

Mykhaylo DOROZHOVETSPOLITECHNIKA RZESZOWSKA, ZAKŁAD METROLOGII I SYSTEMÓW POMIAROWYCH
NARODOWY UNIWERSYTET „LWOWSKA POLITECHNIKA”, KATEDRA TECHNOLOGII INFORMACYJNO POMIAROWYCH, UKRAINA**Porównanie niepewności aproksymacji wyników pomiaru algebraicznymi oraz ortogonalnymi wielomianami Czebyszewa**

Prof. dr hab. inż. Mykhaylo DOROZHOVETS



Jest absolwentem (1975) Katedry Techniki Informacyjno-Pomiarowej Politechniki Lwowskiej, tytuł doktora nauk technicznych uzyskał w 1986 r. a w 2001 r. obronił pracę habilitacyjną. Obecnie jest zatrudniony na stanowisku profesora w Zakładzie Metrologii i Systemów Pomiarowych Politechniki Rzeszowskiej. W pracy naukowo-badawczej zajmuje się zagadnieniami pomiarów tomograficznych, problemami przetwarzania sygnałów pomiarowych oraz analizą i oceną niedokładności wyników pomiarów.

e-mail: michdor@prz.edu.pl

Streszczenie

W referacie zaprezentowano wyniki porównania niepewności przewidywanych wartości funkcji znalezionych na podstawie aproksymacji wyników pomiaru zwykłymi algebraicznymi oraz ortogonalnymi wielomianami Czebyszewa. Przedstawione są wzory analityczne do obliczenia niepewności tych funkcji.

Słowa kluczowe: niepewność, aproksymacja, wielomiany.

Comparison of measurement result approximation uncertainty by algebraic and orthogonal Chebyshev polynomials**Abstract**

In the paper the comparison results of the uncertainty of the forecasted values of function, obtained as a result of the measurement result approximation by both usual algebraic and Chebyshev polynomials are presented. The obtained formulas for calculation uncertainty of these function are presented.

Keywords: uncertainty, approximation, polynomials.

1. Wstęp

Do wyznaczania parametrów zależności pomiędzy wielkościami, na przykład wyjściową oraz wejściową czujnika pomiarowego, szeroko jest wykorzystywana aproksymacja metodą najmniejszych kwadratów (MNK) [1]. Celem przedstawionych badań jest wyprowadzenie wzorów modeli matematycznych dla oszacowania jeszcze na etapie planowania eksperymentu standardowych niepewności przewidywanych wartości aproksymacyjnych funkcji w postaci wielomianów algebraicznych oraz Czebyszewa, a także ich porównanie z punktu widzenia osiągalnych wartości niepewności i złożoności algorytmu obliczeń.

Aproksymacja jest oparta na danych wejściowych w postaci n zadanych wartości wielkości wejściowej (wektor $\mathbf{X}^T = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^T$), oraz wyników pomiaru wielkości wyjściowej (wektor $\mathbf{Y}^T = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})^T$). Dla liniowej aproksymacji wykorzystuje się m zadanych funkcji bazowych $\varphi_j(x)$ ($j=0, \dots, m-1$), które tworzą wektor o wymiarze m :

$$\Phi = (\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)), \quad (1)$$

a funkcja aproksymacyjna opisywana jest zależnością [1]:

$$y_{apr}(x) = \Phi \cdot \mathbf{A} = \sum_{j=0}^{m-1} a_j \varphi_j(x), \quad (2)$$

gdzie $\mathbf{A}^T = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1})^T$ - jest wektorem wartości poszukiwanych współczynników (ich liczba także równa się m).

W badaniach przyjęto, że model funkcji aproksymacyjnej (2) jest adekwatny, a wyniki pomiaru charakteryzują się standardową niepewnością $u(y_j)$. Według metody najmniejszych kwadratów [1] wartości poszukiwanych współczynników są obliczane na podstawie minimalizacji sumy kwadratów odchyleń v_i wartości eksperymentalnych y_i od wartości $y_a(x_i)$ funkcji aproksymacji (2):

$$\text{MIN} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} v_i^2 \right\} = \text{MIN} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} a_j \varphi_j(x_i) - y_i \right)^2 \right\}. \quad (3)$$

