

**Maciej ŁAWRYŃCZUK, Piotr MARUSAK, Piotr TATJEWSKI**  
POLITECHNIKA WARSZAWSKA, INSTYTUT AUTOMATYKI I INFORMATYKI STOSOWANEJ

## Struktury i algorytmy współdziałania regulacji predykcyjnej i bieżącej optymalizacji ekonomicznej

Dr inż. Maciej ŁAWRYŃCZUK

Uzyskał dyplom magistra inżyniera automatyka w 1998 r. na Wydziale Elektroniki i Techniki Informatycznych Politechniki Warszawskiej. Na tym samym wydziale w 2003 r. uzyskał stopień doktora nauk technicznych w zakresie automatyki i robotyki. Prowadzi badania w zakresie algorytmów regulacji predykcyjnej wykorzystujących, między innymi, liniowe i nieliniowe modele procesów, w szczególności modele neuronowe.

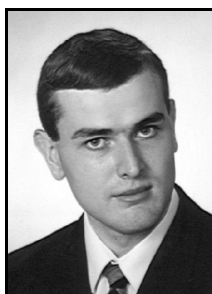
e-mail: [M.Lawrynczuk@ia.pw.edu.pl](mailto:M.Lawrynczuk@ia.pw.edu.pl)



Dr inż. Piotr MARUSAK

Uzyskał dyplom magistra inżyniera informatyka w 1997 r. na Wydziale Elektroniki i Techniki Informatycznych Politechniki Warszawskiej. Na tym samym wydziale w 2003 r. uzyskał stopień doktora nauk technicznych w zakresie automatyki i robotyki. Prowadzi badania w zakresie algorytmów regulacji predykcyjnej bazujących na liniowych i nieliniowych, w szczególności rozmytych, modelach obiektów oraz integracji z tymi algorytmami zadania optymalizacji ekonomicznej.

e-mail: [P.Marusak@ia.pw.edu.pl](mailto:P.Marusak@ia.pw.edu.pl)



Dr hab. inż. Piotr TATJEWSKI

Jest profesorem Politechniki Warszawskiej, od 1996 roku dyrektorem Instytutu Automatyki i Informatyki Stosowanej na Wydziale Elektroniki i Techniki Informatycznych. Zajmuje się zagadnieniami struktur i algorytmów sterowania procesami, głównie technicznymi. Prowadzi badania w zakresie algorytmów regulacji zaawansowanej, przede wszystkim algorytmów predykcyjnych, z wykorzystaniem modeli obiektów liniowych i nieliniowych, w tym modeli rozmytych i opisanych sieciami neuronowymi.

e-mail: [P.Tatjewski@ia.pw.edu.pl](mailto:P.Tatjewski@ia.pw.edu.pl)



computational load, approximate linear or linear-quadratic (updated on-line) models are used, then the resulting optimisation problem is of quadratic programming type.

**Keywords:** Predictive control, optimisation, approximation, linearisation, nonlinear control systems, constrained control.

### 1. Wstęp

W praktyce przemysłowej od lat wykorzystuje się hierarchiczną (warstwową) strukturę sterowania. Istotą podejścia jest dekompozycja podstawowego celu sterowania na kilka znacznie mniej złożonych zadań cząstkowych, które są ze sobą wzajemnie powiązane. W ogólności należy wymienić dwie główne warstwy: warstwę regulacji, której celem jest stabilizacja wartości kluczowych zmiennych wyjściowych procesu i warstwę optymalizacji, która wyznacza wartości zadane dla regulatorów [2, 4, 14].

W przypadku złożonych procesów warstwa regulacji złożona jest z podstawowej warstwy regulacji bezpośredniej, w której wykorzystuje się zazwyczaj regulatory PID, oraz wyższej warstwy, regulacji zaawansowanej, w której stosuje się algorytmy regulacji predykcyjnej (ang. Model Predictive Control, MPC) [1, 2, 5, 13, 14]. Główną zaletą algorytmów tego typu jest możliwość uwzględniania ograniczeń sygnałów wejściowych (zmiennych manipulowanych) i wyjściowych (zmiennych regulowanych) procesu, które determinują jakość, efektywność ekonomiczną i bezpieczeństwo produkcji. Co więcej, algorytmy regulacji predykcyjnej umożliwiają efektywną regulację procesów o wielu zmiennych wejściowych i wyjściowych, również o złożonej dynamice.

Nieliniowe zadanie optymalizacji ekonomicznej punktu pracy jest zadaniem trudnym, złożonym obliczeniowo, jest ono więc rozwiązywane znacznie rzadziej w porównaniu z częstotliwością interwencji algorytmu regulacji predykcyjnej. Przy wolnozmiennych zakłóceniach podejście takie daje satysfakcjonujące rezultaty. W praktyce jednak bardzo często dynamika zakłóceń jest porównywalna z dynamiką procesu, np. natężenia przepływu lub składy surowców często zmieniają się w szerokim zakresie i zmiany te zachodzą szybko. Zastosowanie w takiej sytuacji klasycznej hierarchicznej struktury sterowania z optymalizacją punktu pracy wykonywaną z częstotliwością znacznie mniejszą w porównaniu z częstotliwością interwencji algorytmu regulacji predykcyjnej nie jest właściwe i może doprowadzić do znacznej utraty efektywności ekonomicznej.

Celem pracy jest omówienie efektywnych obliczeniowo, alternatywnych (w porównaniu ze strukturą klasyczną) struktur i algorytmów regulacji predykcyjnej i ekonomicznej optymalizacji punktu pracy. W strukturach tych punkt pracy jest aktualizowany z częstotliwością pracy algorytmu regulacji predykcyjnej. Rozważa się dwa rozwiązania. W pierwszym, strukturę warstwową uzupełnia się pomocniczą liniową lub kwadratową optymalizacją ekonomiczną. Wykorzystuje się przy tym aktualizowaną na bieżą-

### Streszczenie

Celem pracy jest omówienie zagadnienia współpracy algorytmów regulacji predykcyjnej z nieliniową optymalizacją ekonomiczną. Problem ten jest szczególnie istotny wówczas, gdy dynamika zmian zakłóceń jest porównywalna z dynamiką procesu, ponieważ zastosowanie klasycznej warstwowej (hierarchicznej) struktury sterowania z rzadko powtarzaną optymalizacją ekonomiczną może nie być efektywne. Omawiane są dwie klasy struktur. W pierwszym przypadku stosuje się pomocniczą optymalizację ekonomiczną, której zadaniem jest aktualizacja punktu pracy poprzedzająca każdą interwencję algorytmu regulacji predykcyjnej. W dodatkowym liniowym lub kwadratowym zadaniu optymalizacji ekonomicznej stosuje się aktualizowaną na bieżąco liniową, liniowo-kwadratową lub odcinkowo-liniową aproksymację modelu. W drugim przypadku zadanie optymalizacji ekonomicznej i algorytm regulacji predykcyjnej są zintegrowane w pojedynczym problemie optymalizacji. Aby ograniczyć nakład obliczeń stosuje się aktualizowaną na bieżąco liniową lub liniowo-kwadratową aproksymację modelu, dzięki czemu otrzymuje się zadanie optymalizacji ekonomicznej w postaci problemu programowania kwadratowego.

