G_{MK}$	$-G_{ML}$	$G_{ML} + G_{MK}$

### Elementy czworokątne

Analogicznie skończony element czworokątny (prostokątny) jest pokazany na rys. 2a, a jego ekwiwalentna sieć elektryczna utworzona z sześciu konduktancji międzywęzłowych ( $G_{KL}$ ,  $G_{LM}$ ,  $G_{MN}$ ,  $G_{NK}$ ,  $G_{KM}$  i  $G_{LN}$ ) jest pokazana na rys. 2b. Zastępcza sieć elementów dyskretnych aproksymujących badany obszar elementami prostokątnymi jest pokazana na rys. 2c.



Rys. 2. Czworokątny (prostokątny) element skończony (a), jego ekwiwalentna sieć elektryczna (b) i sieć elektryczna aproksymująca badany obszar (c)

Fig. 2. Rectangular finite element (a), its equivalent electrical network (b) and electrical network approximated rectangular object (c)

Macierz charakterystyczna  $\chi_{j;KLMN}$  elementu prostokątnego KLMN (gdzie  $v = a/b$ ,  $a, b$  są wymiarami elementu, rys. 2a) jest pokazana w tabelicy 3 oraz macierz konduktywności  $G_j$  tego elementu jest przedstawiona w tabelicy 4.

Z porównania odpowiednich elementów macierzy 1 i 2 oraz macierzy 3 i 4 oraz ze wzoru (4) wynika, że konduktancja międzywęzłowa sieci elektrycznej zastępczej jest proporcjonalna do przewodności elementu  $\gamma_j$  oraz współczynnika  $S_{j;m}$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ), wartość którego zależy od parametrów kształtu elementu skończonego i grubości warstwy przewodzącej

$$G_{j;m} = S_{j;m} \cdot \gamma_j, \quad (m=1, 2, \dots, M), \quad (5)$$

gdzie  $M=3$  dla elementu trójkątnego i  $M=6$  dla elementu czworokątnego.

Tab. 3. Macierz charakterystyczna elementu prostokątnego (geometr.)  
Tab. 3. The characteristic matrix of rectangular element (geometric)

$\chi_{j:KLMN}$	$K$	$L$	$M$	$N$
$K$	$2(\nu+1/\nu)$	$-(2\nu-1/\nu)$	$-(\nu+1/\nu)$	$-(2/\nu-\nu)$
$L$	$-(2\nu-1/\nu)$	$2(\nu+1/\nu)$	$-(2/\nu-\nu)$	$-(\nu+1/\nu)$
$M$	$-(\nu+1/\nu)$	$-(2/\nu-\nu)$	$2(\nu+1/\nu)$	$-(2\nu-1/\nu)$
$N$	$-(2/\nu-\nu)$	$-(\nu+1/\nu)$	$-(2\nu-1/\nu)$	$2(\nu+1/\nu)$

Tab. 4. Macierz kondukcyjności elementu prostokątnego  
Tab. 4. The conductivity matrix of rectangular element

$G_j$	$K$	$L$	$M$	$N$
$K$	$G_{KL}+G_{KM}+G_{KN}$	$-G_{KL}$	$-G_{KM}$	$-G_{KN}$
$L$	$-G_{KL}$	$G_{LK}+G_{LM}+G_{LN}$	$-G_{LM}$	$-G_{LN}$
$M$	$-G_{KM}$	$-G_{ML}$	$G_{MK}+G_{ML}+G_{MN}$	$-G_{MN}$
$N$	$-G_{NK}$	$-G_{NL}$	$-G_{NM}$	$G_{NK}+G_{NL}+G_{NM}$

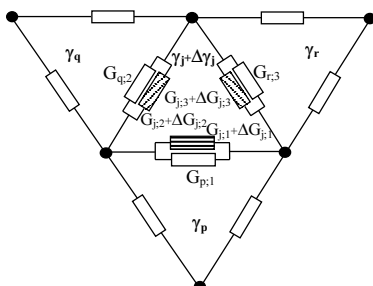
Podczas konstrukcji macierzy Jacobiego można wykorzystać odpowiednie macierze charakterystyczne trójkątnego lub czworokątnego elementu podstawowego MES.