Obliczone wartości $\varphi_j(x_i)$ funkcji bazowych dla wszystkich wartości argumentu x_i tworzą macierz Φ o wymiarze $m \times n$:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_{m-1}(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_{m-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_{n-1}) & \varphi_1(x_{n-1}) & \dots & \varphi_{m-1}(x_{n-1}) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

W takim razie minimalizacji wyrażenia (3) odpowiada równanie macierzowe

$$\frac{(\Phi^T \Phi)}{n} \cdot \mathbf{A} = \frac{\Phi^T \mathbf{Y}}{n}, \quad \text{lub} \quad \phi^T \phi \cdot \mathbf{A} = \phi^T \mathbf{Y}, \quad (5)$$

gdzie

$$\phi^T \phi = \frac{\Phi^T \Phi}{n}, \quad (\phi^T \phi)_{kl} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} [\varphi_k(x_i) \varphi_l(x_i)], \quad (6a)$$

$$\phi^T \mathbf{Y} = \frac{\Phi^T \mathbf{Y}}{n}, \quad (\phi^T \mathbf{Y})_k = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \varphi_k(x_i). \quad (6b)$$

W celu ograniczenia zakresów wartości współczynników macierzy we wzorach (5) oraz (6) wprowadzono ich uśrednianie na liczbę eksperymentalnych punktów n . Wtedy wektor \mathbf{A} poszukiwanych współczynników można obliczyć ze wzoru:

$$\mathbf{A} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \mathbf{Y}. \quad (7)$$

2. Standardowe niepewności współczynników aproksymacji

Miarą jakości wartości znalezionych współczynników (7) są ich standardowe (oraz rozszerzone) niepewności, które można obliczyć posiadając macierz kowariancyjną $\mathbf{R}(A)$. Jeżeli wyniki obserwacji wartości funkcji będą jednorodnie (o jednakowej standardowej niepewności $u(y_j)=u(y)$) i nie skorelowane, wtedy macierz kowariancyjna wyników pomiaru równa się: $\mathbf{R}_y = u^2(y) \cdot \mathbf{I}$ (gdzie \mathbf{I} - jest jednostkową macierzą diagonalną). Na tej podstawie macierz kowariancyjną współczynników aproksymacji można opisać wzorem

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(A) &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{R}_Y \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} = \\ &= u^2(y) \cdot \frac{(\phi^T \phi)^{-1}}{n} = \frac{u^2(y)}{n} \cdot \mathbf{M}_R, \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie

$$\mathbf{M}_R = (\phi^T \phi)^{-1}. \quad (9)$$

Wtedy standardowe niepewności wartości współczynników \mathbf{A} będą równe [2]:

$$u(a_j) = \frac{u(y)}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{M_{R,j,j}}. \quad (10)$$

3. Standardowa niepewność przewidywanych wartości wielkości wyjściowej

Dla dowolnych wartości wielkości wejściowej według wzorów (1) oraz (7) wartości funkcji aproksymacyjnej mogą być obliczone według zależności

$$\mathbf{Y}_{apr}(x) = \Phi \cdot \mathbf{A} = \Phi \cdot (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \mathbf{Y}, \quad (11)$$

na podstawie której po uwzględnieniu (8) można obliczyć wariancję (kwadrat niepewności) przewidywanych wartości funkcji aproksymacji

$$u^2(y_{apr}(x)) = \Phi \cdot \mathbf{R}(A) \cdot \Phi^T. \quad (12)$$

Przy jednorodnych i nie skorelowanych wynikach obserwacji wariancja ma postać

$$u^2(y_{apr}(x)) = \frac{u^2(y)}{n} \Phi \cdot (\phi^T \phi)^{-1} \Phi^T. \quad (13)$$

4. Aproksymacja wielomianem algebraicznym

4.1. Model matematyczny

Przy aproksymacji wielomianem algebraicznym funkcje bazowe w (1) opisywane są zależnością: $\phi_j(x) = x^j$,

$$\Phi = (1, x, x^2, \dots, x^{m-1}). \quad (14)$$

Z punktu widzenia ogólności, a także w celu ograniczenia wartości współczynników macierzy, unormujemy wartości wejściowe, wykorzystując przetwarzanie liniowe:

$$\chi_i = \frac{x_i - \bar{x}}{V}, \quad -1 \leq \chi \leq +1, \quad (15)$$

gdzie $\bar{x} = (x_b + x_a)/2$ jest środkiem rozpięcia wartości wielkości wejściowej z wartością początkową x_a oraz końcową x_b , $V = (x_b - x_a)/2$ jest połową szerokości rozpięcia tego interwału.