**Słowa kluczowe:** Regulacja predykcyjna, optymalizacja, aproksymacja, linearyzacja, systemy nieliniowe, sterowanie z ograniczeniami.

### Structures and algorithms of co-operation of predictive control and on-line economic optimisation

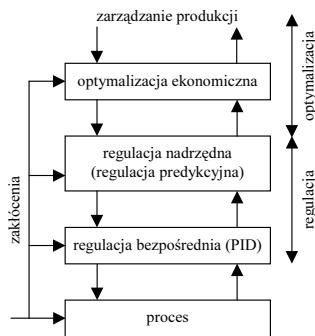
#### Abstract

The paper is concerned with co-operation of model predictive control (MPC) algorithms with nonlinear economic optimisation. The problem is particularly important when dynamics of disturbances is comparable with dynamics of the process itself, since in such cases application of the classical multilayer (hierarchical) structure with infrequent economic optimisation may be not efficient. Two classes of control structures are investigated. In the first class an additional simplified optimisation is used which recalculates the operating point as frequently as the MPC controller executes. In the supplementary linear or quadratic programming optimisation problem approximate linear, linear-quadratic (updated on-line) or piecewise-linear models of the process are used. In the second class the economic optimisation and MPC manipulated variables calculation is integrated into one optimisation problem. To reduce the

co liniową, liniowo-kwadratową lub odcinkowo-liniową aproksymację modelu statycznego. W drugiej strukturze sterowania algorytm regulacji predykcyjnej jest zintegrowany z optymalizacją ekonomiczną w taki sposób, że zamiast złożonego zadania nieliniowej optymalizacji ekonomicznej otrzymuje się zadanie optymalizacji kwadratowej.

## 2. Standardowa hierarchiczna struktura sterowania

Na rys. 1 przedstawiono hierarchiczną strukturę sterowania z nieliniową optymalizacją ekonomiczną oraz dwoma warstwami regulacji: regulacją bezpośrednią i regulacją nadrzędną, w której stosowane są w praktyce algorytmy regulacji predykcyjnej. Częstotliwość interwencji każdej warstwy jest inna, dla warstwy najwyższej jest ona najmniejsza, a dla warstwy najniższej największa. Zazwyczaj problem optymalizacji ekonomicznej rozwiązywany jest co około godzinę, okres interwencji algorytmu regulacji predykcyjnej jest rzędu minut, natomiast regulacji bezpośredniej rzędu sekund.



Rys. 1. Hierarchiczna struktura sterowania  
Fig. 1. Hierarchical control system structure

### 2.1. Optymalizacja ekonomiczna punktu pracy

Celem najwyższej warstwy hierarchicznej struktury sterowania jest maksymalizacja zysku produkcji przy istniejących ograniczeniach. Nieliniowe zadanie optymalizacji ekonomicznej ma zazwyczaj postać

$$\min_{u^s} \{J_E(k) = c_u^T u^s - c_y^T y^s\} \quad (1)$$

przy ograniczeniach :

$$\begin{aligned} u_{\min} &\leq u^s \leq u_{\max} \\ y_{\min} &\leq y^s \leq y_{\max} \\ y^s &= F(u^s, \tilde{w}) \end{aligned}$$

gdzie funkcja  $F: \mathcal{R}^{n_u} \times \mathcal{R}^{n_w} \rightarrow \mathcal{R}^{n_y}$  jest nieliniowym modelem właściwości statycznych procesu (zakłada się, że  $F$  jest podwójnie różniczkowalna),  $n_u, n_w, n_y$  oznaczają liczbę, odpowiednio: zmiennych sterujących, zakłóceń i wyjść procesu,  $\tilde{w}$  jest bieżącą wartością zakłóceń (mierzona lub estymowana). Wektory  $c_u \in \mathcal{R}^{n_u}$ ,  $c_y \in \mathcal{R}^{n_y}$  są cenami wynikającymi z uwarunkowań ekonomicznych, natomiast  $u_{\min}, u_{\max}, y_{\min}, y_{\max}$  są wektorami ograniczeń nałożonych na zmienne wejściowe i wyjściowe procesu.

### 2.2. Algorytm regulacji predykcyjnej

W każdej iteracji algorytmu regulacji predykcyjnej wyznaczany jest ciąg przyszłych przyrostów sygnałów sterujących (lub odpowiadających im wartości) minimalizujący wskaźnik jakości

regulacji. Do sterowania stosowany jest jedynie pierwszy element wyznaczonego ciągu. W następnej iteracji algorytmu, po uaktualnieniu pomiarów, cała procedura zostaje powtórzona [11, 12, 14].

Niech  $\hat{u}^s$  oznacza rozwiązanie nieliniowego problemu optymalizacji (1). Przy wykorzystaniu modelu statycznego  $F(u^s, \tilde{w})$  wyznaczone są optymalne wartości sygnałów wyjściowych  $\hat{y}^s$ , odpowiadające  $\hat{u}^s$ . Wektor  $\hat{y}^s$  jest następnie przekazywany do zadania optymalizacji algorytmu regulacji predykcyjnej jako wektor wartości zadanych określający żądany punkt pracy. Dla najprostszego, ale i standardowego przypadku, gdy liczba wyjść regulowanych jest równa ilości zmiennych sterujących ( $n_u = n_y$ ), zadanie to można sformułować w postaci

$$\min_{\Delta u(k)} \{J_{MPC}(k) = \sum_{p=1}^N \|y^{zad}(k+p|k) - y(k+p|k)\|_{M_p}^2 + \sum_{p=0}^{N_u-1} \|\Delta u(k+p|k)\|_{A_p}^2\} \quad (2)$$

przy ograniczeniach :

$$\begin{aligned} u_{\min} &\leq u(k+p|k) \leq u_{\max}, & p &= 0, \dots, N_u - 1 \\ -\Delta u_{\max} &\leq \Delta u(k+p|k) \leq \Delta u_{\max}, & p &= 0, \dots, N_u - 1 \\ y_{\min} &\leq y(k+p|k) \leq y_{\max}, & p &= 1, \dots, N \end{aligned}$$

gdzie

$$\Delta u(k) = [\Delta u(k|k)^T \quad \dots \quad \Delta u(k+N_u-1|k)^T]^T$$

jest wektorem przyszłych przyrostów sygnałów sterujących,  $y(k+p|k)$  jest wektorem predykcji sygnałów wyjściowych dla chwili  $k+p$  wyznaczonym w bieżącej chwili  $k$ ,  $N$  jest horyzontem predykcji,  $N_u$  jest horyzontem sterowania,  $M_p \geq 0$  i  $A_p > 0$  są diagonalnymi macierzami wagowymi o wymiarowości, odpowiednio,  $n_y \times n_y$  i  $n_u \times n_u$ . Najczęściej zakłada się, że trajektoria zadana jest stała na horyzontie predykcji, czyli  $y^{zad}(k+p|k) = \hat{y}^s$ ,  $p=1, \dots, N$ .

