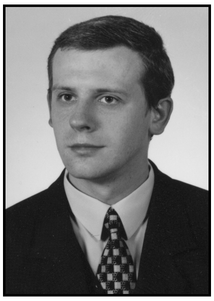
Daniel DUSZA
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA, INSTYTUT MASZYN, NAPĘDÓW I POMIARÓW ELEKTRYCZNYCH

Model matematyczny filtru synchronicznego

Dr inż. Daniel DUSZA

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Wrocławskiej, asystent w Instytucie Maszyn, Napędów i Pomiarów Elektrycznych na Wydziale Elektrycznym Politechniki Wrocławskiej. Główne zainteresowania dotyczą systemów pomiarowych, a w szczególności do sprawdzania przekładników i przetworników, filtracji przetwarzanych sygnałów oraz cyfrowego przetwarzania sygnałów.



e-mail: daniel.dusza@pwr.wroc.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono model matematyczny nadążnego filtru synchronicznego, tłumiącego w sygnałach wyższe harmoniczne, sterowanego za pomocą powielonych przebiegów otrzymanych z sygnału wejściowego przesuniętego o odpowiedni kąt. W pracy zaprezentowano również wyniki symulacyjne oraz wyniki badań modelu filtru synchronicznego tłumiącego 2. i 3. harmoniczną.

Słowa kluczowe: tłumienie harmonicznych, strukturalne przesunięcie fazowe.

Mathematical model of synchronous filter

Abstract

The paper presents mathematical model of follow-up synchronous filter, which attenuate higher harmonics in signals using the same signals, but shifted by appropriate angle. The paper presents also the results relating to the mathematical (fig. 3) and physical models (fig. 4, 5, 6).

Keywords: higher harmonics attenuation, filters structural phase shift.

1. Wprowadzenie

Filtry synchroniczne należą do klasy filtrów grzebieniowych, realizowanych zarówno w technice analogowej jak i cyfrowej. Analogowe filtry synchroniczne od lat są stosowane głównie w technice pomiarów nieelektrycznych w celu wyeliminowania harmonicznych parzystych. Filtry synchroniczne skutecznie redukują współczynnik szumów i umożliwiają niemal dowolne zawężenie szerokości pasma, co jest trudne do uzyskania w standardowych filtrach *RC* lub *LC*, ze względu na ograniczoną dobroć elementów. Tłumienie wyższych harmonicznych w sygnałach pomiarowych przy wykorzystaniu filtrów synchronicznych odbywa się za pomocą tych samych sygnałów ale przesuniętych o odpowiedni kąt [1].

Filtry synchroniczne charakteryzują się stałym przesunięciem fazowym niezależnym od częstotliwości sygnału wejściowego. Przesunięcie to zmienia się natomiast wraz ze zmianą konfiguracji filtru, która zależy od harmonicznej tłumionej przez filtr. Na przykład przy tłumieniu 2. harmonicznej i jej wielokrotności przesunięcie fazowe, nazwane strukturalnym przesunięciem fazowym filtru, wynosi 0, natomiast dla innych struktur filtru tłumiących wyższe harmoniczne przesunięcie to przyjmuje wartości różne od zera.

Rozwiązanie układowe oraz właściwości nadążnego filtru synchronicznego, składającego się z dwóch kaskad tłumiących odpowiednio harmoniczne parzyste i nieparzyste, będące wielokrotnością trzeciej harmonicznej składowej podstawowej sygnału filtrowanego zmieniającego się w przedziale od 16 2/3Hz do 2kHz przedstawiono w pracach [2, 4].

