

**Dariusz SZEWCZYK**

POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH, WYDZIAŁ AUTOMATYKI ELEKTRONIKI I INFORMATYKI

**Planowanie eksperymentu dla wyznaczania warunku początkowego układu o parametrach rozłożonych**

Mgr inż. Dariusz SZEWCZYK

Ukończył w 2000 roku studia na Wydziale Automatyki, Elektroniki i Informatyki Politechniki Śląskiej uzyskując dyplom mgr inż. automatyka – robotyka o specjalności systemy pomiarowe. Od 2000 roku zajmuje się badaniami naukowymi w zakresie obserwowalności układów dynamicznych o parametrach rozłożonych oraz optymalnego rozmieszczenia czujników pomiarowych.

e-mail: [dariuszszewczyk@interia.pl](mailto:dariuszszewczyk@interia.pl)**Streszczenie**

W pracy przedstawiony został problem optymalnego rozmieszczenia czujników pomiarowych dla liniowego układu o parametrach rozłożonych opisanego równaniem różniczkowym cząstkowym typu parabolicznego z mieszanymi warunkami brzegowymi. Przedstawiony jest również sposób wyznaczenia przybliżenia funkcyjnego warunku początkowego.

**Słowa kluczowe:** układy o parametrach rozłożonych, rozmieszczenie czujników, estymacja parametrów, równanie różniczkowe cząstkowe, obserwowalność.

**Design of experiments for initial conditions identification in distributed – parameter systems****Abstract**

The optimum experimental design problem for linear distributed parameter systems described by linear parabolic equations is considered. The approach, based on appropriate optimization techniques, shows how to construct and determine the initial state.

**Keywords:** distributed parameter systems, sensor location, parameter estimation, linear parabolic equations, observability.

**1. Wstęp**

Procesy opisane liniowymi parabolicznymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi z różnego typu warunkami brzegowymi są układami dynamicznymi, których stan zależy nie tylko od czasu, ale również od zmiennych przestrzennych. Stan układu o parametrach rozłożonych jest zatem funkcją odpowiedniej liczby zmiennych przestrzennych. Bardzo ważnym zagadnieniem z punktu widzenia teorii sterowania jest kompletna wiedza na temat stanu takiego systemu. Jednak dysponując jedynie określoną ilością czujników pomiarowych nie można dokładnie określić stanu systemu w dowolnym punkcie przestrzeni. W tym przypadku konieczne jest określenie początkowego stanu systemu o parametrach rozłożonych na podstawie wyników pomiarów z odpowiednio rozmieszczonych czujników. Pojawia się tutaj problem odpowiedniej lokalizacji czujników pomiarowych w przestrzeni. Problem ten został opisany w literaturze [2, 3, 4, 8, 12, 13] pod kątem optymalnego rozmieszczenia czujników pomiarowych dla estymacji parametrów równania różniczkowego cząstkowego.

Pojawia się jednak dodatkowy problem, w ogólnym przypadku wyznaczenie początkowego stanu układu dysponując danymi z czujników pomiarowych jest trudne, ponieważ rozwiązanie parabolicznego równania różniczkowego cząstkowego jest przedstawione w postaci nieskończonego szeregu funkcyjnego.

Zaproponowany sposób wyznaczenia stanu początkowego układu polega na założeniu określonej postaci funkcji opisującej warunek początkowy:

$$w_0(0, x) = \sum_{k=1}^n \beta_k w_k(0, x)$$

gdzie:

$$k=1, 2, \dots, n,$$

$$w_0(0, x) = \lim_{t \rightarrow 0} w(t, x); w(t, x) - \text{stan układu},$$

$$x \in X - \text{obszar określoności równania różniczkowego}$$

cząstkowego,

$$w_k(0, x) - \text{składowe warunku początkowego},$$

$$w_k(0, x) = \lim_{t \rightarrow 0} w_k(t, x),$$

$$\beta_k - \text{nieznane parametry, } \beta_k \in R.$$

Postać założonych składowych funkcji opisującej warunek początkowy  $w_k(0, x)$  powinna zapewnić rozwiązanie równania różniczkowego cząstkowego w postaci sumy skończonej. Wtedy na podstawie danych pomiarowych z odpowiednio rozmieszczonych czujników można dokonać estymacji parametrów  $\beta_k$ , wyznaczając jednocześnie aproksymacyjnie funkcję opisującą warunek początkowy  $w_0(0, x)$ .