W takim razie wartości elementów macierzy (6a) oraz (6b) układu równań MNK będą równe:

$$(\phi^T \phi)_{\chi,kl} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_i^{k+l} = \overline{\chi^{k+l}}, \quad (\phi^T \mathbf{Y})_{\chi,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_i^k y_i = \overline{\chi^k y_i}. \quad (16)$$

Często wartości wielkości wejściowej można zadać w równych odstępach $h = (x_b - x_a)/(n-1)$: $x_i = x_a + h \cdot i$, wtedy unormowane wartości (16) są obliczane według wzoru:

$$\chi_i = \frac{2 \cdot i}{n-1} - 1, \quad (i=0, 1, \dots, n-1). \quad (17)$$

Dzięki symetrii (względem środka rozpięcia) unormowanych wartości χ_i w macierzy $\phi^T \phi$ wszystkie współczynniki o nieparzystych potęgach $k+l = 2p+1$ równają się zeru: $\overline{\chi^{2p+1}} = 0$:

$$\phi^T \phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \overline{\chi^2} & 0 & \vdots \\ 0 & \overline{\chi^2} & 0 & \dots & 0 \\ \overline{\chi^2} & 0 & \overline{\chi^4} & 0 & \vdots \\ 0 & \overline{\chi^4} & 0 & \ddots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \overline{\chi^{2(m-1)}} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Wartości średnie niezerowych współczynników macierzy (18) można obliczyć bezpośrednio, na przykład według wzorów:

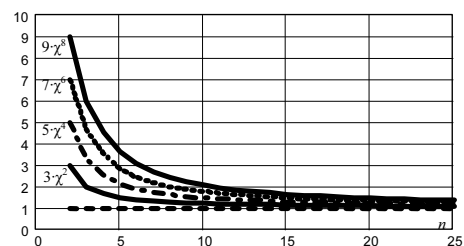
$$\overline{\chi^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_i^2 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{n-1} \right) \rightarrow \frac{1}{3}; \quad (19)$$

$$\overline{\chi^4} = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{4(3n^2 - 4n - 1)}{3(n-1)^3} \right) \rightarrow \frac{1}{5}; \quad (20)$$

$$\overline{\chi^6} = \frac{1}{7} \left(1 + \frac{2(9n^4 - 24n^3 + 6n^2 + 8n + 17)}{3(n-1)^5} \right) \rightarrow \frac{1}{7}; \quad (21)$$

$$\overline{\chi^8} = \frac{1}{9} \left(1 + \frac{8(5n^6 - 20n^5 + 15n^4 + 8n^3 + 43n^2 - 52n - 47)}{5(n-1)^7} \right) \rightarrow \frac{1}{9}. \quad (22)$$

Na rys.1 pokazane są zależności (unormowanych do odpowiednich wartości granicznych: 1/3; 1/5; 1/7; 1/9) wartości średnich: $3 \cdot \overline{\chi^2}$; $5 \cdot \overline{\chi^4}$; $7 \cdot \overline{\chi^6}$; $9 \cdot \overline{\chi^8}$ od liczby opracowywanych punktów eksperymentalnych n .



Rys. 1. Zależności wartości średnich potęg wielkości wejściowej od liczby punktów eksperymentalnych n

Fig. 1. Dependences of the average values of input value degrees from a quantity of the experimental points n