2. Model matematyczny filtru synchronicznego

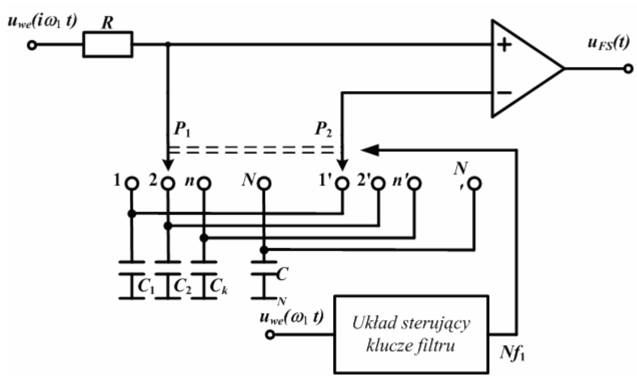
Napięcie wejściowe podawane na zmodyfikowany filtr synchroniczny [3], którego ogólny schemat przedstawiono na rys. 1, ma postać

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(i\omega t + \psi_i), \qquad i = 1,2,3\ldots, \tag{1}$$

gdzie:

A_i - amplituda i-tej harmonicznej,

ψ_i - przesunięcie fazowe i-tej harmonicznej.



Rys. 1. Zmodyfikowany filtr synchroniczny [2, 4]
Fig. 1. Modified synchronous filter

Przełączniki P_1 i P_2 są ze sobą sprzężone i przełączane cyklicznie. Kondensatory *C* są przez rezystor *R* kolejno łączone ze źródłem napięcia określonego wzorem (1).

Każda próbka napięcia jest pobierana w czasie $t = \frac{T}{N}$, gdzie *T* jest okresem sygnału wejściowego, a *N* jest liczbą przedziałów na które dzielony jest sygnał wejściowy.

Dla tak uzyskanej próbki równanie określające napięcie na kolejnym kondensatorze filtru definiuje wzór

$$u(t) = RC\frac{du_C}{dt} + u_C. \tag{2}$$

Ogólnie, na podstawie splotu napięcie na kondensatorze opisuje zależność

$$u_C(t) = u_C(0)e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC}\int_0^t u(\tau)e^{-\frac{t-\tau}{RC}}d\tau, \tag{3}$$

przy czym stan początkowy określa relacja

$$u_C(0) = u_C(0)e^{-\frac{T}{NRC}} + \frac{1}{RC}e^{-\frac{T}{NRC}}\int_{\frac{T}{N}(k-1)}^{\frac{T}{N}k} u(\tau)e^{\frac{\tau}{RC}}d\tau, \quad k = 1,2,3\ldots N., \tag{4}$$

Ostatecznie w stanie ustalonym, przy odpowiednio dobranej dużej stałej czasowej, napięcia na kondensatorze na początku i końcu okresu są sobie równe i wynoszą

$$u_C(0)=\frac{1}{RC\left(1-e^{-\frac{T}{NRC}}\right)}e^{-\frac{T}{NRC}}\int_{\frac{T}{N}(k-1)}^{\frac{T}{N}k}u(\tau)e^{\frac{\tau}{RC}}d\tau. \qquad (5)$$

Całka występująca w równaniu (5), przy zmianie granic całkowania ma postać

$$I=\int_0^{\frac{T}{N}}u(t+(k-1)\frac{T}{N})e^{-\frac{t}{RC}}dt, \qquad (6)$$

a przy wymuszeniu sygnałem opisanym równaniem

$$u(t)=A_1\sin(\omega t+\psi_1), \qquad (7)$$

jest wyrażona relacją

$$I=-\frac{A_1RC}{(\omega RC)^2+1}\left\{\begin{aligned}&\sin\left(\frac{2\pi k}{N}+\psi_1\right)e^{-\frac{T}{NRC}}-\sin\left(\frac{2\pi(k-1)}{N}+\psi_1\right)+\\&\omega RC\left[\cos\left(\frac{2\pi k}{N}+\psi_1\right)e^{-\frac{T}{NRC}}-\cos\left(\frac{2\pi(k-1)}{N}+\psi_1\right)\right]\end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Ostatecznie napięcie na kondensatorze opisane równaniem (3) dla wymuszenia określonego równaniem (1) wynosi