Jeżeli do wyznaczenia predykcji wyjść stosuje się liniowy dynamiczny model procesu, można wykorzystać zasadę superpozycji. Predykcja może być wówczas przedstawiona jako suma dwóch składników

$$y(k) = G\Delta u(k) + y^0(k) \quad (3)$$

gdzie

$$G = \begin{bmatrix} S_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ S_2 & S_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_N & S_{N-1} & \dots & S_{N-N_u+1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

jest macierzą dynamiczną o wymiarowości  $n_y N \times n_u N_u$  zawierającą współczynniki odpowiedzi skokowej modelu [11, 14].

Pierwszy składnik we wzorze (3) jest odpowiedzią wymuszoną, która zależy jedynie od przyszłych przyrostów sygnałów sterujących, natomiast  $y^0(k)$  jest odpowiedzią swobodną, zależną wyłącznie od przeszłości.

Jeżeli w problemie optymalizacji algorytmu regulacji predykcyjnej (2) uwzględnia się ograniczenia sygnałów wyjściowych, prawdopodobne jest wystąpienie problemu pustego zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Aby tego uniknąć, można zastosować tzw. miękkie ograniczenia wyjść. W ogólności istnieje kilka różnych metod karania przekroczenia ograniczeń: norma liniowa, kwadratowa lub norma maksimum. W przypadku kary kwadratowej zadanie optymalizacji algorytmu regulacji predykcyjnej ma postać

$$\min_{\Delta u(k), \varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}} \{J_{MPC}(k) = \|y^s - G\Delta u(k) - y^0(k)\|_M^2 + \|\Delta u(k)\|_A^2 + \rho_{\min} \|\varepsilon_{\min}\|^2 + \rho_{\max} \|\varepsilon_{\max}\|^2\} \quad (5)$$

przy ograniczeniach :

$$\begin{aligned} u_{\min} &\leq J\Delta u(k) + u^{k-1} \leq u_{\max} \\ -\Delta u_{\max} &\leq \Delta u(k) \leq \Delta u_{\max} \\ y_{\min} - \varepsilon_{\min} &\leq G\Delta u(k) + y^0(k) \leq y_{\max} + \varepsilon_{\max} \\ \varepsilon_{\min} &\geq 0, \varepsilon_{\max} \geq 0 \end{aligned}$$

gdzie  $\varepsilon_{\min}$ ,  $\varepsilon_{\max}$  są wektorami o długości  $n_y N$  natomiast  $\rho_{\min}$ ,  $\rho_{\max}$  są dodatnimi wagami,

$$\begin{aligned} u_{\min} &= [u_{\min}^T \dots u_{\min}^T]^T, \quad u_{\max} = [u_{\max}^T \dots u_{\max}^T]^T \\ u^{k-1} &= [u(k-1)^T \dots u(k-1)^T]^T \\ \Delta u_{\max} &= [\Delta u_{\max}^T \dots \Delta u_{\max}^T]^T \end{aligned} \quad (6)$$

są wektorami o długości  $n_u N_u$ ,

$$\begin{aligned} y_{\min} &= [y_{\min}^T \dots y_{\min}^T]^T, \quad y_{\max} = [y_{\max}^T \dots y_{\max}^T]^T \\ y(k) &= [y(k+1|k)^T \dots y(k+N|k)^T]^T \\ y^0(k) &= [y^0(k+1|k)^T \dots y^0(k+N|k)^T]^T \end{aligned} \quad (7)$$

są wektorami o długości  $n_y N$ , natomiast

$$J = \begin{bmatrix} I_{n_u \times n_u} & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} & \dots & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} \\ I_{n_u \times n_u} & I_{n_u \times n_u} & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} & \dots & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{n_u \times n_u} & I_{n_u \times n_u} & I_{n_u \times n_u} & \dots & I_{n_u \times n_u} \end{bmatrix} \quad (8)$$

jest macierzą o wymiarowości  $n_u N_u \times n_u N_u$ ,  $M$  i  $A$  są macierzami diagonalnymi o wymiarowości  $n_y N \times n_y N$  i  $n_u N_u \times n_u N_u$ , złożonymi z macierzy  $M_p$  i  $A_p$ ,  $y^s$  jest tensorowym iloczynem Kroneckera wektora  $e_y^s = [1 \dots 1]^T$  o długości  $N$  i wektora  $y^s$

$$y^s = e_y^s \otimes y^s = \left[ (y^s)^T \dots (y^s)^T \right]^T \quad (9)$$

### 3. Hierarchiczna struktura sterowania z pomocniczą optymalizacją ekonomiczną

Ponieważ w warstwie optymalizacji ekonomicznej stosuje się złożony, nieliniowy model właściwości statycznych procesu, zadanie optymalizacji (1) jest zazwyczaj trudne obliczeniowo, a więc jego rozwiązanie wymaga czasu. Jeżeli zmienność zakłóceń jest duża i zmiany te następują szybko, sterowanie w klasycznej strukturze hierarchicznej przy znacznie mniejszej częstotliwości optymalizacji ekonomicznej w porównaniu z dynamiką zakłóceń prowadzi zwykle do pogorszenia efektywności ekonomicznej procesu.

Ponieważ zwiększenie częstotliwości rozwiązywania nieliniowego zadania optymalizacji ekonomicznej jest w praktyce ograniczone z uwagi na dużą złożoność problemu, w strukturze sterowania można wprowadzić pomocniczą optymalizację ekonomiczną [1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15]. Hierarchiczna struktura sterowania z pomocniczą optymalizacją ekonomiczną została przedstawiona na rys. 2. Każde uruchomienie algorytmu regulacji predykcyjnej

poprzedzone jest rozwiązaniem zadania pomocniczej optymalizacji ekonomicznej. Choć zadanie nieliniowej optymalizacji ekonomicznej rozwiązywane jest rzadko, aktualny punkt pracy jest korygowany w optymalizacji pomocniczej, zmiany zakłóceń mogą więc być uwzględnione. W problemie optymalizacji pomocniczej wykorzystuje się uproszczony model właściwości statycznych procesu. Najprostszym i stąd często stosowanym, choć najbardziej zgrubnym, suboptymalnym rozwiązaniem jest zastosowanie modelu statycznego odpowiadającego modelowi dynamicznemu użytemu w algorytmie regulacji predykcyjnej. Zadanie optymalizacji pomocniczej można zapisać w postaci zadania programowania liniowego

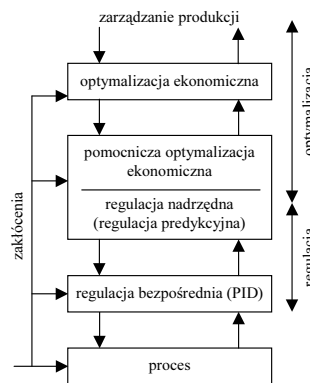
$$\min_{u^s} \{J_E(k) = c_u^T \Delta u^s - c_y^T \Delta y^s\} \quad (10)$$

przy ograniczeniach :

$$\begin{aligned} u_{\min} &\leq u^s \leq u_{\max} \\ y_{\min} &\leq y^s \leq y_{\max} \\ \Delta y^s &= H \Delta u^s \\ y^s &= y^0(k+N|k) + \Delta y^s \\ u^s &= u(k-1) + \Delta u^s \end{aligned}$$

gdzie  $H$  jest macierzą wzmocnień o wymiarowości  $n_y \times n_u$ .