### 3. Metoda obliczania wrażliwości na podstawie własności ekwiwalentnych sieci elektrycznych

W pracy zaproponowano metodę obliczania macierzy wrażliwości, uwzględniającą proces tworzenia ekwiwalentnej sieci elementów dyskretnych MES, wynikającą z aproksymacji badanego obszaru elementami trójkątnymi lub czworokątnymi. Badanie wrażliwości rozważa się nie dla zmiany pojedynczego elementu sieci elektrycznej lecz dla zmiany parametru obszaru wyznaczonego elementem podstawowym (trójkąt, prostokąt).

Duży postęp w dziedzinie komputerowych metod analizy układów zaowocował powstaniem wielu uniwersalnych programów umożliwiających zarówno analizę stałoprądową, zmiennoprądową jak i analizę czasową dla coraz większych obwodów (np. sieci elementów dyskretnych). Wpłynęło to również na rozwój komputerowych metod obliczania wrażliwości. Do obliczania wrażliwości często stosowane są [8]: metoda układu przyrostowego, metoda układu dołączonego i metoda symboliczna.

Jednak są pewne problemy bezpośredniego wykorzystania tych metod dla obliczania wrażliwości w tomografii elektrycznej ze względu na to, że w razie wykorzystania układów zastępczych elektrycznych do elementów skończonych przy zmianie przewodności  $\gamma_j \rightarrow \gamma_j + \Delta\gamma_j$   $j$ -tego elementu jednocześnie zmienia się konduktancja trzech (elementy trójkątne) lub sześciu (elementy czworokątne) gałęzi obwodu elektrycznego. Oprócz tego, w gałęziach odpowiadającym przyległym bokom sąsiednich elementów skończonych, są włączone równolegle konduktancje wewnętrzne z przyrostem oraz zewnętrzne bez przyrostu (rys. 3).

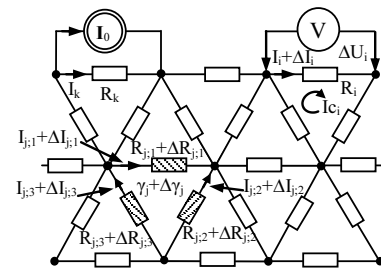


Rys. 3. Fragment połączenia ekwiwalentnych sieci elektrycznych trzech elementów trójkątnych przy zmianie kondukcyjności tylko jednego  $j$ -go elementu  
Fig. 3. A fragment of equivalent electrical grid finite elements when changing conductivity only one  $j$ -th element

Na rys. 3 został pokazany fragment połączenia ekwiwalentnych sieci elektrycznych czterech elementów trójkątnych z numerami  $p, q, r$  – zewnętrzne oraz  $j$ -ty wewnętrzny. Przy zmianie konduktancji  $\gamma_j \rightarrow \gamma_j + \Delta\gamma_j$   $j$ -tego elementu skończonego jednocześnie zmieniają się konduktancje  $G_{j,1} + \Delta G_{j,1}$ ,  $G_{j,2} + \Delta G_{j,2}$  oraz  $G_{j,3} + \Delta G_{j,3}$  trzech gałęzi (na rys. 3 są zaciemnione), natomiast konduktancje  $G_{p,1}$ ,  $G_{q,2}$  oraz  $G_{r,3}$  podłączone równolegle do poprzednich nie zmieniają się.

### Modele matematyczne przyrostów prądów oraz spadku napięcia na $i$ -tej gałęzi

Często w tomografii elektrycznej obiekt badany jest pobudzany od strony zewnętrznej gałęzi obwodu z numerem  $k$  (rys. 4) źródłem prądowym (o natężeniu prądu  $I_0$ ). Wtedy mierzony jest spadek napięcia  $U_i$  na innej zewnętrznej gałęzi z numerem  $i$ . Pobudzanie obiektu oraz pomiary jego odpowiedzi na to pobudzenie odbywają się dla wszystkich możliwych wzajemnie niezależnych projekcji. Na rys. 4 pokazano projekcję z dwuwymiarowym numerem  $(k; i)$ .