$$u_{Ck}(t)=\frac{A_ie^{-\frac{Ti}{NRC}}}{\left(1-e^{-\frac{Ti}{NRC}}\right)\left[(i\omega RC)^2+1\right]}\left\{\begin{aligned}&\sin\left(\frac{2\pi ik}{N}+\psi_i\right)e^{-\frac{Ti}{NRC}}-\sin\left(\frac{2\pi i(k-1)}{N}+\psi_i\right)+\\&i\omega RC\left[\cos\left(\frac{2\pi ik}{N}+\psi_i\right)e^{-\frac{Ti}{NRC}}-\cos\left(\frac{2\pi i(k-1)}{N}+\psi_i\right)\right]\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Gdy stała czasowa

$$RC\to\infty, \qquad (10)$$

to równanie (3), określające napięcie na kondensatorze C_k, ma postać

$$u_{Ck}(t)=\frac{N}{T}\int_0^{\frac{T}{N}}u(t)dt. \qquad (11)$$

Zależność ta przy wymuszeniu opisanym wzorem (1) jest równa

$$u_{Ck}(t)=A_i\frac{\sin\left(\frac{\pi i}{N}\right)}{\frac{\pi i}{N}}\sin\left[\frac{2(k-1)\pi i}{N}+\psi_i\right],\qquad i=1,2,3\ldots. \qquad (12)$$

Różnicę napięć występujących na dwóch kondensatorach u^*_{Ck}, z których jedno jest podane na wejście odwracające, a drugie na wejście nieodwracające wzmacniacza różnicowego, określa wyrażenie

$$u^*_{Ck}=u_{Ck}-u_{C(k-q)}, \qquad (13)$$

gdzie q jest przesunięciem kluczowania i jest określone wzorem

$$q=\frac{N}{\lambda}, \qquad (14)$$

a λ jest harmoniczną tłumioną przez filtr.

Przy spełnionym założeniu (10), różnicę napięć podawaną na węzeł sumacyjny można zapisać w postaci [3]

$$u^*_{Ck}(t)=\sum_{i=1}^{n}\left\{2A_i\frac{\sin\left(\frac{\pi i}{N}\right)}{\frac{\pi i}{N}}\sin\frac{\pi i}{\lambda}\cos\left[\frac{(2k-1-q)\pi i}{N}+\psi_i\right]\right\}. \qquad (15)$$

Czynnik $\sin\frac{\pi i}{\lambda}$ występujący w wyrażeniu (15) odnosi się do tłumionej harmonicznej λ i jej wielokrotności dla danej kaskady filtru synchronicznego.

Wartość napięcia wyjściowego filtru

$$u_{FS}(t)=\sum_{k=1}^{N}u^*_{Ck}(t)\cdot e\left(t-(k-1)\frac{T}{N}\right), \qquad (16)$$

gdzie

$$e(t)=\begin{cases}1, & mT\le t<\left(m+\frac{1}{N}\right)T \quad, \ m=1,2,3\ldots,\\ 0, & \text{dla innych przypadków}\end{cases} \qquad (17)$$

będzie dążyła do zera dla częstotliwości $f_{we}=k\lambda f_1$, czyli filtr będzie tłumił sygnały wejściowe będące wielokrotnością częstotliwości λf_1 [3].

Z przedstawionych powyżej rozważań wynika, że dla λ=2 wartość napięcia u^*_{Ck} wyrażonego wzorem (15) wynosi

$$u^*_{Ck}=\begin{cases}0 & i=2l\\ 2u_{Ck} & i=2l-1\end{cases}\qquad l=1,2,3\ldots, \qquad (18)$$

natomiast dla λ=3

$$u^*_{Ck}=\begin{cases}0 & i=3l\\ \sqrt{3}u_{Ck} & i=3l-1\end{cases}\qquad l=1,2,3\ldots. \qquad (19)$$

Z relacji (18) i (19) wynika, że przy tłumieniu parzystych harmonicznych amplituda sygnału wyjściowego będzie dwa razy większa od amplitudy sygnału wejściowego, a przy tłumieniu 3. harmonicznej i jej wielokrotności amplituda sygnału wyjściowego będzie $\sqrt{3}$ razy większa.