Dla wyznaczonego w ten sposób przybliżenia warunku początkowego otrzymujemy jednocześnie postać rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego w postaci sumy skończonej, co pozwala na analityczne określenie stanu układu  $w(t, x)$  dla dowolnych parametrów czasowych  $t$  i zmiennych przestrzennych  $x$ .

**2. Opis systemu**

Niech  $X$  oznacza ograniczony obszar w 2-wymiarowej przestrzeni  $R^2$ . (W niniejszej publikacji rozważany będzie obszar prostokąta o bokach długości  $a, b$ ).  $S$  jest brzegiem obszaru  $X$ . Wektor współrzędnych przestrzennych oznaczamy  $x=(x_1, x_2)$ .

Rozważmy liniowe paraboliczne równanie różniczkowe cząstkowe:

$$\frac{\partial w(t, x_1, x_2)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2}, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

gdzie obszar  $X$ , w którym określone równanie (1) jest prostokątem:

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq a \\ 0 \leq x_2 \leq b \end{cases}$$

z zerowymi mieszanymi warunkami brzegowymi

$$\begin{cases} \frac{\partial w(t, 0, x_2)}{\partial v} - A_1 w(t, 0, x_2) = 0 \\ \frac{\partial w(t, a, x_2)}{\partial v} - B_1 w(t, a, x_2) = 0 \\ \frac{\partial w(t, x_1, 0)}{\partial v} - A_2 w(t, x_1, 0) = 0 \\ \frac{\partial w(t, x_1, b)}{\partial v} - B_2 w(t, x_1, b) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

gdzie współczynniki  $A_1, A_2, B_1, B_2 > 0$ .

Warunki początkowe dla równania (1) dane są wzorem:

$$\lim_{t \rightarrow 0} w(t, x) = w_0(0, x), \quad w_0(0, x) \in L^2(X),$$

gdzie  $L^2(X)$  oznacza przestrzeń Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem w obszarze  $X$ .

### 3. Rozwiązanie równania i dobór postaci funkcji opisującej warunek początkowy

Używamy poniżej podwójny sposób indeksowania sum szeregów funkcyjnych  $ij$  oraz  $kl$  wynika z założonej dwuwymiarowej przestrzeni  $X$ . Wtedy rozwiązanie równania (1) z warunkami brzegowymi (2) przy dodatkowych upraszczających założeniach:

$$a \neq b$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \text{liczba niewymierna}$$

można przedstawić w postaci [1]:

$$w(t, x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \exp(s_{ij}t) \langle w_0(0, x_1, x_2), w_{ij}(x_1, x_2) \rangle_X w_{ij}(x_1, x_2)$$

$$\langle w_0(0, x_1, x_2), w_{ij}(x_1, x_2) \rangle_X = \alpha_{ij}$$

Ponadto [1]:

$$w_{ij}(x_1, x_2) = h \sin(\mu_i x_1 + \varepsilon_i) \sin(\nu_j x_2 + \delta_j) \quad i, j = 1, 2, \dots$$

$\mu_i \nu_j$  - dodatnie rozwiązania równania:

$$\frac{1}{A_m + B_m} \left( s - \frac{A_m B_m}{s} \right) = ctgl_m s \quad m=1, 2$$

$$\varepsilon_i = \arctg \frac{\mu_i}{a}$$

$$\delta_j = \arctg \frac{\nu_j}{b}$$

$$s_{ij} = -(\mu_i^2 + \nu_j^2).$$

W przypadku gdy boki prostokąta są jednakowe, tzn.  $a=b$ , wówczas dla ustalonej wartości  $s_{ij}$  istnieje więcej niż jedna funkcja  $w_{ij}(x_1, x_2)$  [1]. Co powoduje istotną komplikację rozwiązania równania (1).