Lepszym koncepcyjnie rozwiązaniem jest zastosowanie uproszczonego modelu statycznego odpowiadającego złożonemu modelowi stosowanemu w nieliniowym problemie optymalizacji ekonomicznej [7, 8, 9, 10, 15]. W ogólności, biorąc pod uwagę dokładność aproksymacji i złożoność wynikłego zadania optymalizacji, na uwagę zasługuje aktualizowana na bieżąco liniowa, liniowo-kwadratowa lub odcinkowo-liniowa aproksymacja modelu.



Rys. 2. Hierarchiczna struktura sterowania z pomocniczą optymalizacją ekonomiczną

Fig. 2. Hierarchical control system structure with steady-state target calculation

#### 3.1. Sukcesywna linearyzacja

Aby punkt pracy wyznaczony w pomocniczej optymalizacji ekonomicznej był położony możliwie blisko rozwiązania uzyskanego z nieliniowej optymalizacji, nieliniowy model statyczny jest sukcesywnie linearyzowany przy uwzględnieniu bieżącego punktu pracy. Liniowa aproksymacja modelu nieliniowego ma postać

$$y^s = F(u^s, \tilde{w}) + H(k)\Delta u^s \quad (11)$$

przy czym macierz  $H(k)$  zawiera pochodne cząstkowe nieliniowej funkcji  $y^s = F(u^s, \tilde{w})$  w aktualnym punkcie pracy zdeterminowanym przez  $u(k-1)$

$$\mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(u(k-1), \tilde{w})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F(u(k-1), \tilde{w})}{\partial u_{n_u}} \\ \frac{\partial f_1(u(k-1), \tilde{w})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1(u(k-1), \tilde{w})}{\partial u_{n_u}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n_y}(u(k-1), \tilde{w})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_{n_y}(u(k-1), \tilde{w})}{\partial u_{n_u}} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Macierz  $\mathbf{H}(k)$  jest zazwyczaj wyznaczana numerycznie za pomocą metodą różnic skończonych. Uwzględniając zadanie nieliniowej optymalizacji ekonomicznej (1), odpowiadające mu zadanie optymalizacji pomocniczej można zapisać w postaci zadania programowania liniowego

$$\min_{u^s} \{J_E(k) = c_u^T \Delta u^s - c_y^T \Delta y^s\} \quad (13)$$

przy ograniczeniach :

$$u_{\min} \leq u^s \leq u_{\max}$$

$$y_{\min} \leq y^s \leq y_{\max}$$

$$\Delta y^s = \mathbf{H}(k) \Delta u^s$$

$$y^s = F(u^s, \tilde{w}) + \Delta y^s$$

$$u^s = u(k-1) + \Delta u^s$$

Warto jeszcze raz podkreślić, że liniowy model statyczny zastosowany w powyższym zadaniu pomocniczej optymalizacji jest uproszczoną wersją modelu nieliniowego stosowanego w nieliniowej optymalizacji. Jest to koncepcyjnie lepsze rozwiązanie niż zastosowanie w pomocniczej optymalizacji (10) modelu statycznego odpowiadającego modelowi dynamicznemu (zazwyczaj liniowemu) stosowanemu w algorytmie regulacji predykcyjnej. Po rozwiązaniu problemu optymalizacji (13), liniowa aproksymacja modelu (11) jest stosowana w celu obliczenia wektora  $\hat{y}^s$  odpowiadającego wyznaczonemu wektorowi  $\hat{u}^s$ , który jest przekazywany do zadania optymalizacji algorytmu regulacji predykcyjnej jako żądany optymalny punkt pracy.

### 3.2. Sukcesywna aproksymacja liniowo-kwadratowa

Czasami aproksymacja liniowa (11) modelu statycznego  $y^s = F(u^s, \tilde{w})$  może nie być wystarczająco dokładna. Jeżeli tylko funkcja  $J_E$  minimalizowana w zadaniu optymalizacji (1) jest liniowa, rozwiązaniem naturalnym jest wykorzystanie dokładniejszej aproksymacji liniowo-kwadratowej. Ma ona postać

$$y^s = F(u^s, \tilde{w}) + \mathbf{H}(k) \Delta u^s + 0.5(\mathbf{I}_{n_y \times n_y} \otimes (\Delta u^s)^T) \mathbf{B}(k) \Delta u^s \quad (14)$$

gdzie macierz  $\mathbf{B}(k)$  o wymiarowości  $n_y n_u \times n_u$  zawiera pochodne cząstkowe drugiego rzędu nieliniowej funkcji  $y^s = F(u^s, \tilde{w})$  w aktualnym punkcie pracy zdeterminowanym przez  $u(k-1)$ . Uwzględniając zadanie nieliniowej optymalizacji ekonomicznej (1), odpowiadające mu zadanie optymalizacji pomocniczej można zapisać w postaci zadania programowania kwadratowego

$$\min_{u^s} \{J_E(k) = c_u^T \Delta u^s - c_y^T \Delta y^s = c_u^T \Delta u^s - c_y^T (\mathbf{H}(k) \Delta u^s + 0.5(\mathbf{I}_{n_y \times n_y} \otimes (\Delta u^s)^T) \mathbf{B}(k) \Delta u^s)\} \quad (15)$$

przy ograniczeniach :

$$u_{\min} \leq u^s \leq u_{\max}$$

$$y_{\min} \leq y^s \leq y_{\max}$$

$$\Delta y^s = \mathbf{H}(k) \Delta u^s$$

$$y^s = F(u^s, \tilde{w}) + \Delta y^s$$

$$u^s = u(k-1) + \Delta u^s$$

W porównaniu z aproksymacją liniową, aproksymacja liniowo-kwadratowa jest rozwiązaniem potencjalnie dokładniejszym, zastosowana w optymalizacji pomocniczej powinna dawać rozwiązania położone bliżej punktów optymalnych wyznaczonych w wyniku rozwiązania nieliniowego zadania optymalizacji ekonomicznej (1). W szczególności, jest ona rozwiązaniem właściwym wówczas, gdy nie ma ograniczeń nałożonych na zmienne wyjściowe procesu.