Wyrażenie (12) umożliwia przeprowadzenie analizy wpływu konfiguracji filtru na strukturalne przesunięcie fazowe wprowadzane przez filtr.

Dla sygnału wejściowego

$$u(t)=A_1\sin\omega t, \qquad (20)$$

napięcie ma wartości zerowe w chwilach $\omega t=k\pi$, względnie

$$k_1=n\frac{N}{2},\quad n=1,2,3\ldots. \qquad (21)$$

Napięcie określone wyrażeniem (15), dla $\psi_i=0$, „przechodzi" przez zero, gdy

$$\cos\frac{(2k_n-1-q)\pi}{N}=0, \qquad (22)$$

ostatecznie przyjmuje postać

$$k_n=\frac{N}{4}+\frac{q+1}{2}. \qquad (23)$$

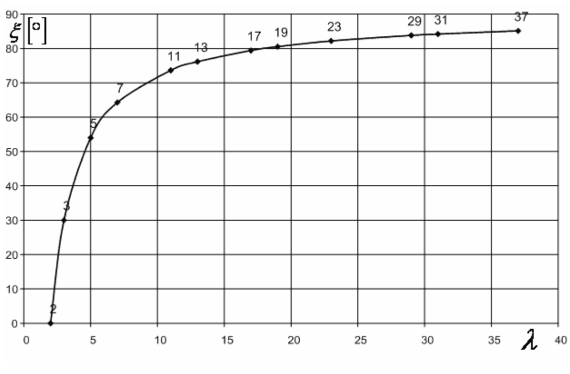
Z faktu, iż w czasie jednego okresu pobieranych jest N próbek oraz z zależności (15) wynika, że wyrażenie (23), przy $N \to \infty$, wyrażone w radianach, ma postać

$$k_n^{'} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\lambda}. \tag{24}$$

W celu określenia strukturalnego przesunięcia fazowego należy od wartości uzyskanej z wyrażenia (21) odjąć wartość uzyskaną z zależności (24)

$$\xi = k_1^{'} - k_n^{'} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\lambda}. \tag{25}$$

Na rys. 2 przedstawiono wykres odwzorowujący przesunięcie harmonicznych w paśmie do 40. harmonicznej przy tłumieniu harmonicznych będących liczbami pierwszymi.



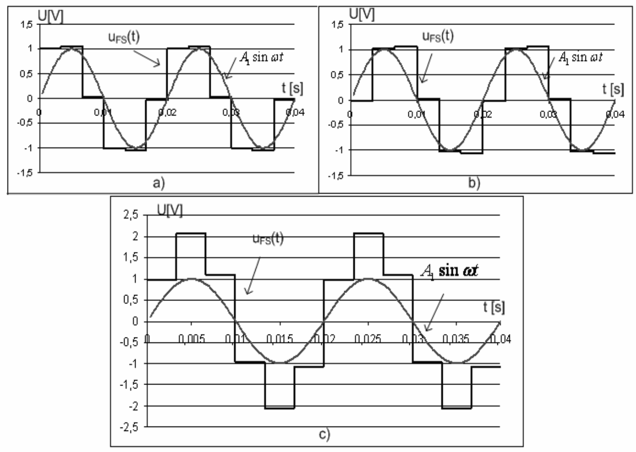
Rys. 2. Wykres odwzorowujący strukturalne przesunięcie fazowe filtru synchronicznego w zależności od tłumionej harmonicznej
Fig. 2. Diagram of synchronous filter structural phase shifting in dependence on harmonic attenuation

Z wykresu wynika, że filtr tłumiący harmoniczne parzyste nie wprowadza przesunięcia fazowego, natomiast gdy tłumi trzecią harmoniczną i jej krotności to przesunięcie fazowe filtru wynosi $\xi = 30^{o}$, przesunięcie fazowe przy tłumieniu piątej harmonicznej wynosi $\xi = 54^{o}$ itd. Gdy filtr jest tak zaprojektowany, że tłumi harmoniczne o dużych wartościach to przesunięcie, nazwane strukturalnym przesunięciem fazowym, dąży do wartości $\xi = 90^{o}$.