Przybliżając warunek początkowy  $w_0(0, x_1, x_2)$  sumą funkcji  $w_{kl}(0, x_1, x_2)$  odpowiadającym funkcjom  $w_{ij}(x_1, x_2)$  dla  $i=k$  oraz  $j=l$ , otrzymujemy:

$$\alpha_{ij} = \int_X w_{ij}(x) \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} \beta_{kl} w_{kl}(0, x) dx$$

$$x = [x_1, x_2]$$

Ponieważ układ funkcji  $w_{ij}(x)$  jest ortogonalny [1], więc  $\alpha_{ij} \neq 0$  tylko dla  $i=k, j=l$ , otrzymujemy współczynniki  $\alpha_{ij}$  różne od zera tylko dla składowych  $i, j$  odpowiadających indeksom  $k, l$  warunku początkowego  $\beta_{kl} w_{kl}(0, x)$  (pozbymamy się sumy nieskończonej dla indeksów  $i, j$ ) [10, 11]. Oznaczając:

$$\alpha_{kl} = \beta_{kl} \alpha'_{kl}$$

$$\alpha'_{kl} = \int_X w_{kl}(x) w_{kl}(0, x) dx$$

w zależności od ilości przyjętych składowych  $n_k, n_l$ , w warunku początkowym  $w_0(0, x)$  odpowiedź układu (1) można przedstawić w postaci liniowej ze względu na parametry  $\beta_{kl}$  [10, 11]:

$$w(t, x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} \beta_{kl} \alpha'_{kl} w_{kl}(x_1, x_2) \exp(s_{kl}t) \quad (3)$$

### 4. Estymacja parametrów $\beta$

W przypadku liniowego względem wektora parametrów  $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_m]^T$  modelu odpowiedzi układu (1) opisanego wzorem (3) proces obserwacji można zapisać w postaci [12]:

$$z(x, t) = F^T(x, t) \beta + \varepsilon(x, t), \quad t \in [0, t_f] \quad x = [x_1, x_2],$$

gdzie:

$t_f$  - czas obserwacji

$z(x, t) = [z(x^1, t), \dots, z(x^N, t)]^T$  - wektor sygnału z  $N$  czujników,

$F(x, t) = [f(x^1, t), \dots, f(x^N, t)]$

$f(x^i, t) = [f_1(x^i, t), \dots, f_m(x^i, t)]^T, \quad i=1 \dots N$

$f_j(x^i, t) = \alpha'_{ij} w_{kl}(x^i) \exp(s_{kl}t), \quad j=1, 2, \dots, m,$

$\beta$  -  $m$  - wymiarowy wektor parametrów,  $\beta \in R^m$ ,

$\varepsilon(x, t) = [\varepsilon(x^1, t), \dots, \varepsilon(x^N, t)]^T$  - biały szum o zerowej wartości średniej w czasie i kowariancji:

$$E\{\varepsilon(x, t) \varepsilon^T(x', \tau)\} = C(x, x', t) \delta(t - \tau)$$

$\delta$  oznacza deltę Diraca, a macierz  $C(x, t) \in R^{N \times N}$  jest symetryczna i dodatnio określona dla każdego  $t \in [0, t_f]$ .

Ponieważ wyniki pomiarów są zniekształcone białym szumem (tzn. nie są skorelowane i charakteryzują się jednakową wariancją) można zastosować dodatkowe upraszczające założenie:

$$C = \sigma^2 I,$$

gdzie  $I$  jest  $N \times N$  - wymiarową macierzą jednostkową, a  $\sigma$  odgrywa rolę stałego odchylenia standardowego błędów pomiarowych.

Ponadto indeksy  $k=1 \dots n_k, l=1 \dots n_l$  przy warunku  $n_k \cdot n_l = m$ , odpowiadają składowej odpowiadającej indeksom  $kl$  dla funkcji opisującej warunek początkowy,  $x^1, x^2, \dots, x^N$  oznaczają położenie poszczególnych czujników w obszarze  $X \subset R^2$ , które przy estymacji parametrów  $\beta$  są znane i ustalone.

Problem estymacji parametrów jest następujący:

Znając funkcje  $\{F(x, t)\} \quad t \in [0, t_f]$  oraz  $\{z(x, t)\} \quad t \in [0, t_f]$  należy

znaleźć spośród wszystkich możliwych wektorów parametrów  $\beta$  taki, który minimalizuje ważne kryterium najmniejszych kwadratów postaci [6, 12]:

$$J(\beta) = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^{t_f} [z(x, t) - F^T(x, t)\beta]^T [z(x, t) - F^T(x, t)\beta] dt$$

Rozwiązanie zagadnienia estymacji można przedstawić w postaci:

$$\hat{\beta} = \left( \int_0^{t_f} F(x, t) F^T(x, t) dt \right)^{-1} \int_0^{t_f} F(x, t) z(x, t) dt$$

Wtedy kowariancja

$$\text{cov}\{\hat{\beta}\} = E\{(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T\} = \left( \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{t_f} F(x, t) F^T(x, t) dt \right)^{-1} = M^{-1}$$

gdzie  $m \times m$  wymiarowa macierz

$$M(x^1, \dots, x^N) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{t_f} F(x, t) F^T(x, t) dt$$

jest informacyjną macierzą Fishera [5, 7, 9, 12], a jej elementy zależą od lokalizacji czujników.

