

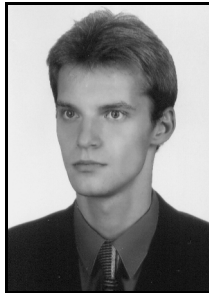
Łukasz ĆWIKLIŃSKI

UNIwersytet MIKOŁAJA KOPERNIKA, WYDZIAŁ FIZYKI, ASTRONOMII I INFORMATYKI STOSOWANEJ

Porównanie właściwości analizy sygnałów szumowych zawierających składowe tonowe przy wykorzystaniu falki Malvara oraz wybranych falek Daubechies

Mgr inż. Łukasz ĆWIKLIŃSKI

Jest absolwentem Fizyki Technicznej na Uniwersytecie im. Mikołaja Kopernika w Toruniu (studia w latach 2001–2006). Od roku 2006 jest studentem studiów doktoranckich z zakresu nauk fizycznych na UMK w Toruniu pod kierunkiem dr hab. inż. Wiesława Kicińskiego, prof. UMK. W ramach studiów zajmuje się analizą sygnałów niestacjonarnych z wykorzystaniem falki Malvara.



e-mail: lukasz.cwiklinski@fizyka.umk.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono porównanie wyników analizy wielorozdzielczej z wykorzystaniem falki Malvara oraz wybranych falek Daubechies. Analizie poddano sygnały będące sumą składowej harmonicznej i szumu białego o różnym stosunku sygnału do szumu oraz sygnał szumu podwodnego. Badano liczbę współczynników falkowych zawierających określoną część energii sygnału zmieniając takie parametry jak liczba poziomów dekompozycji, szerokość okna czasowego, nachylenie obwiedni falki.

Słowa kluczowe: falka Malvara, falki Daubechies, analiza wielorozdzielcza.

Comparison of properties of noised signals analysis with tone components using Malvar wavelet and selected Daubechies wavelets

Abstract

The paper includes comparison of properties of multiresolution analysis with use of Malvar wavelet and selected Daubechies wavelets. Analysis includes signals containing harmonical component and white noise with different signal to noise ratio and underwater noise. Number of wavelet coefficients containing given amount of signal energy were examined, with change of parameters like number of decomposition levels, time interval width, slope of wavelet envelope.

Keywords: Malvar wavelet, Daubechies wavelets, multiresolution analysis.

1. Wprowadzenie

Analiza sygnałów szumowych zawierających składowe tonowe jest istotnym zagadnieniem między innymi w badaniu szumów podwodnych. Na ogół sygnały obserwowane w środowisku pomiarowym mają charakter niestacjonarny, stąd uzasadniona jest ich analiza z wykorzystaniem transformacji falkowej. Do analizy sygnałów zawierających składowe tonowe najlepiej wykorzystać bazę składającą się z funkcji harmonicznymi, takich jak falka Malvara.

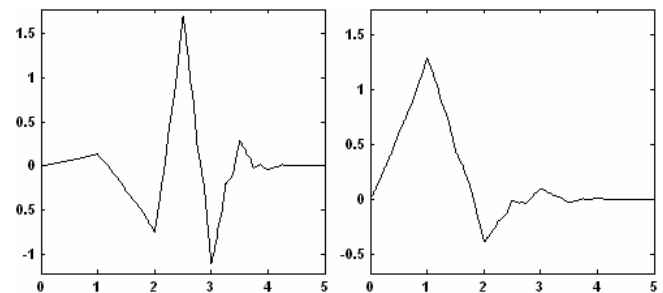
W pracy zamieszczono wyniki analizy wielorozdzielczej sygnałów szumowych zawierających składową tonową z wykorzystaniem falki Malvara oraz falek Daubechies (db3 oraz db10). Wybór falek Daubechies uzasadniony jest ich ortogonalnością, zwartym nośnikiem oraz regularnością wzrastającą z rzędem falki.

2. Właściwości analizy wielorozdzielczej

2.1. Falki Daubechies

Falki Daubechies ze względu na swoje właściwości, takie jak zwarty nośnik, liczba momentów znikających, znalazły szerokie zastosowanie m.in. w znajdowaniu nieciągłości w sygnale, przetwarzaniu obrazów. Poza falką rzędu pierwszego, czyli falką

Haara, falki Daubechies nie są opisane zależnościami analitycznymi. Im większy rząd falki, tym większa liczba współczynników ją opisujących, a tym samym dłuższy czas obliczeń.