Rys. 4. Fragment sieci elektrycznej przy jej pobudzeniu w gałęzi z numerem  $k$  oraz pomiar spadku napięcia na gałęzi z numerem  $i$ . Zmiany rezystancji oraz prądów w odpowiednich gałęziach przy zmianie przewodności  $j$ -tego trójkątnego elementu skończonego

Fig. 4. A fragment of electrical grid when stimulation from branch number  $k$  and a measure of voltage drop down on the branch number  $i$ ; changes of resistance and currents on the proper branch while changing conductivity  $j$ -th triangular finite element

W celu uproszczenia poniższej analizy przy zmianie przewodności  $j$ -tego elementu skończonego ( $\gamma_j \rightarrow \gamma_j + \Delta\gamma_j$ ) na rys. 4 konduktancje odpowiednich gałęzi  $j$ -tego elementu (wraz z równoległe połączonymi konduktancjami przyległych elementów (rys. 3)) zostały zastąpione odpowiednimi rezystancjami z przyrostami:

$$R_{j,1} + \Delta R_{j,1} = \frac{1}{G_{j,1} + \Delta G_{j,1} + G_{p,1}}; \quad (6a)$$

$$R_{j,2} + \Delta R_{j,2} = \frac{1}{G_{j,2} + \Delta G_{j,2} + G_{q,2}}; \quad (6b)$$

$$R_{j,3} + \Delta R_{j,3} = \frac{1}{G_{j,3} + \Delta G_{j,3} + G_{r,3}}. \quad (6c)$$

W wyniku prostych przekształceń przyrost  $\Delta R_{j,s}$  rezystancji gałęzi z numerem  $m$  może być opisany wzorem

$$\Delta R_{j,m} = -\frac{S_{j,m} R_{j,m}^2}{1 + S_{j,m} R_{j,m} \Delta\gamma_j} \cdot \Delta\gamma_j, \quad (7)$$

gdzie  $s$  ( $p, q, r$  na rys. 3) - są numerami przyległych do  $j$ -tego skończonych elementów.

Zmiany tych rezystancji powodują zmiany prądów we wszystkich gałęziach obwodu zastępczego, m.in. w ekwiwalentnych gałęziach  $j$ -tego elementu:  $I_{j,1} + \Delta I_{j,1}$ ,  $I_{j,2} + \Delta I_{j,2}$  i  $I_{j,3} + \Delta I_{j,3}$  oraz w  $i$ -tej gałęzi:  $I_i + \Delta I_i$  (rys. 4).

Wykorzystując twierdzenie o kompensacji (według której przyrost rezystancji  $\Delta R_{j;m}$  można zamienić przyrostem ekwiwalentnej SEM (siła elektromotoryczna)  $\Delta E_{j;m} = \Delta R_{j;m} (I_{j;m} + \Delta I_{j;m})$ , skierowanej przeciwnie do przepływu prądu [8]), oraz zasadę superpozycji (według której zmiana prądu  $\Delta I_i$  w  $i$ -tej gałęzi równa się sumie prądów, spowodowanych przez SEM w różnych gałęziach [8]), możemy otrzymać wyrażenia zmiany prądu w  $i$ -tej zewnętrznej gałęzi:

$$\Delta I_{i,j} = -\sum_{m=1}^M \Delta E_{j;m} g_{(j;m),i} = -\sum_{m=1}^M \Delta R_{j;m} (I_{j;m} + \Delta I_{j;m}) g_{(j;m),i}, \quad (8)$$

gdzie  $g_{(j;m),i}$  są konduktancjami wzajemnymi  $i$ -tej oraz  $(j;m)$ -tej gałęzi.