## 5. Optymalne rozmieszczenie czujników pomiarowych

Macierz  $M$  jest informacyjną macierzą Fishera zwaną w skrócie (FIM), która nie zależy od wektora obserwacji  $z(x, t)$ , lecz od rozmieszczenia czujników pomiarowych  $x^1, x^2, \dots, x^N$ . Problem optymalizacji polega na „najlepszym” rozmieszczeniu czujników (w sensie otrzymania minimalnej  $cov\{\beta\}$ , to znaczy maksymalizującym ilość informacji otrzymanych podczas eksperymentu).

Zadanie polega na takim doborze punktów  $x^1, x^2, \dots, x^N$ , aby zminimalizować pewną odpowiednio dobraną skalarną funkcję  $\Psi$  [12] bazującą na informacyjnej macierzy Fishera  $M$ . Funkcja  $\Psi$  jest tak skonstruowana aby jej minimalizacja prowadziła do minimalizacji macierzy odwrotnej do informacyjnej macierzy Fishera, co w efekcie prowadzi do minimalizacji  $cov\{\beta\}$ . Stąd:

$$\Psi[M(x^1, x^2, \dots, x^N)] \rightarrow \min_{x^1, \dots, x^N}$$

Zatem funkcja  $\Psi$  jest wskaźnikiem jakości rozmieszczenia punktów pomiarowych.

Dla uproszczenia, macierz FIM można przedstawić w postaci:

$$M(x^1, x^2, \dots, x^N) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{t_f} F(x^1, x^2, \dots, x^N, t) F^T(x^1, x^2, \dots, x^N, t) dt = \sum_{j=1}^N M_j(x^j)$$

gdzie:

$$M_j(x^j) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{t_f} f(x^j, t) f^T(x^j, t) dt$$

Aby zwiększanie ilości punktów pomiarowych  $x^i, i=1, 2, \dots, N$  nie wpływało na macierz  $M(x^1, x^2, \dots, x^N)$ , wprowadzamy przy założeniu  $\sigma=1$  uśrednioną (znormalizowaną) postać macierzy FIM [6, 12]:

$$M(x^1, x^2, \dots, x^N) = \sum_{j=1}^N M_j(x^j) = \frac{1}{N t_f} \sum_{j=1}^N \int_0^{t_f} f(x^j, t) f^T(x^j, t) dt \quad (4)$$

Ponieważ optymalizujemy rozmieszczenie czujników pomiarowych, zastosowanie postaci (4) macierzy FIM jest uzasadnione. Przykładowo, umieszczenie w jednym punkcie  $N$  czujników pomiarowych zmieni postać minimalizowanej funkcji  $\Psi[M(x^1, x^2, \dots, x^N)]$ , nie będzie jednak prowadzić do osiągnięcia optymalnego rozwiązania. Pozwoli nam to porównywać wskaźnik jakości  $\Psi[M(x^1, x^2, \dots, x^N)]$  dla różnych rozmieszczeń oraz różnych ilości punktów pomiarowych.

## 6. Wyznaczanie optymalnego rozmieszczenia czujników pomiarowych

Poniżej przedstawione zostaną teoria minimalizacji skalarniej funkcji opartej na Informacyjnej Macierzy Fishera oraz algorytm numeryczny pozwalający w ogólnym przypadku wyznaczyć optymalne rozmieszczenie czujników pomiarowych. Zagadnienia te zostały szczegółowo opisane w literaturze [2, 3, 4, 8, 10, 12, 13], dlatego w niniejszej publikacji przedstawiono je skrótowo.