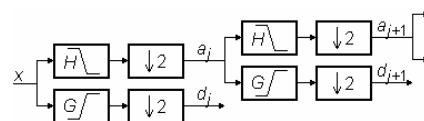
Rys. 1. Falka Daubechies (db3) oraz odpowiadająca jej funkcja skalująca
Fig. 1. Daubechies (db3) wavelet and corresponding scaling function

Współczynniki falkowe można obliczać korzystając z zależności:

$$CWT_x(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-\tau}{a} \right) dt, \quad (1)$$

gdzie: a – współczynnik skali, τ – przesunięcie, $x(t)$ – analizowany sygnał, ψ – funkcja bazowa (falka).

W realizacjach praktycznych nie wykorzystuje się falek, tylko związane z nimi filtry. Zależność między filtrami i falkami jest wzajemnie jednoznaczna [1]. Algorytm analizy wielorozdzielczej został opracowany przez Mallata (rys. 2). Jest on równoważny analizie częstotliwościowej przy $\Delta f/f_0 = \text{const}$, gdzie Δf jest szerokością pasma, natomiast f_0 częstotliwością środkową tego pasma.



Rys. 2. Schemat analizy wielorozdzielczej
Fig. 2. Diagram of multiresolution analysis

Na każdym poziomie dekompozycji wykonuje się filtrowanie dolnoprzepustowe oraz górnoprzepustowe sygnału. Filtry mają takie częstotliwości odcięcia, że pasmo dzielone jest na dwie równe części. Wynikiem filtracji górnoprzepustowej są detale d_j , natomiast filtracji dolnoprzepustowej tzw. aproksymacja sygnału a_j . W kolejnych krokach tylko aproksymacja sygnału poddawana jest dalszej filtracji. Po przejściu sygnału przez oba rodzaje filtrów liczba współczynników aproksymacji, jak również liczba współczynników szczegółów, równa jest liczbie próbek sygnału, chociaż ich pasma są dwa razy węższe. Można dokonać decymacji rzędu drugiego bez ryzyka utraty informacji przenoszonej przez sygnał.

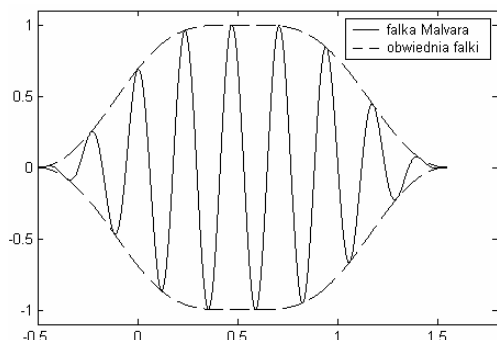
2.2. Falka Malvara

Do analizy sygnałów zawierających składowe harmoniczne najlepiej wykorzystać transformację, której bazę stanowią funkcje harmoniczne. Dobre rezultaty daje wykorzystanie analizy wielorozdzielczej z wykorzystaniem falki Malvara, w literaturze angielskiej nazywaną także Lapped Orthogonal Transform (LOT).

Falka Malvara (rys. 3) dana jest zależnością

$$\Psi_{jk} = \sqrt{\frac{2}{|I_j|}} \cos \frac{\pi}{|I_j|} \left(k + \frac{1}{2} \right) t \cdot g_{I_j}(t), \quad (2)$$

gdzie: $g_{I_j}(t)$ – obwiednia falki, $|I_j|$ – przedział czasowy, j – numer przedziału czasowego, k – numer bazy.



Rys. 3. Falka Malvara
Fig. 3. Malvar wavelet

Przekształcenie falkowe z wykorzystaniem falki Malvara charakteryzuje się takimi właściwościami jak liniowość, ortonormalność bazy, skalowanie w czasie, przesunięcie w czasie oraz upakowanie energii. Współczynniki C_{jk} rozwinięcia falkowego sygnału $x(t)$ są iloczynem skalarnym tego sygnału oraz ortonormalnej bazy falkowej

$$C_{jk} = \langle x, \Psi_{jk} \rangle. \quad (3)$$

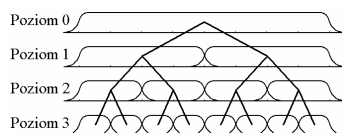
W algorytmie falki do obliczania współczynników C_{jk} wykorzystuje się dyskretne przekształcenie kosinusowe (DCT)

$$C_{jk} = DCT(x_j(n)), \quad (4)$$

gdzie

$$x_j(t) = g_{I_j}(n)x(n), \quad (5)$$

$g_{I_j}(n)$ jest obwiednią falki, a $x(n)$ ciągiem wartości chwilowych sygnału.