Warto podkreślić, że aproksymacja kwadratowa (14) modelu statycznego procesu jest wykorzystana w zadaniu optymalizacji pomocniczej jedynie w funkcji celu, natomiast w ograniczeniach musi być wykorzystana aproksymacja liniowa (11). W przeciwnym przypadku niemożliwe by było sformułowanie powyższego zadania w postaci problemu optymalizacji kwadratowej. Może to być zasadniczą wadą aproksymacji liniowej, ponieważ bardzo często w punkcie optymalnym (rozwiązaniu) ograniczenia są aktywne. W sytuacji takiej konieczne jest wykorzystanie dokładniejszej metody aproksymacji modelu właściwości statycznych procesu użytego w ograniczeniach zadania optymalizacji pomocniczej.

### 3.3. Aproksymacja odcinkowo-liniowa

Aproksymacja odcinkowo-liniowa jest najbardziej złożoną, ale i najdokładniejszą metodą aproksymacji nieliniowego modelu statyki zapewniającą dużą dokładność aproksymacji i pozwalającą otrzymać liniową lub liniowo-kwadratową prostą postać zadania optymalizacji pomocniczej. Jest ona wyznaczana na podstawie wybranej siatki punktów sygnałów wejściowych i wyjściowych wyznaczonych na podstawie modelu nieliniowego. Siatka ta i odpowiadająca jej aproksymacja może być wyznaczona jednokrotnie, dla całego zakresu zmiennych wejściowych, lub też sukcesywnie, jedynie wokół aktualnego punktu pracy.

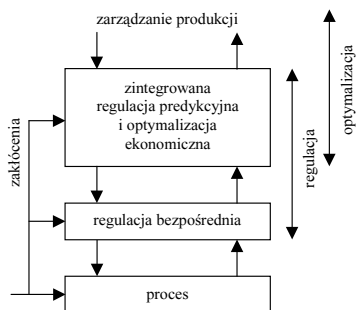
Aproksymacja odcinkowo-liniowa jest dobrze znaną techniką w optymalizacji. Prowadzi ona do mieszanego liniowego zadania optymalizacji pomocniczej lub też do klasycznego zadania optymalizacji liniowej, gdy wykorzystana procedura optymalizacji pozwala zadeklarować zmienne typu SOS (ang. Special Ordered Sets), które definiują aproksymację odcinkowo-liniową [17]. Należy również wspomnieć, że w przypadku ograniczonej liczby zmiennych decyzyjnych przybliżone rozwiązanie problemu optymalizacji pomocniczej można po prostu znaleźć przeglądając wartości funkcji celu i sprawdzając spełnienie ograniczeń we wszystkich punktach siatki [15].

### 4. Hierarchiczna struktura sterowania z algorytmem regulacji predykcyjnej zintegrowanym z optymalizacją ekonomiczną

W pokazanej na rys. 2 strukturze hierarchicznej na bieżąco muszą być rozwiązywane trzy zadania optymalizacji, a mianowicie: nieliniowy problem optymalizacji ekonomicznej (1), pomocnicze zadanie optymalizacji liniowej (13) lub kwadratowej (15) oraz kwadratowy problem optymalizacji (2) algorytmu regulacji predykcyjnej. Jako alternatywę można zastosować pokazaną na rys. 3 uproszczoną strukturę hierarchiczną z algorytmem regulacji predykcyjnej zintegrowanym z optymalizacją ekonomiczną [6, 8, 16, 18]. W podejściu tym integruje się pomocnicze zadanie optymalizacji i algorytm regulacji predykcyjnej, przy czym wykorzystuje się bieżącą aproksymację liniową lub liniowo-kwadratową modelu statyki. W strukturze z rys. 3 nie pokazano nadrzędnej warstwy nieliniowej optymalizacji ekonomicznej. Ze względów bezpieczeństwa może być ona jednak obecna w strukturze sterowania (okres jej interwencji jest oczywiście znacznie większy niż algorytmu zintegrowanego).

Najpierw rozpatrzmy przypadek teoretyczny, w którym nieliniowy problem optymalizacji ekonomicznej integruje się bezpośrednio z zadaniem optymalizacji algorytmu regulacji. Otrzymuje się w ten sposób nieliniowe zadanie optymalizacji, które jest

złożone obliczeniowo, ale posłuży jako punkt odniesienia (wzór do porównań) dla właściwych struktur zintegrowanych.



Rys. 3. Hierarchiczna struktura sterowania z algorytmem regulacji predykcyjnej zintegrowanym z optymalizacją ekonomiczną

Fig. 3. Hierarchical control system structure with MPC advanced control layer integrated with economic optimisation

Bezpośrednio integrując nieliniowy problem optymalizacji ekonomicznej (1) z zadaniem optymalizacji algorytmu regulacji predykcyjnej (5) otrzymuje się

$$\min_{\Delta u(k), u^s, \varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}} \{J_{MPC}(k) + \gamma J_E(k) = \|y^s - G\Delta u(k) - y^0(k)\|_M^2 + \|\Delta u(k)\|_A^2 + \gamma(c_u^T u^s - c_y^T y^s) + \rho_{\min} \|\varepsilon_{\min}\|^2 + \rho_{\max} \|\varepsilon_{\max}\|^2\} \quad (16)$$

przy ograniczeniach :

$$\begin{aligned} u_{\min} &\leq J\Delta u(k) + u^{k-1} \leq u_{\max} \\ -\Delta u_{\max} &\leq \Delta u(k) \leq \Delta u_{\max} \\ y_{\min} - \varepsilon &\leq G\Delta u(k) + y^0(k) \leq y_{\max} + \varepsilon \\ \varepsilon_{\min} &\geq 0, \varepsilon_{\max} \geq 0 \\ u_{\min} &\leq u^s \leq u_{\max} \\ y_{\min} &\leq y^s \leq y_{\max} \\ y^s &= F(u^s, \tilde{w}) \end{aligned}$$

gdzie  $\gamma$  jest dodatnim współczynnikiem. W ogólności, problem optymalizacji (16) jest nieliniowy, ponieważ wykorzystuje się pełny, nieliniowy model statyczny  $F(u^s, \tilde{w})$ .

Rozpatrzmy teraz dwie struktury zintegrowane, formułowane jako zadanie optymalizacji kwadratowej. W przypadku pierwszej z nich, stosuje się bieżącą linearyzację modelu statyki, natomiast w drugim przypadku aproksymację liniowo-kwadratową.