Wprowadźmy zbiór zmiennych określających rozmieszczenie czujników  $\xi$

$$\xi = \begin{cases} x^1, x^2, \dots, x^N \\ p_1, p_2, \dots, p_N \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad p_i > 0,$$

gdzie:

$p_1, p_2, \dots, p_N$  – współczynniki wagowe dla poszczególnych czujników

$$x^i = (x_1^i, x_2^i), \quad i=1, 2, \dots, N$$

Przyjęty formalizm zapisu rozmieszczenia czujników pomiarowych  $\xi$  został zastosowany do teorii estymacji projektowania eksperymentu dla układów o parametrach rozłożonych w późnych latach 70. oraz wczesnych 80. Ponieważ niektóre punkty  $x^i$  mogą pojawiać się wielokrotnie w optymalnym rozmieszczeniu, współczynniki wagowe  $p_i$  można interpretować jako procentowy udział punktu  $x^i$  w projektowanym eksperymencie.

Wprowadzenie tak zdefiniowanego rozmieszczenia czujników  $\xi$  pozwala w prosty sposób zapisać znormalizowaną macierz FIM w postaci:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f(x^i, t) f^T(x^i, t) dt$$

### 6.1. Minimalizacja skalarniej funkcji bazującej na Informacyjnej Macierzy Fishera

Metoda iteracyjna wyznaczania optymalnego rozmieszczenia czujników, polega na dodawaniu do zbioru czujników pomiarowych  $\xi_k$ , wyznaczonych w  $k$ -tej iteracji, kolejnego punktu pomiarowego zdefiniowanego jako pomiaru skoncentrowanego w punkcie  $x \in X$  [12]. W tej sytuacji użyte poniżej oznaczenie  $\xi$  można interpretować jako rozmieszczenie czujników w  $k$ -tej iteracji, a  $x$  jako rozmieszczenie skoncentrowane w pojedynczym punkcie  $x \in X$ . Wprowadźmy funkcję  $\psi(x, \xi)$  [12]. Dla optymalnego rozmieszczenia czujników  $\xi^*$  uzyskujemy [12]:

$$\min_{x \in X} \psi(x, \xi^*) = 0$$

Oznaczając, dla uproszczenia obliczeń [12]

$$\psi(x, \xi) = c(\xi) - \phi(x, \xi),$$

gdzie:

$c(\xi)$  – zależy od aktualnego rozmieszczenia  $\xi$ ,

$\phi(x, \xi)$  – funkcja czułości zależy od aktualnego rozmieszczenia czujników  $\xi$  oraz od zmiennej  $x \in X$ , którą można również interpretować jako rozmieszczenie skoncentrowane w pojedynczym punkcie  $x \in X$ .

W dalszych rozważaniach przyjmujemy następująco zdefiniowaną funkcję  $\Psi[M(\xi)]$  (kryterium D-optymalne) [12]:

$$\Psi[M(\xi)] = -\ln \det M(\xi)$$

Kryterium D-optymalne jest niezmiennicze względem zmiany skali parametrów oraz liniowej transformacji wyjścia czujników [12], a ponadto zachodzą następujące równości:

$$\phi(x, \xi) = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f^T(x, t) M^{-1}(\xi) f(x, t) dt$$

gdzie  $t_f$  jest zadany czasem przeprowadzania pomiarów,

$$c(\xi)=m$$

gdzie  $m$ -wymiar wektora parametrów  $\beta$ , oraz

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f(x^i, t) f^T(x^i, t) dt$$

W ogólnym przypadku algorytm wyznaczania optymalnego rozmieszczenia czujników pomiarowych [4, 8, 10, 12, 13] polega na dodawaniu w  $k$ -tej iteracji nowego punktu pomiarowego zlokalizowanego w punkcie  $x_k^0 \in X$ , dla którego  $\Psi [M(x_k^0)]$  (oparte na macierzy FIM dla pojedynczego punktu pomiarowego  $x_k^0 = \arg \max_{x \in X} \phi(x, \xi_k)$ ) jest optymalne przy uwzględnieniu dotychczasowego rozmieszczenia  $\xi$ . Należy zauważyć, że wprowadzenie tego punktu zmniejszy wskaźnik jakości  $\Psi [M(\xi_{k+1})]$ .

Wprowadzenie funkcji czułości  $\phi(x, \xi)$  oraz funkcji  $c(\xi)$ , dzięki której możemy określić warunek zatrzymania iteracji, umożliwi nam stosowanie takiej procedury.