Rys. 4. Schemat dekompozycji sygnału w lokalnej bazie kosinusowej
Fig. 4. Diagram of signal decomposition in local cosine basis

Schemat dekompozycji sygnału z wykorzystaniem falki Malvara został przedstawiony na rys. 4. Dekompozycja sygnału polega na podziale przedziałów czasowych z poziomu poprzedniego na dwa krótsze. Aby nie doszło do utraty informacji przenoszonej przez sygnał zachowany musi być warunek

$$g_{j,p}^2(t) + g_{j+1,p}^2(t) = 1, \quad (6)$$

gdzie: $g_{j,p}$ jest j -tym oknem czasowym poziomu p . W celu zapewnienia warunku, aby wszystkie przedziały czasowe zawierały się w przedziale czasowym poddanym analizie wielorozdzielczej, dla okien leżących na brzegach obszaru przyjmuje się brak nachylenia lewej (dla $j = 0$) lub prawej krawędzi obwiedni (dla $j = 2^p - 1$).

Nachylenie obwiedni może być dobrane dowolnie, ale musi być stałe na każdym poziomie dekompozycji. Jego wybór jest kompromisem między regularnością okna a żądaną rozdzielczością czasową. Oznaczając długość odcinka czasowego, w którym nakładają się sąsiednie okna przez η , długości przedziałów na najniższym poziomie dekompozycji muszą być równe co najmniej 2η . Liczba poziomów dekompozycji oraz szerokość okna czasowego powinna zostać uzależniona od właściwości badanego sygnału. Od szerokości okna zależy szerokość pasma na najwyższym poziomie dekompozycji, a tym samym szerokości pasm dla przedziałów czasowych z poziomów niższych. Wielkości te ustala się na podstawie analizy właściwości sygnału w dziedzinie częstotliwości lub heurystycznie.

Istnieją dwa sposoby obliczania współczynników analizy wielorozdzielczej z wykorzystaniem falki Malvara. Pierwszy, wykorzystany przez autora, polega na obliczeniach numerycznych wykorzystujących zależności (4) i (5). Innym podejściem jest wykorzystanie filtrów.

3. Porównanie właściwości analizy wielorozdzielczej z wykorzystaniem wybranych falek

Analizę sygnałów przeprowadzono w programie Matlab. Wykorzystano wygenerowane wcześniej sygnały zawierające składową harmoniczną oraz szum biały, o różnym stosunku sygnału do szumu (SNR). Sygnały poddano analizie wielorozdzielczej z wykorzystaniem falki Malvara, falki db3 oraz db10. Porównano liczbę współczynników falkowych zawierających określoną część energii sygnału ze względu na parametry analizy wielorozdzielczej, takie jak liczba poziomów dekompozycji, szerokość okna czasowego, a także nachylenie obwiedni w przypadku falki Malvara.

Otrzymane wyniki porównano z wynikami analizy falkowej szumu podwodnego, zawierającego składowe harmoniczne pochodzące od odległych obiektów pływających i infrastruktury lądowej.

4. Otrzymane wyniki

Liczba współczynników falkowych zawierających określoną część energii sygnału została przedstawiona w tab. 1.

Tab. 1. Liczba współczynników analizy wielorozdzielczej z wykorzystaniem falki Malvara, db3 oraz db10, zawierających określoną część E energii sygnałów, składających się ze składowej harmonicznnej oraz szumu białego o różnym stosunku SNR

Tab. 1. Number of multiresolution analysis coefficients with use of Malvar, db3 and db10 wavelets, containing part E of signals energy with different SNR (signals consist of harmonic component and white noise)

SNR [dB]	E [%]	Liczba współczynników falkowych zawierających energię E							
		Falka Malvara – poziomy dekompozycji						db3	db10
		0	1	2	3	4			
20	90	5	4	3	2	2	182	86	
	70	3	3	2	2	2	113	60	
10	90	391	204	103	53	29	592	258	
	70	3	3	2	2	2	113	60	
5	90	1104	566	280	141	71	1211	974	
	50	3	2	2	2	2	95	44	
0	90	1538	783	387	194	97	1592	1448	
	25	2	2	2	2	2	62	21	