4.2. Standardowe niepewności współczynników

Macierzy (18) odpowiadają macierze odwrotne, jawne postaci pierwszych trzech są przedstawione niżej:

$$\mathbf{M}_{R(1)} = \frac{1}{\chi^2} \begin{pmatrix} \overline{\chi^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (23)$$

$$\mathbf{M}_{R(2)} = \frac{1}{\bar{\chi}^4 - (\bar{\chi}^2)^2} \begin{pmatrix} \bar{\chi}^4 & 0 & -\bar{\chi}^2 \\ 0 & \frac{\bar{\chi}^4 - (\bar{\chi}^2)^2}{(\bar{\chi}^2)} & 0 \\ -\bar{\chi}^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (24)$$

$$\mathbf{M}_{R(3)} = \frac{1}{\bar{\chi}^4 - (\bar{\chi}^2)^2} \begin{pmatrix} \bar{\chi}^4 & 0 & -\bar{\chi}^2 & 0 \\ \frac{\bar{\chi}^6 \cdot (\bar{\chi}^4 - (\bar{\chi}^2)^2)}{\bar{\chi}^2 \cdot \bar{\chi}^6 - (\bar{\chi}^4)^2} & 0 & \frac{\bar{\chi}^4 \cdot (\bar{\chi}^4 - (\bar{\chi}^2)^2)}{\bar{\chi}^2 \cdot \bar{\chi}^6 - (\bar{\chi}^4)^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{\chi}^4 \cdot (\bar{\chi}^4 - (\bar{\chi}^2)^2)}{\bar{\chi}^2 \cdot \bar{\chi}^6 - (\bar{\chi}^4)^2} & \frac{\bar{\chi}^2 \cdot (\bar{\chi}^4 - (\bar{\chi}^2)^2)}{\bar{\chi}^2 \cdot \bar{\chi}^6 - (\bar{\chi}^4)^2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Według (10) standardowe niepewności wartości współczynników aproksymacji są proporcjonalne do pierwiastka odpowiednich członów diagonalnych macierzy (23)-(25), na przykład w przypadku wielomianu drugiego rzędu:

$$u(a_0) = \frac{u(y)}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{\chi}^4}{\bar{\chi}^4 - (\bar{\chi}^2)^2}}, \quad u(a_1) = \frac{u(y)}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{\bar{\chi}^2}},$$

$$u(a_1) = \frac{u(y)}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\bar{\chi}^4 - (\bar{\chi}^2)^2}}. \quad (26)$$

4.3. Standardowa niepewność przewidywanych wartości wielkości wyjściowej

Po podstawieniu tych macierzy do wzoru (13), a także uwzględniając postaci algebraicznych funkcji bazowych (14), otrzymuje się jawne wyrażenia kwadratu niepewności przewidywanych wartości funkcji aproksymacji:

- dla wielomianu pierwszego rzędu:

$$u_{(1)}^2(y_{apr}(\chi)) = \frac{u^2(y)}{n} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{\bar{\chi}^2}\right); \quad (27)$$

- dla wielomianu drugiego rzędu:

$$u_{(2)}^2(y_{apr}(\chi)) = \frac{u^2(y)}{n} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{\bar{\chi}^2} + \frac{(x^2 - \bar{\chi}^2)^2}{\bar{\chi}^4 - (\bar{\chi}^2)^2}\right); \quad (28)$$

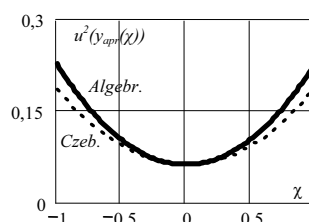
- dla wielomianu trzeciego rzędu:

$$u_{(3)}^2(y_{apr}(\chi)) = \frac{u^2(y)}{n} \cdot \left(1 + \frac{(x^2 - \bar{\chi}^2)^2}{\bar{\chi}^4 - (\bar{\chi}^2)^2} + \frac{\bar{\chi}^6 - 2 \cdot \bar{\chi}^4 \cdot x^2 + \bar{\chi}^2 \cdot x^4}{\bar{\chi}^2 \bar{\chi}^6 - (\bar{\chi}^4)^2} x^2\right) \quad (29)$$

Zależności kwadratów niepewności standardowych prognozowanych wartości funkcji aproksymacyjnych, obliczonych według wzorów (27)-(29) przy $n=16$ oraz dla jednostkowej wartości stan-

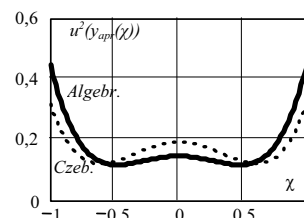
dardowej niepewności wyników pomiaru wartości wielkości wyjściowej $u(y) = 1$ pokazane są liniami ciągłymi na rysunkach: rys. 2 - aproksymacja liniowa, rys. 3 - wielomianem algebraicznym drugiego rzędu, rys. 4 - wielomianem algebraicznym trzeciego rzędu.