Poniżej skrótkowo został przedstawiony mechanizm algorytmu poszukiwania optymalnego rozmieszczenia czujników w ogólnym przypadku.

### 6.2. Opis algorytmu

Krok 1

Wybieramy startowe rozmieszczenie czujników  $\xi_0$ , dla którego  $\det M(\xi_0) \neq 0$  oraz dodatnią liczbę  $\eta < 1$  i ustawiamy  $k=1$ .

Krok 2

Wyznaczamy  $x_k^0 = \arg \max_{x \in X} \phi(x, \xi_k)$ .

Jeżeli  $\phi(x_k^0, \xi_k) < c(\xi_k) + \eta$ , wtedy STOP.

W dalszych obliczeniach przyjmujemy:  $\psi[M(\xi)] = -\ln \det M(\xi)$  – minimalizowana funkcja oparta na FIM.

Krok 3

Jeżeli warunek stopu w kroku 2 nie jest spełniony, wówczas dla  $0 < \lambda_k < 1$  wyznaczamy nowe rozmieszczenie czujników  $\xi_{k+1}^0 = (1 - \lambda_k) \xi_k^0 + \lambda_k x_k^0$ , gdzie  $\xi_k^0$  – rozmieszczenie czujników skoncentrowane w punkcie  $x_k^0$ .

Podstawiamy  $k=k+1$  i powracamy do kroku 2.

### 7. Przykład

Układ dynamiczny opisany jest równaniem cząstkowym typu parabolicznego (1) z zerowymi mieszanymi warunkami brzegowymi (2) oraz dodatkowymi założeniami określonymi w rozdziale 3. Obszar  $X$ , w którym określone jest równanie (1) jest prostokątem o bokach długości  $a$  oraz  $b$ .

Wykorzystując dostępne informacje o konkretnym procesie technologicznym, który jest opisany równaniem różniczkowym cząstkowym (1), można zmodyfikować postać warunku początkowego  $w_0(0, x)$  pomijając niektóre składniki sumy opisującej warunek początkowy. Powoduje to analogiczną zmianę postaci rozwiązania równania (1). Postępując w ten sposób zmniejszamy wymiar wektora parametrów  $\beta \in R^m$ . Dokładność tego przybliżenia oraz jego wpływ na sterowanie obiektem zależą od ilości składników zawartych w założonym warunku początkowym oraz odpowiednim ich doborze. Zagadnienia te zostaną zbadane i przedstawione w odrębnej publikacji.

Wymiar wektora  $f(x^i, t)$  zależy od założonej postaci warunku początkowego (ilości parametrów  $\beta \in R^m$ ). Elementy  $m$  – wymiarowego wektora  $f(x^i, t)$  z indeksami  $k$  oraz  $l$  odpowiadają wybranym indeksom rozwiązania równania (1) oraz warunku początkowego.

Obliczenia przeprowadzono dla następujących parametrów:

$$\begin{aligned} a &= \pi \\ b &= 1 \\ t_f &= 0.1 \end{aligned}$$

#### Obliczenia

W celu uproszczenia formy zapisu matematycznego model warunku początkowego można przedstawić jako zbiór wybranych indeksów  $k$  oraz  $l$  funkcji  $w_{kl}(x_1, x_2)$  wykorzystanych przy jego tworzeniu. Niech

$$(k, l) = \{(1, 1); (1, 2)\}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} w(0, x_1, x_2) &= \beta_{11} \sin(\mu_1 x_1 + \varepsilon_1) \sin(\nu_1 x_2 + \delta_1) + \beta_{12} \sin(\mu_1 x_1 + \varepsilon_1) \sin(\nu_2 x_2 + \delta_2) \\ \beta &= [\beta_{11}, \beta_{12}]^T \\ f(x^i, t) &= [f_{11}(x^i, t), f_{12}(x^i, t)]^T \quad x^i = [x_1^i, x_2^i] \end{aligned}$$

Wyznaczone zostały optymalne rozmieszczenia czujników w zależności od parametrów warunku początkowego  $A_1, A_2, B_1, B_2$

- a)  $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0,5$
- b)  $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 1$
- c)  $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 2$

Przyjmując punkt startowy w postaci:

$$\xi_0 = \left\{ \begin{matrix} (1.8, 0.4) & (1.7, 0.8) \\ 1/2 & 1/2 \end{matrix} \right\}$$