3. Wyniki z modelu matematycznego i z modelu fizycznego

Przy tłumieniu 3. harmonicznej i jej wielokrotności przez filtr synchroniczny, zgodnie z wykresem przedstawionym na rys. 2, strukturalne przesunięcie fazowe omawianego filtru wynosi $\pi/6$. W celu uzyskania przesunięcia fazowego równego zeru podjęto próbę opracowania takiej struktury filtru, która przesunęłaby 3. harmoniczną o wartość $-\pi/6$. Wykorzystując możliwość kaskadowego łączenia filtrów synchronicznych zbudowano model fizyczny filtru w układzie kaskadowym tłumiącego parzyste harmoniczne oraz 3. harmoniczną i jej wielokrotności o zerowym przesunięciu fazowym.

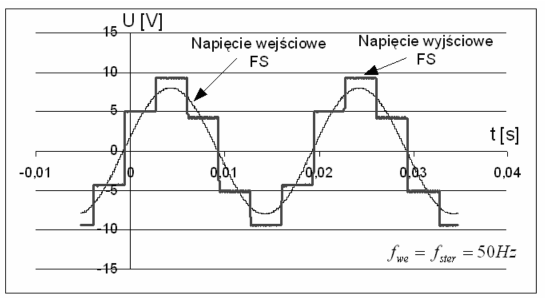
Rysunek 3 przedstawia przebiegi napięć wejściowego i wyjściowego opracowanego modelu matematycznego filtru opisanego wzorem (10) dla $RC \to \infty$ i N=6: rys. 3a dla klasycznej struktury filtru tłumiącego 3. harmoniczną, rys. 3b dla struktury odpowiedzialnej za korekcję fazową, a rys. 3c wypadkowy sygnał na wyjściu filtru synchronicznego tłumiącego 3. harmoniczną i nie wprowadzającego przesunięcia fazowego (rys. 3c).



Rys. 3. Przebiegi sygnałów na wyjściu filtru synchronicznego, a) klasycznego tłumiącego 3. harmoniczną, $\xi = +\frac{\pi}{6}$, b) opracowanego przez autora, wprowadzającego korekcję fazową, $\xi = -\frac{\pi}{6}$, c) sygnał wyjściowy filtru dla połączenia kaskadowego
Fig. 3. Output signal courses of synchronous filter a) classical, attenuation 3[rd] harmonic, $\xi = +\frac{\pi}{6}$, b) designed by author with phase correction, $\xi = -\frac{\pi}{6}$, c) filter output signal for cascade connection

Otrzymane przebiegi wskazują, że sygnały wyjściowe są przesunięte odpowiednioo $\xi = +\frac{\pi}{6}$ i $\xi = -\frac{\pi}{6}$. Przesunięcia te pozwalają wysnuć wniosek, że kaskadowe połączenie filtrów, wprowadzającego przyspieszenie fazy i opóźnienie fazy, pozwoli uzyskać filtr o przesunięciu fazy równym zeru