Przy tym zmiany (przyrosty) prądów w odpowiednich gałęziach układu zastępczego  $j$ -tego elementu można przedstawić w postaci wyrażenia:

$$\Delta I_{j,m} = -\sum_{l=1}^M \Delta R_{j,l} (I_{j,l} + \Delta I_{j,l}) g_{(j,l),(j;m)}, \quad m=1,2,\dots,M, \quad (9)$$

gdzie:  $g_{(j;m),k}$  są konduktancjami wzajemnymi  $(j;m)$ -tej oraz  $(j;m)$ -tej gałęzi  $j$ -tego elementu.

Zależności (9) tworzą układ równań, po rozwiązaniu którego można obliczyć wartości prądów  $I_{j,m} + \Delta I_{j,m}$  ( $m=1,2,\dots,M$ ), a po podstawieniu do równania (8) otrzymuje się wartość przyrostu (zmiany) prądu w  $i$ -tej gałęzi.

Ponieważ, według definicji (2) odpowiedni element macierzy Jakobiego należy wyznaczać jako granicę w wyrażeniu (3) stosunku przyrostu napięcia  $\Delta U_i$  pomiędzy  $i$ -tą parą elektrod pomiarowych do przyrostu  $\Delta \gamma_j$  konduktywności  $j$ -tego elementu skończonego, dlatego, w tym przypadku, nie ma potrzeby rozwiązywania układu równań (9) i kolejno obliczać granicę dla  $\Delta \gamma_j \rightarrow 0$ . Te operacje można zrealizować od razu w układzie równań (9). Według zależności (7) przy  $\Delta \gamma_j \rightarrow 0$  ma miejsce także  $\Delta R_{j,m} \rightarrow 0$  w wyniku czego przyrosty wartości prądów w gałęziach też dążą do zera:  $\Delta I_{j,m} \rightarrow 0$ .

Zgodnie z zależnościami (8), (7) i (9), przy  $\Delta \gamma_j \rightarrow 0$  przyrost prądu w  $i$ -tej gałęzi (po pominięciu członów drugiego rzędu) może być opisany wyrażeniem

$$\Delta I_{i,j} \xrightarrow{\Delta \gamma_j \rightarrow 0} -\sum_{m=1}^M \Delta R_{j,m} I_{j,m} g_{(j;m),i} = \Delta \gamma_j \sum_{m=1}^M R_{j,m}^2 I_{j,m} g_{(j;m),i} \quad (10)$$

Wartość przyrostu napięcia  $\Delta U_i$  pomiędzy  $i$ -tą parą elektrod pomiarowych wynosi  $\Delta U_i = \Delta I_{i,j} R_i$ , (gdzie  $R_i$  - jest rezystancją  $i$ -tej gałęzi) dlatego po podstawieniu wyrażenia (10) do wyrażenia (3) otrzymuje się wartości współczynnika macierzy Jakobiego

$$J_{i,j} = \lim_{\Delta \gamma_j \rightarrow 0} \frac{\Delta U_i}{\Delta \gamma_j} = R_i \sum_{m=1}^M S_{j;m} R_{j,m}^2 I_{j,m}(k) g_{(j;m),i}. \quad (11)$$

W wyrażeniu (11)  $R_{j,m} I_{j,m}(k) = U_{j,m}(k)$  jest spadkiem napięcia na  $(j;m)$ -tej gałęzi przy pobudzaniu obiektu od strony  $k$ -tej gałęzi zewnętrznej.