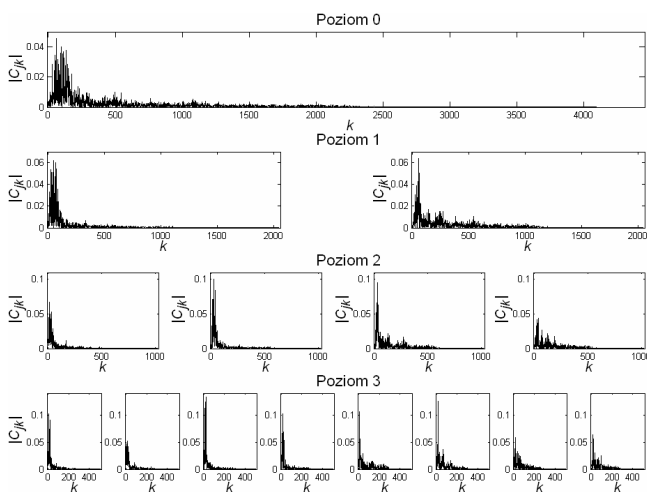
Analizując otrzymane wyniki trzeba pamiętać o różnicy między analizą wielorozdzielczą dla falki Malvara oraz falki Daubechies. Przy wykorzystaniu falki Malvara należy porównywać liczby współczynników zawierających określoną energię sygnału dla każdego przedziału na każdym poziomie dekompozycji niezależnie. Każdy poziom analizy odpowiada jednej szerokości okna czasowego, natomiast współczynniki zawierają składowe sygnału z pasma określonego przez to okno. Dla falki Daubechies energia

sygnału z danego przedziału czasowego zawarta jest we współczynnikach szczegółów ze wszystkich poziomów dekompozycji oraz współczynnikach aproksymacji na najwyższym poziomie. Współczynniki z kolejnych poziomów dekompozycji przy wykorzystaniu falki Daubechies odpowiadają iloczynowi skalarnemu sygnału i falki przy określonym współczynniku skali a oraz przesunięciu τ .

Dla analizy wielorozdzielczej z wykorzystaniem falek Daubechies liczba współczynników zawierających określoną część energii sygnału, przy takim samym SNR, jest znacznie większa niż w przypadku użycia falki Malvara. Poza przypadkami, gdy poszukiwana jest liczba współczynników zawierających 90% energii sygnału o SNR = 10dB, 5dB oraz 0dB, większość współczynników pochodzi z dwóch do trzech poziomów szczegółów w przypadku wykorzystania falki db3, a z jednego poziomu szczegółów dla falki db10. Wzrost rzędu falki Daubechies powoduje zmniejszenie liczby współczynników zawierających odpowiednią część energii sygnału, natomiast im mniej poziomów dekompozycji, tym ich liczba jest większa, ponieważ energia zawarta we współczynnikach aproksymacji jest większa. Należy tak dobrać liczbę poziomów dekompozycji, aby poszukiwane składowe sygnały zawierały się tylko we współczynnikach szczegółów. Szerokość analizowanego pasma zależy od szerokości okna czasowego, natomiast rozdzielczość od częstotliwości próbkowania.

W przypadku wykorzystania falki Malvara nachylenie obwiedni nie wpływa znacząco na otrzymane wyniki. Jak wcześniej wspomniano, im większe nachylenie tym mniejszy przeciek, jednak należy pamiętać o nakładaniu się tylko sąsiednich przedziałów, w związku z czym nachylenie obwiedni musi być kompromisem między gładkością profilu a liczbą poziomów dekompozycji. Szerokość okna czasowego wpływa na szerokość analizowanego pasma, a częstotliwość próbkowania na rozdzielczość otrzymanego widma.

Analizie wielorozdzielczej z użyciem falki Malvara poddano również sygnał szumu podwodnego o liczbie próbek równej 4096 (rys. 5). Liczba współczynników falkowych zawierających określoną część energii sygnału maleje wraz ze wzrostem poziomu dekompozycji. Niższe poziomy dekompozycji pozwalają na lokalizację czasową niestacjonarności. W wybranych przedziałach czasowych poziomu trzeciego nawet 70% energii sygnału zawiera się w 6-7 współczynnikach, a dla niektórych przedziałów poziomu czwartego taka ilość energii mieści się w 2-4 współczynnikach. Przy takiej liczbie próbek wystarczyłyby 3-4 poziomy dekompozycji.