#### 4.1. Algorytm regulacji predykcyjnej i optymalizacji ekonomicznej z linearyzacją

Jak już wspomniano, najczęściej w algorytmach regulacji predykcyjnej wykorzystuje się liniowe dynamiczne modele procesu, ponieważ tylko wówczas wektor zmiennych decyzyjnych algorytmu wyznacza się rozwiązując zadanie optymalizacji kwadratowej (5). Idea pierwszego podejścia do problemu integracji polega na zastosowaniu aktualizowanego na bieżąco przybliżenia liniowego modelu statyki, podobnie jak ma to miejsce w pomocniczym zadaniu optymalizacji ekonomicznej. Dzięki temu nieliniowe zadanie optymalizacji (16) może być zastąpione zadaniem kwadratowym. Uwzględniając aktualny punkt pracy procesu określony przez  $u(k-1)$ , do wyznaczenia wektora  $y^s$  stosuje się linearyzację modelu nieliniowego

$$y^s = F(u(k-1), \tilde{w}) + H(k)(u^s - u(k-1)) \quad (17)$$

W rezultacie otrzymuje się następujące zintegrowane zadanie optymalizacji

$$\min_{\Delta u(k), u^s, \varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}} \{J_{MPC}(k) + \gamma J_E(k) = \|y^s - G\Delta u(k) - y^0(k)\|_M^2 + \|\Delta u(k)\|_A^2 + \gamma(c_u^T u^s - c_y^T y^s) + \rho_{\min} \|\varepsilon_{\min}\|^2 + \rho_{\max} \|\varepsilon_{\max}\|^2\} \quad (18)$$

przy ograniczeniach :

$$\begin{aligned} u_{\min} &\leq J\Delta u(k) + u^{k-1} \leq u_{\max} \\ -\Delta u_{\max} &\leq \Delta u(k) \leq \Delta u_{\max} \\ y_{\min} - \varepsilon &\leq G\Delta u(k) + y^0(k) \leq y_{\min} + \varepsilon \\ \varepsilon_{\min} &\geq 0, \varepsilon_{\max} \geq 0 \\ u_{\min} &\leq u^s \leq u_{\max} \\ y_{\min} &\leq y^s \leq y_{\max} \\ y^s &= F(u(k-1), \tilde{w}) + H(k)(u^s - u(k-1)) \end{aligned}$$

#### 4.2. Algorytm regulacji predykcyjnej i optymalizacji ekonomicznej z aproksymacją liniowo-kwadratową

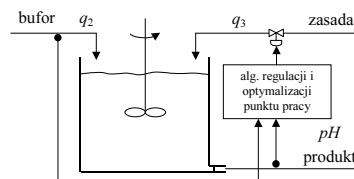
Jeżeli linearyzacja nie pozwala otrzymać wystarczająco dokładnej aproksymacji nieliniowego modelu statyki procesu, analogicznie jak ma to miejsce w przypadku pomocniczego zadania optymalizacji ekonomicznej, celowe wydaje się zastosowanie aproksymacji liniowo-kwadratowej. Ma ona postać

$$y^s = F(u(k-1), \tilde{w}) + H(k)(u^s - u(k-1)) + 0.5(I_{n_y, n_y} \otimes (u^s - u(k-1))^T) B(k)(u^s - u(k-1)) \quad (19)$$

Wzór (19) jest następnie wykorzystany w zintegrowanym zadaniu optymalizacji kwadratowej (18) jedynie w funkcji celu, natomiast w ograniczeniach należy zastosować aproksymację liniową.

#### 5. Wyniki symulacji

Rozważanym obiektem regulacji jest reaktor pH opisany w pracy [3]. Struktura reaktora z układami regulacji predykcyjnej i optymalizacji punktu pracy pokazana jest na rys. 4. Wyjściem procesu (zmienną regulowaną) jest współczynnik  $pH$ , zmienną wejściową jest natężenie przepływu zasady  $q_3$ . Mierzonym zakłóceniem jest natężenie przepływu substancji buforującej  $q_2$ .



Rys. 4. Reaktor pH z układami regulacji predykcyjnej i optymalizacji punktu pracy  
Fig. 4. Control system of the pH reactor

Jako algorytm regulacji predykcyjnej wykorzystano algorytm GPC [14]. Przyjęto horyzonty predykcyjnej i sterowania odpowiednio  $N=10$  i  $N_u=2$ , macierze wagowe  $M_p=I$  i  $A_p=\lambda I$ , gdzie  $\lambda=0,2$ .

Celem produkcji jest maksymalizacja zysków, co jest równoznaczne z maksymalizacją strumienia produktu  $pH$ . Ponieważ natężenie przepływu produktu jest proporcjonalne do sumy dopływów surowca  $q_3$  i zakłócenia  $q_2$ , minimalizowana ekonomiczna funkcja celu ma postać

$$J_E = -q_3^s \quad (20)$$

Sygnal sterujący jest ograniczony

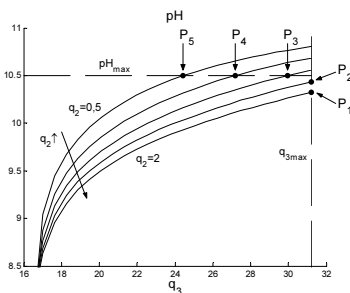
$$q_{3\min} \leq q_3, q_3^s \leq q_{3\max} \quad (21)$$

gdzie  $q_{3\min}=1 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $q_{3\max}=31,2 \text{ m}^3/\text{h}$ . W związku z normami, zmienna wyjściowa jest również ograniczona

$$pH, pH^s \leq pH_{\max} \quad (22)$$

gdzie  $pH_{\max}=10,5$ . Ograniczenia zmiennych wejściowych i wyjściowych procesu są uwzględniane zarówno w optymalizacji ekonomicznej jak i w algorytmie regulacji predykcyjnej.

Na rys. 5 przedstawiono charakterystykę statyczną procesu przy zmianie zakłóceń w granicach  $0,5 \text{ m}^3/\text{h} \leq q_2 \leq 2 \text{ m}^3/\text{h}$ . Zaznaczono również optymalne punkty pracy dla różnej wartości zakłóceń  $q_2$ . Dla  $q_2=2 \text{ m}^3/\text{h}$ , optymalny punkt pracy  $P_1$  leży na ograniczeniu sygnału sterującego  $q_{3\max}$ . Początkowo, przy zmniejszaniu wartości  $q_2$ , ograniczenie to pozostaje aktywne (punkt pracy  $P_2$ ). Przy dalszym zmniejszaniu wartości  $q_2$ , ograniczenie to staje się nieaktywne, aktywne natomiast staje się ograniczenie sygnału wyjściowego  $pH_{\max}$  (punkty pracy  $P_3, P_4, P_5$ ).