Analizując wyrażenia (27)-(29) oraz wykresy na rysunkach 2-4, można zauważyć istotny symetryczny wzrost niepewności wartości funkcji na końcach interwału aproksymacji w porównaniu z niepewnością w części środkowej tego interwału. Przy tej samej liczbie punktów eksperymentalnych niepewność funkcji aproksymacyjnej na końcach interwału może być zmniejszona na drodze nierównomiernego usytuowania wartości wielkości wejściowej, a mianowicie ich zagęszczenia w pobliżu końców wspomnianego interwału i rozrzedzaniu w części środkowej.



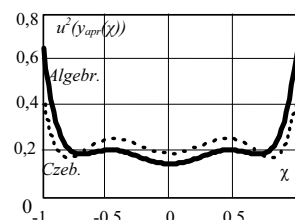
Rys. 2. Kwadrat standardowej niepewności przewidywanych wartości wielkości wyjściowej przy aproksymacji wielomianami pierwszego rzędu: algebraicznym oraz Czebyszewa

Fig. 2. Square of the standard uncertainty of the forecasted values of the approximation function by the polynomials of the first degree: algebraic and Chebyshev



Rys. 3. Kwadrat standardowej niepewności przewidywanych wartości wielkości wyjściowej przy aproksymacji wielomianami drugiego rzędu: algebraicznym oraz Czebyszewa

Fig. 3. Square of the standard uncertainty of the forecasted values of the approximation function by the polynomials of the second degree: algebraic and Chebyshev



Rys. 4. Kwadrat standardowej niepewności przewidywanych wartości wielkości wyjściowej przy aproksymacji wielomianami trzeciego rzędu: algebraicznym oraz Czebyszewa

Fig. 4. Square of the standard uncertainty of the forecasted values of the approximation function by the polynomials of the third degree: algebraic and Chebyshev

5. Aproksymacja ortogonalnym wielomianem Czebyszewa

5.1. Model matematyczny

Jeżeli podczas realizacji eksperymentu pomiarowego istnieje możliwość zadania dowolnych wartości wielkości wejściowej,

m.in. wartości, które równają się węzłom ortogonalności wielomianów Czebyszewa [3], wtedy można otrzymać dwie pozytywne cechy: (1) graniczne uproszczenie macierzy układu równań do postaci przekątnej i bezpośredniego ich rozwiązania, oraz (2) częściowe wyrównanie niepewności przewidywanych wartości wielkości wyjściowej (zmniejszenie wokół granic przedziału zmian wielkości wejściowej i wzrost w środku tego przedziału).

Wielomiany Czebyszewa $T_j(\chi)$ rzędu j opisywane są zależnościami w postaci trygonometrycznej lub algebraicznej [3]

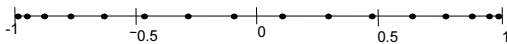
$$\begin{aligned} \varphi_{Cz,j}(\chi) &= T_j(\chi) = \cos(\arccos(j\chi)) = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} C_j^{2k} \chi^{j-2k} (\chi^2 - 1)^k, \quad -1 \leq \chi \leq 1. \end{aligned} \quad (30)$$

Jeżeli wartości argumentu będą zadane w punktach (rys. 5)

$$\chi_i = -\cos\left(\frac{\pi}{n} \cdot \frac{2i+1}{2}\right), \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (31)$$

wtedy we wzorach (6a) wartości współczynników macierzy układu równań MNK będą równać się:

$$(\phi^T \phi)_{\chi,kl} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T_k(\chi_i) T_l(\chi_i) = \begin{cases} 1, & k = l = 0, \\ 0,5 & k = l \neq 0, \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \quad (32)$$



Rys. 5. Usytuowanie punktów pomiarowych, zapewniających warunek ortogonalności wielomianów Czebyszewa ($n=16$)

Fig. 5. The arrangement of the measuring points, which ensure the Chebyshev polynomial orthogonality condition ($n=16$)