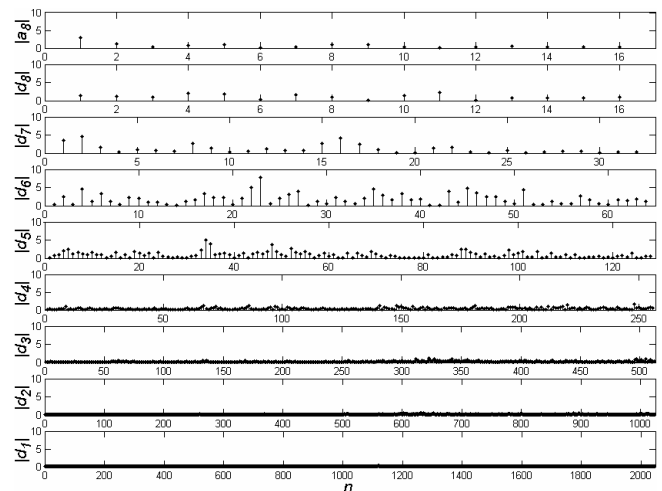
Rys. 5. Współczynniki analizy wielorozdzielczej sygnału szumu podwodnego z wykorzystaniem falki Malvara na kolejnych poziomach dekompozycji

Fig. 5. LOT coefficients of underwater noise on following decomposition levels

Otrzymane współczynniki falkowe zachowują właściwości statystyczne badanego sygnału, co wynika z liniowości przekształcenia. Jeśli sygnał nie zawiera składowych harmonicznych, a szum ma charakter gaussowski, energia współczynników jest jednakowa w całym paśmie. W przypadku pojawienia się składowych harmo-

nicznych, energia współczynników odpowiadających tym składowym rośnie.

Analiza szumu podwodnego z zastosowaniem falki db3 daje gorsze rezultaty (rys. 6). Przy ośmiu poziomach dekompozycji 70% energii sygnału zawiera się w około 59 współczynnikach. Większość tych współczynników należy do szczegółów z poziomów 5 i 6, pozostałe do szczegółów z poziomów 7 i 8 oraz aproksymacji sygnału na poziomie 8 (rys. 6). Wzrost rzędu falki oraz zwiększenie liczby poziomów dekompozycji właściwie nie wpływa na zmianę liczby współczynników zawierających 70% energii sygnału.



Rys. 6. Współczynniki analizy wielorozdzielczej sygnału szumu podwodnego z wykorzystaniem falki db3 na kolejnych poziomach dekompozycji

Fig. 6. Multiresolution analysis coefficients of underwater noise with use of db3 wavelet on following decomposition levels

5. Podsumowanie

W pracy przedstawiono porównanie wyników analizy wielorozdzielczej sygnałów szumowych zawierających składową harmoniczną z wykorzystaniem falki Malvara oraz wybranych falek Daubechies. Zamieszczone rozważania pozwalają na przyjęcie stwierdzenia, że do detekcji składowych harmonicznych zdecydowanie lepiej nadaje się przekształcenie z wykorzystaniem falki Malvara, niż przekształcenie z wykorzystaniem falki Daubechies. Kształt falek Daubechies nie jest optymalny do analizy tego typu sygnałów. Pokazano, że liczba współczynników zawierająca określoną część energii sygnału zależy od stosunku SNR oraz od liczby poziomów dekompozycji. Szerokość okna czasowego ma wpływ na szerokość analizowanego pasma. W przypadku falki Malvara zmiana nachylenia obwiedni ma niewielki wpływ na otrzymane wyniki.

Analizę sygnałów szumowych zawierających składowe tonowe przeprowadza się m.in. badając szumy podwodne celem detekcji składowych harmonicznych pochodzących od infrastruktury lądowej oraz odległych obiektów pływających.

6. Literatura

- [1] Zieliński T.P., Cyfrowe przetwarzanie sygnałów, WKŁ, Warszawa 2005.
- [2] Ravier P., Amblard P.O., Using Malvar Wavelet for transient detection, Proceedings of the IEEE-SP International Symposium on 18-21 June 1996, Pages: 229 – 232.
- [3] Mallat S., A wavelet tour of signal processing, Academic Press 1999.
- [4] Kiciński W., Problemy pomiarów szumów podwodnych, Prace PIE, 2000, nr 140.
- [5] Kiciński W., Dyskretne przekształcenie kosinusowe – nowe narzędzie w przetwarzaniu sygnałów pomiarowych. Materiały konferencyjne Kongresu Metrologii 2007 r., praca w druku.