Zakładając że obiekt jest pobudzany prądem  $I_0$  od strony  $i$ -tej gałęzi, wtedy wykorzystując definicję konduktancji wzajemnej pomiędzy  $(j;m)$ -tą oraz  $i$ -tą gałęziami jako  $g_{j;m,i} = I_{(j;m)}(i)/E_i = I_{(j;m)}(i)/I_0 R_i$  [8] (gdzie  $I_{(j;m)}(i)$  - jest

prądem w  $(j;m)$ -tej gałęzi) i uwzględniając że  $R_{j,m} I_{j,m}(i) = U_{j,m}(i)$  jest spadkiem napięcia na  $(j;m)$ -tej gałęzi przy pobudzaniu obiektu od strony  $i$ -tej gałęzi, po podstawieniu tych wartości do wyrażenia (11) otrzymuje się

$$J_{i,j} = \frac{1}{I_0} \sum_{m=1}^M S_{j;m} U_{j,m}(k) U_{j,m}(i). \quad (12)$$

Z analizy wyrażenia (12) wynika, że dla obliczania całej macierzy Jakobiego należy rozwiązać (na przykład metodą potencjałów węzłowych) zagadnienie proste tomografii elektrycznej przy wszystkich możliwych kierunkach pobudzania obiektu i wyznaczyć spadki napięć  $U_{j,m}(k)$ ,  $U_{j,m}(i)$  na wszystkich gałęziach ( $k=1, 2, 3, \dots; i \neq k$ ) sieci obwodu zastępczego.

## 4. Wnioski

- Ponieważ wartość przyrostu konduktywności  $\Delta \gamma_j$  elementu skończonego nie wpływa na obliczaną wartość elementów macierzy Jakobiego, to każdy element i cała macierz Jakobiego może być obliczona bez błędów metody.
- Wszystkie spadki napięć na wszystkich gałęziach mogą być obliczone w wyniku tylko jednorazowego rozwiązania zagadnienia prostego tomografii elektrycznej, dzięki czemu zapewnia się maksymalną szybkość obliczania macierzy wrażliwości.
- Zaproponowana metoda może być wykorzystana także do obliczeń wrażliwości w tomografach rezystywności, stałej dielektrycznej czy też ich kombinacji.

## 5. Literatura

- [1] Bessonov A.: Theoretical bases of electrical engineering. (Ros.) M. Wysshaja shkola. 1978, 645p.
- [2] Dennis J.E., Shnabel R.B.: Numerical method for unconstrained Optimisation in Nonlinear Equations. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs. New Jersey, 1983.
- [3] Dickin F.J., Zhao X.J., Abdulach M.Z. and others: Tomographic Imaging of Industrial Process Equipment Using Electrical Impedance Sensors. Sensors VI: Technology, Systems and Applications. Proceedings of the 5-th Conference on Sensors and their Applications. Bristol, Philadelphia and New York, 1991, str. 215-220.
- [4] Dorozhovets M., Brydak K.: Properties of electrical network equivalent to a finite element approximation and their using for image reconstruction in electrical tomography. 49th International Scientific Colloquium. Ilmenau Technical University, 27-30 September 2004, str. 343-348
- [5] Dorozhovets M.: Modele dyskretne zagadnień tomografii elektrycznej. PAK Nr 7/8. Warszawa, 2003. str. 21-25.
- [6] Dorozhovets M., Kowalczyk A.: Fast and precise Method of the Jacoby Matrix Calculation for the Electrical Tomography Tasks. Proc. 48th International Scientific Colloquium. Ilmenau Technical University. September 22-25.2003. str. 423-424
- [7] Dorozhovets M.: Direct calculation of Jacobi matrix without the systematic error using finite elements method approximation in the tasks of the electrical tomography. (Ukr.) Selection and the transmission of information. N 8, Lviv, 2003. str.40-45.
- [8] Leon O.Chua, Pen-Min Lin.: Komputerowa analiza układów elektronicznych, algorytmy i metody obliczeniowe, WNT 1981.
- [9] Liebman G.: Solution of Partial Differential Equation with Resistance Network Analogue. British Journal of Applied Science, 1950. str. 92-103.
- [10] Seagar A.D., Barber D.C., Brown B.H.: Electrical Impedance Imaging. IEEE Proceedings. Vol.134, Pt. A, No 2, February 1987, str. 201-209.
- [11] York T., Komarudin M., Lionheart W.: Custom silicon for finite element modelling. Proc. of 2-th International Symposium on Process Tomography in Poland. Wrocław, Poland. 11-12 September. 2002. str. 73-78.