Przyjęto następujące parametry wykorzystywane w algorytmie optymalizacji:

$$\lambda_0 = 0.06, \quad \lambda_{k+1} = \lambda_k / \gamma \quad \gamma = 1.16$$

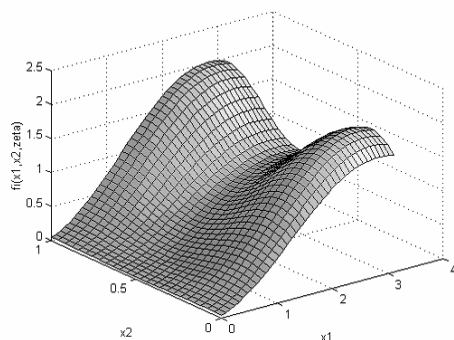
$\eta = 0.02$  oraz dodatkowy warunek zatrzymania algorytmu po  $k=60$  iteracji

Sposób wyznaczania nowego wektora wag  $p$  w  $k$ -tej iteracji polega na przemnożeniu każdego elementu wektora  $p$  przez współczynnik  $(1 - \lambda_k)$  a następnie wprowadzeniu nowego elementu tak aby suma elementów wektora wag  $p$  wynosiła jeden. Z każdą iteracją zwiększa się ilość punktów pomiarowych zawartych w  $\xi$  dlatego dokonano uśrednienia wartości  $x^i$  dla lokalizacji znajdujących się „blisko siebie” w celu zmniejszenia ilości czujników. Położenie czujników zostało uśrednione a odpowiadające im wagi  $p^i$  zsumowane [10].

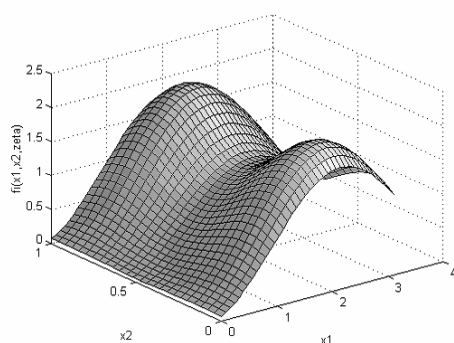
W Tab.1 przedstawiono wyniki optymalizacji

|                               | Optymalne rozmieszczenie $\xi^*$ |       | $\max_{x \in X} \phi(x, \xi_k)$ | Ilość iteracji |
|-------------------------------|----------------------------------|-------|---------------------------------|----------------|
|                               | $x^i$                            | $p$   |                                 |                |
| $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0,5$ | 2.8256 , 0.1209                  | 0.497 | 2,0135                          | 3              |
|                               | 2.8256 , 0.9889                  | 0.503 |                                 |                |
| $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 1$   | 2.1468 , 0.1130                  | 0.498 | 2.0111                          | 3              |
|                               | 2.1468 , 0.8937                  | 0.502 |                                 |                |
| $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 2$   | 1.7361 , 0.1110                  | 0.503 | 2.0240                          | 60             |
|                               | 1.7361 , 0.7510                  | 0.497 |                                 |                |

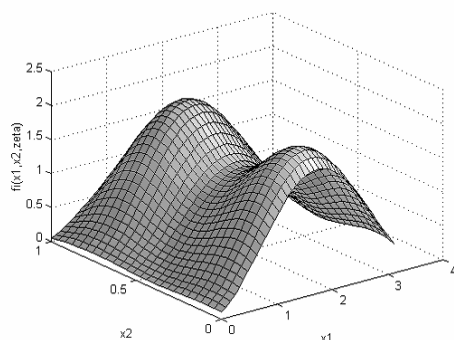
Na rysunkach 1, 2 i 3 przedstawiono funkcje czułości  $\phi(x, \xi)$  dla rozmieszczenia optymalnego  $\xi^{*i}$  w zależności od parametrów  $A_1, A_2, B_1, B_2$ . Można zauważyć, że dla rozmieszczenia optymalnego  $\xi^{*i}$  wartości lokalnych maksimum funkcji czułości  $\phi(x, \xi^{*i})$  dążą do wartości  $m=2$



Rys. 1. Funkcja  $\phi(x, \xi^*)$  dla optymalnego rozmieszczenia  $\xi^*$  dla parametrów  $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0,5$