Dzięki odpowiedniemu wyborowi wartości wielkości wejściowej $x_i = \chi_i \cdot V + \bar{x}$ macierze $\phi^T \phi_{\chi}$ oraz $\phi^T Y$ układu równań (7) przyjmują postaci:

$$\phi^T \phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0,5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0,5 \end{bmatrix}, \quad \phi^T Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i T_0(\chi_i) \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i T_1(\chi_i) \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i T_{m-1}(\chi_i) \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Stąd wynika, że wartości współczynników $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ mogą być obliczone bezpośrednio według prostych wzorów:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i T_0(\chi_i), \quad a_1 = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i T_1(\chi_i), \\ a_2 &= \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i T_2(\chi_i), \quad a_{m-1} = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i T_{m-1}(\chi_i). \end{aligned} \quad (34)$$

5.2. Standardowa niepewność przewidywanych wartości wielkości wyjściowej

W razie wykorzystania wielomianów Czebyszewa funkcja aproksymacyjna opisywana jest zależnością:

$$y_{Cz,apr}(\chi) = \mathbf{T}(\chi) \cdot \mathbf{A} = \sum_{j=0}^{m-1} a_j T_j(\chi), \quad (35)$$

Ponieważ macierz odwrotna układu równań, opisujących aproksymację wielomianami Czebyszewa, ma postać:

$$\mathbf{M}_{D(Cz)} = \frac{(\phi_{\chi}^T \phi_{\chi})^{-1}}{n} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

dlatego współczynniki znalezione według (33) nie są skorelowane, w wyniku czego kwadrat standardowej niepewności przewidywanych wartości funkcji (35) zgodnie z (13) opisuje wzór:

$$u^2(y_{Cz,apr}(\chi)) = \frac{u^2(y)}{n} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{m-1} T_j^2(\chi) \right). \quad (37)$$

Zależności kwadratów niepewności standardowych prognozowanych wartości funkcji, aproksymowanej wielomianami Czebyszewa pierwszych trzech rzędów, obliczonych według wzoru (37) przy $n=16$ oraz dla jednostkowej wartości standardowej niepewności wyników pomiaru wielkości funkcji, pokazane są liniami punktowymi na rysunkach 2-4.

6. Analiza wyników oraz wnioski końcowe

1. W razie adekwatnego modelu funkcji aproksymacyjnej standardowa niepewność przewidywanych wartości funkcji zmniejsza się odwrotnie proporcjonalnie do pierwiastka z liczby punktów eksperymentalnych (\sqrt{n}), co jest typowe dla estymatorów statystycznych [4].
2. Przy tej samej liczbie punktów eksperymentalnych oraz standardowej niepewności wyników pomiaru wykorzystanie wielomianów Czebyszewa w porównaniu ze zwykłymi algebraicznymi wielomianami zapewnia mniejszą niepewność przewidywanych wartości funkcji aproksymacyjnej na końcach interwału aproksymacji: wariancja jest mniejsza o około 21% przy aproksymacji pierwszego rzędu, 42% - drugiego rzędu i 53% trzeciego rzędu.
3. Oprócz tego, wykorzystanie wielomianów Czebyszewa zapewnia maksymalnie prosty sposób (35) obliczania współczynników aproksymacji, który nie powoduje problemu złego uwarunkowania macierzy $\phi_{\chi}^T \phi_{\chi}$ układu równań MNK, co może mieć miejsce w razie wielomianów algebraicznych.
4. Pewnym praktycznym problemem wykorzystania wielomianów Czebyszewa jest dokładne zadanie wartości wielkości wejściowej w punktach ortogonalności, którego naruszenie może pogorszyć jakość aproksymacji.
5. Jeżeli niepewność standardowa wyników pomiaru nie jest znana wykorzystuje się jej wartość, znaną na podstawie wyników eksperymentu.

7. Literatura

- [1] Mańczak K. Technika planowania eksperymentu. Warszawa: WNT, 1976.
- [2] Guide of the Expression of Uncertainty In Measurement. International Organisation for Standardisation. Switzerland, 1993, 1995.
- [3] Korn G. A., Korn T.M.: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers McGraw-Hill, Co. N. York, 1968.
- [4] Bendat J.S., Piersol A.G.: Random Data. Analysis and measurement procedure J. Wiley & Sons N. York, 1986.