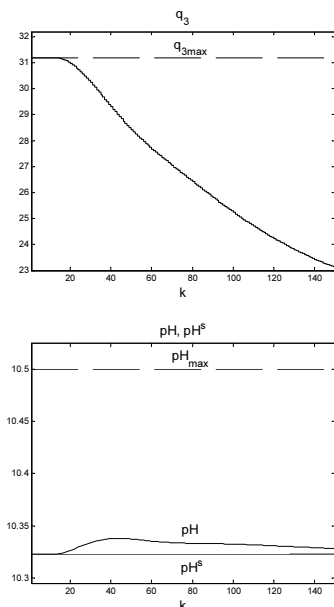
Rys. 5. Charakterystyka statyczna reaktora pH;  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  – optymalne punkty pracy dla różnej wartości zakłóceń  $q_2$

Fig. 5. Steady-state characteristic of the pH reactor and constraints;  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  – optimal operating points for different values of disturbance  $q_2$

Zakłada się, że zmiany mierzonego zakłócenia można opisać równaniem

$$q_2(k) = 2 - 1,6(\sin(0,008k) - \sin(0,08)) \quad (23)$$

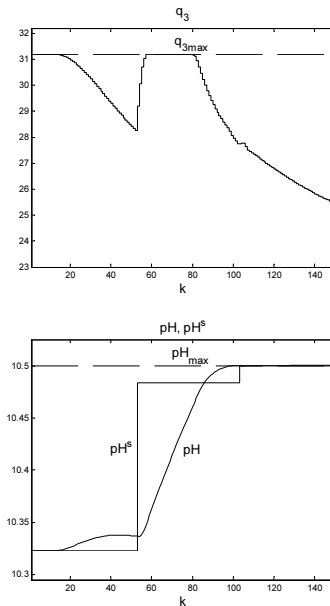
Niech  $T_E$  oznacza okres interwencji nieliniowej optymalizacji ekonomicznej. Gdy jest ona uruchamiana tak samo często jak algorytm regulacji predykcyjnej  $T_E=1$ . Na rys. 6 pokazano wyniki symulacji hierarchicznej struktury sterowania z jednokrotną nieliniową optymalizacją ekonomiczną w chwili  $k=3$ . Pomimo tego, że zakłócenie się zmienia, warstwa optymalizacji nie uwzględnia tych zmian, w rezultacie proces pozostaje w tym samym punkcie pracy. Wskaźnik jakości obliczony po zakończeniu symulacji ma wartość  $J_E=-4052,55$ .



Rys. 6. Wyniki symulacji hierarchicznej struktury sterowania I (z jednokrotną nieliniową optymalizacją ekonomiczną w chwili  $k=3$ )

Fig. 6. Simulation results obtained in hierarchical control system structure I (with economic optimization performed once at  $k=3$ )

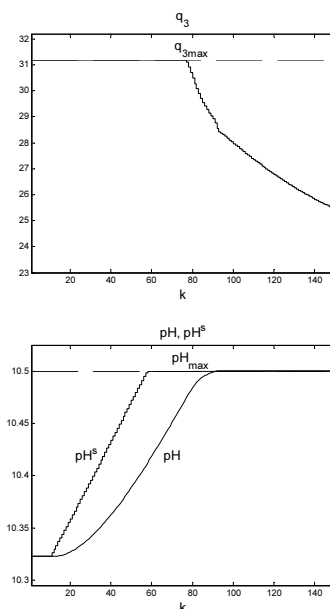
Na rys. 7 przedstawiono wyniki symulacji hierarchicznej struktury sterowania z nieliniową optymalizacją ekonomiczną wywoływaną 50 razy rzadziej niż algorytm regulacji predykcyjnej ( $T_E=50$ ). Dla tej struktury wskaźnik jakości przyjmuje wartość  $J_E=-4355,41$ . Dzięki zwiększeniu częstotliwości pracy warstwy optymalizacji wskaźnik ekonomiczny ulega poprawieniu, oczywiście jest jednak, że częstotliwość interwencji warstwy optymalizacji jest zbyt mała.



Rys. 7. Wyniki symulacji hierarchicznej struktury sterowania II (z nieliniową optymalizacją ekonomiczną wywoływaną 50 razy rzadziej niż algorytm regulacji predykcyjnej,  $T_E=50$ )

Fig. 7. Simulation results obtained in hierarchical control system structure II (with economic optimization performed 50 times less often than MPC algorithm executes,  $T_E=50$ )

Na rys. 8 przedstawiono wyniki symulacji struktury hierarchicznej w sytuacji idealnej, gdy w każdej iteracji algorytmu regulacji predykcyjnej wywoływana jest nieliniowa optymalizacja ekonomiczna ( $T_E=1$ ). Wskaźnik jakości przyjmuje wartość  $J_E=-4400,44$ .



Rys. 8. Wyniki symulacji hierarchicznych struktur sterowania III, IV i V (otrzymano wyniki identyczne ze względu na ograniczenia istniejące w układzie sterowania)

Fig. 8. Simulation results obtained in hierarchical control system structures III, IV and V (the obtained results are identical because of the constraints present in the control system)

Z uwagi na bardzo dużą złożoność obliczeniową struktura taka z reguły nie jest jednak możliwa do zastosowania w praktyce, stanowi jednak punkt odniesienia do porównań efektywności ekonomicznej różnych struktur sterowania.

W celu podniesienia jakości ekonomicznej struktury z nieliniową optymalizacją ekonomiczną wywołaną 50 razy rzadziej niż algorytm regulacji predykcyjnej rozważa się dwa zaproponowane w pracy podejścia, a mianowicie: strukturę hierarchiczną z pomocniczą optymalizacją ekonomiczną uruchamianą tak samo często jak algorytm regulacji predykcyjnej oraz zintegrowany algorytm regulacji predykcyjnej i optymalizacji. W obu przypadkach nieliniowy model statyczny jest linearyzowany w zależności od aktualnego punktu pracy. W obu rozważanych przypadkach otrzymano taką samą wartość ekonomicznego wskaźnika jakości  $J_E$  jak wówczas, gdy nieliniowa optymalizacja ekonomiczna wywołana jest w każdej iteracji algorytmu regulacji predykcyjnej.

W tabeli 1 porównano wartości ekonomicznych wskaźników jakości badanych struktur. Warto zauważyć, że badane struktury są znacznie prostsze pod względem obliczeniowym oferując taką samą jakość sterowania, co struktura „idealna” (z często powtarzaną optymalizacją ekonomiczną), której zastosowanie praktyczne w wielu przypadkach jest wątpliwe ze względu na pracochłonność nieliniowej optymalizacji. Istotną rolę w badanym przypadku odgrywają ograniczenia. Trzy ostatnie struktury sterowania (III, IV i V) przez cały czas utrzymują punkt pracy na którymś z ograniczeń co widać analizując charakterystyki statyczne pokazane na rys. 5. Powoduje to otrzymanie takich samych odpowiedzi we wszystkich trzech przypadkach (rys. 6).