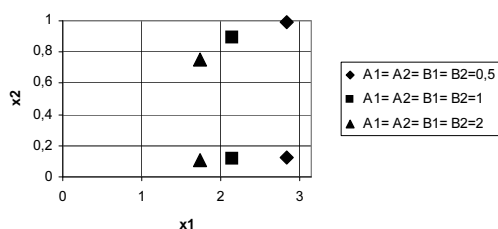


Rys. 2. Funkcja  $\phi(x, \xi^*)$  dla optymalnego rozmieszczenia  $\xi^*$  dla parametrów  $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 1$



Rys. 3. Funkcja  $\phi(x, \xi^*)$  dla optymalnego rozmieszczenia  $\xi^*$  dla parametrów  $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 2$

Na rysunku 4 przedstawiono optymalne rozmieszczenie czujników pomiarowych w zależności od parametrów  $A_1, A_2, B_1, B_2$



Rys. 4. Optymalnego rozmieszczenia czujników dla różnych wartości parametrów  $A_1, A_2, B_1, B_2$

## 8. Wnioski

W przedstawionych przykładach obliczenia numeryczne zostały dokonane za pomocą standardowych narzędzi MATLABA. Dokładność wyznaczenia optymalnego rozmieszczenia czujników zależy od dokładności wyznaczenia ekstremów funkcji celu oraz od doboru punktu startowego. (w powyższych przykładach maksymalny błąd bezwzględny wyznaczania zmiennych niezależnych  $x$  wynosił 0.0001).

Bardzo ważnym elementem wpływającym na cały przebieg optymalizacji jest właściwy dobór punktu startowego algorytmu, co jest widoczne dla przykładu  $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 2$  gdzie nie uzyskano wymaganej dokładności. W takim przypadku należy powtórzyć procedurę algorytmu przyjmując za punkt startowy otrzymany wynik optymalizacji.

Metodę można zastosować również dla bardziej skomplikowanych obszarów  $X$  o większej wymiarowości. Jedynym ograniczeniem jest znajomość funkcji  $w_{ij}(x)$  oraz wartości  $s_{ij}$  niezbędnych do wyznaczenia rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego, które jednak dla większości typowych układów są wyznaczone i stabilizowane [1].

Przybliżenie warunku początkowego powoduje jednocześnie uzyskanie przybliżonej postaci rozwiązania równania różniczkowego. Dokładność tego przybliżenia oraz jego wpływ na sterowanie obiektem zależą od ilości składowych zawartych w założonym warunku początkowym oraz odpowiedniego ich doboru. Zagadnienia te zostaną zbadane i przedstawione w odrębnej publikacji.

## 9. Literatura

- [1] Butkowskij A.G.: Charakteristiki sistem s raspriedelennymi parametrami, Nauka, Moskwa 1979
- [2] Emarkov S.M.: Mathematical Theory of Experimental Design, Nauka, Moskov 1983
- [3] Fedorov V.V.: Theory of Optimal Experiments, Academic Press, New York 1972
- [4] Fedorov V.V. and Hackl P.: Model-oriented Design of Experiments, Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, New York 1997
- [5] Mańczak K.: Technika planowania eksperymentu, WNT, Warszawa 1976
- [6] Piotrowski J.: Procedury pomiarowe i estymacja sygnałów, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1994
- [7] Rafajłowicz E.: Optimum choice of moving sensor trajectories for distributed parametr system identification, International Journal of Control 43(5): 1441-1451, 1986
- [8] Rafajłowicz E.: Algorithms of Experimental Design with Implementations in MATHEMATICA, Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1996
- [9] Sun N. Z.: Inverse Problems in Groundwater Modeling, Theory and Applications of Transport in Porous Media, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1994
- [10] Szewczyk D.: Optymalne rozmieszczenie czujników pomiarowych dla liniowego układu o parametrach rozłożonych, XV Krajowa Konferencja Automatyki, Warszawa 27-30 VI 2005
- [11] Szewczyk D.: Optymalne rozmieszczenie czujników pomiarowych dla liniowego układu o parametrach rozłożonych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Gliwice 2006
- [12] Uciński D.: Measurement optimization for parameter estimation in distributed systems, Technical University Press, Zielona Góra 1999
- [13] Walter E. and Pronzato L.: Identification of Parametric Models from Experimental Data, Communications and Control Engineering, Springer-Verlag, Berlin 1997