Tab. 1. Porównanie ekonomicznego wskaźnika jakości w różnych strukturach sterowania

Tab. 1. Comparison of the economic performance index values in different control system structures

numer struktury	opis	$J_E$
I	hierarchiczna struktura sterowania z jednokrotną nieliniową optymalizacją ekonomiczną	-4052,55
II	hierarchiczna struktura sterowania z nieliniową optymalizacją ekonomiczną wywołaną 50 razy rzadziej niż algorytm regulacji predykcyjnej ( $T_E=50$ )	-4355,41
III	hierarchiczna struktura sterowania z nieliniową optymalizacją ekonomiczną wywołaną tak samo często, jak algorytm regulacji predykcyjnej ( $T_E=1$ )	-4400,44
IV	struktura hierarchiczna z nieliniową optymalizacją ekonomiczną wywołaną 50 razy rzadziej niż algorytm regulacji predykcyjnej ( $T_E=50$ ) z pomocniczą optymalizacją ekonomiczną uruchamianą tak samo często jak algorytm regulacji predykcyjnej	-4400,44
V	algorytm regulacji predykcyjnej zintegrowany z optymalizacją ekonomiczną z linearyzacją	-4400,44

## 6. Podsumowanie

Zagadnienie współpracy algorytmów regulacji predykcyjnej i bieżącej ekonomicznej optymalizacji punktu jest szczególnie istotny wtedy, kiedy dynamika zakłóceń jest porównywalna z dynamiką procesu, co ma często miejsce w praktyce. Ponieważ zwiększenie częstotliwości interwencji warstwy nieliniowej optymalizacji nie jest zwykle możliwe z uwagi na dużą złożoność obliczeniową, stosuje się jedno z dwóch podejść bazujących na aproksymacji stosowanego do optymalizacji nieliniowego modelu statycznego procesu, a mianowicie: strukturę warstwową z pomocniczą optymalizacją ekonomiczną oraz strukturę sterowania z algorytmem regulacji predykcyjnej zintegrowanym z optymalizacją ekonomiczną. W obu przypadkach optymalny punkt pracy jest aktualizowany z częstotliwością pracy algorytmu regulacji predykcyjnej.

W pracy przedstawiono kilka wariantów systemów regulacji i optymalizacji ekonomicznej. W zależności od potrzeb i możliwości projektant może dobrać właściwe rozwiązanie. Proponowane struktury i algorytmy mają dwie zalety. Pierwszą z nich jest niewielka złożoność obliczeniowa. Zamiast trudnego problemu nieliniowej optymalizacji ekonomicznej konieczne jest rozwiązanie jedynie zadania optymalizacji liniowej lub kwadratowej. Zaleta ta została otrzymana dzięki zastosowaniu, w zależności od

konkretnego rozwiązania, aktualizowanej na bieżąco liniowej, liniowo-kwadratowej lub odcinkowo-liniowej aproksymacji modelu statycznego procesu. Aproksymacja ta jest dodatkowym elementem zadania obliczeniowego, ale o mniejszej złożoności obliczeniowej. Ponadto, aproksymacja może być wyznaczana nie w każdej iteracji algorytmu regulacji predykcyjnej, ale rzadziej, zależy to od dynamiki zakłóceń. Drugą zaletą jest efektywność ekonomiczna. Wyznaczony punkt pracy jest, bowiem, zazwyczaj położony bardzo blisko lub wręcz jest tożsamy z rozwiązaniem uzyskanym z nieliniowej optymalizacji.

Praca naukowa finansowana ze środków budżetowych na naukę w latach 2005-2007 jako projekt badawczy.

## 7. Literatura

- [1] T. L. Blevins, G. K. McMillan, W. K. Wojsznis, M. W. Brown (2003): *Advanced control unleashed*, ISA.
- [2] M. Brdys, P. Tatjewski (2005): *Iterative algorithms for multilayer optimizing control*. Imperial College Press, World Scientific, London/Singapore.
- [3] J. Chen, T. C. Huang (2004): Applying neural networks to on-line updated PID controllers for nonlinear process control. *Journal of Process Control*, tom 14, nr 2, str. 211-230.
- [4] W. Findeisen, F. N. Bailey, M. Brdys, K. Malinowski, P. Tatjewski, A. Woźniak (1980): *Control and coordination in hierarchical systems*. J. Wiley & Sons, Chichester – New York – Brisbane – Toronto.
- [5] D. E. Kassmann, T. A. Badgwell, R. B. Hawkins (2000): Robust steady-state target calculation for model predictive control. *AIChE Journal*, tom 46, nr 5, str. 1007-1024.
- [6] M. Ławryńczuk, P. Marusak, P. Tatjewski (2007): Efficient MPC algorithm integrated with economic optimisation for MIMO systems. 13th International IEEE Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Szczecin, przyjęte do publikacji.
- [7] M. Ławryńczuk, P. Marusak, P. Tatjewski (2007): Cooperation of Model Predictive Control with steady-state economic optimisation. *Control and Cybernetics*, zgłoszone do publikacji.
- [8] M. Ławryńczuk, P. Marusak, P. Tatjewski (2007): Multilayer and integrated structures for predictive control and economic optimisation. International IFAC Conference on Large Scale Systems, Gdańsk, przyjęte do publikacji.
- [9] M. Ławryńczuk, P. Marusak, P. Tatjewski (2006): Integrating predictive control with steady-state optimisation. 12th IEEE International Conference Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, str. 445-452.
- [10] M. Ławryńczuk, P. Marusak, P. Tatjewski (2005): Bieżąca optymalizacja punktu pracy procesów regulowanych algorytmem predykcyjnym. XV Krajowa Konferencja Automatyki, Warszawa, str. 291-296.
- [11] J. M. Maciejowski (2002): *Predictive control with constraints*. Prentice Hall, Harlow.
- [12] J. A. Rossiter (2003). *Model-based predictive control*. CRC Press.
- [13] S. J. Qin, T. A. Badgwell (2003): A survey of industrial model predictive control technology, *Control Engineering Practice*, tom 11, nr 7, str. 733-764.
- [14] P. Tatjewski (2007): *Advanced control of industrial processes, structures and algorithms*. Springer, London.
- [15] P. Tatjewski, M. Ławryńczuk, P. Marusak (2006): Linking nonlinear steady-state and target set-point optimisation for model predictive control. IEE International Conference Control 2006, Glasgow, CD-ROM.
- [16] M. Tvrzka de Gouvea, D. Odloak (1998): One-layer real time optimization of LPG production in the FCC unit: procedure, advantages and disadvantages. *Computers and Chemical Engineering*, tom 22, Supplement, str. S191-S198.
- [17] H. P. Williams (1995): *Model building in mathematical programming*. J. Wiley, Chichester.
- [18] A. Zanin, M. Tvrzka de Gouvea, D. Odloak (2002): Integrating real-time optimization into model predictive controller of the FCC system. *Computers and Chemical Engineering*, tom 10, nr 8, str. 819-831.
- [19] A. Zanin, M. Tvrzka de Gouvea, D. Odloak (2000): Industrial implementation of a real-time optimization strategy for maximizing production of LPG in a FCC unit. *Computers and Chemical Engineering*, tom 24, nr 2-7, str. 525-531.