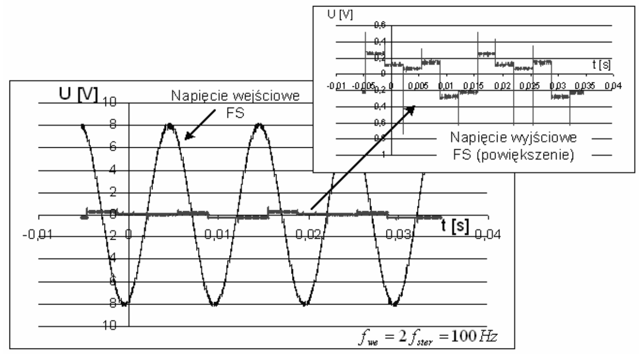
Na rys. 4 przedstawiono oscylogram sygnału wyjściowego zbudowanego modelu filtru synchronicznego tłumiącego parzyste harmoniczne oraz 3. harmoniczną i jej wielokrotności przy pobudzeniu składową podstawową. Uzyskany wynik wskazuje, że opracowany i zbudowany filtr tłumi wybrane harmoniczne bez wprowadzania przesunięcia fazowego.



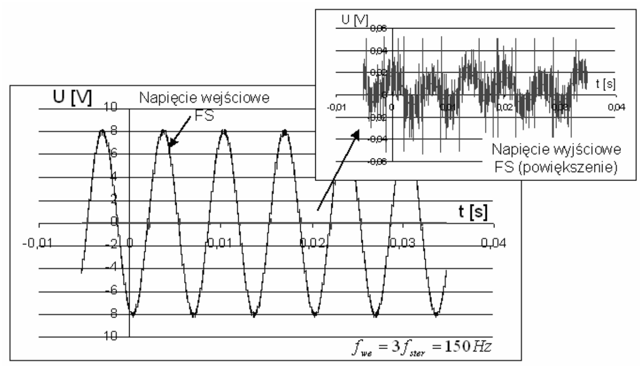
Rys. 4. Odpowiedź filtru na pobudzenie 1. harmoniczną
Fig. 4. Filter response on 1[st] harmonic stimulation

Oscylogramy pokazane na rys. 5 wskazują na silne tłumienie drugiej harmonicznej przez filtr synchroniczny. Przedstawione powiększenie sygnału wyjściowego obrazuje kształt i wartość sygnału tłumionego. Z porównania amplitud sygnałów wynika, że tłumienie 2. harmonicznej wynosi 28,5 dB.

Rys. 6 przedstawia stopień tłumienia trzeciej harmonicznej przez filtr. Pokazane powiększenie sygnału stłumionego wskazuje, że 3. harmoniczna jest tłumiona bardzo silnie i amplituda sygnału wyjściowego jest o rząd mniejsza niż w przypadku tłumienia drugiej harmonicznej. Tłumienie 3. harmonicznej jest na poziomie 52,0 dB.



Rys. 5. Oscylogramy przebiegu napięcia wyjściowego filtru tłumiącego 2. harmoniczną
Fig. 5. Oscillograms of filter output voltage attenuating 2nd harmonic



Rys. 6. Oscylogramy przebiegu napięcia wyjściowego filtru tłumiącego 3. harmoniczną
Fig. 6. Oscillograms of filter output voltage attenuating 3nd harmonic

4. Podsumowanie

Nadążny filtr synchroniczny należy do klasy filtrów grzebieniowych. Właściwości tłumiące filtru synchronicznego nadążają za zmianami częstotliwości sterującej filtr, która jest krotnością częstotliwości sygnału wejściowego. Model matematyczny wyjaśnia szczegółowo zasadę działania filtru oraz umożliwia projektowanie filtrów synchronicznych tłumiących dowolne harmoniczne bez wprowadzania przesunięcia fazowego.

Zaletą filtru synchronicznego jest jego właściwość, że przesunięcie fazowe filtru, nazwane strukturalnym, nie zmienia się wraz z częstotliwością sygnału wejściowego. Strukturalne przesunięcie fazowe ma stałą wartość uwarunkowaną strukturą filtru, która zależy od rzędu tłumionej harmonicznej. Jest to ważna właściwość filtru. W artykule wykazano, na podstawie opracowanego modelu matematycznego i zbudowanego modelu fizycznego, możliwość wyeliminowania strukturalnego przesunięcia fazowego przez dołączenie dodatkowej kaskady filtru wprowadzającej korekcję fazową [5].

5. Literatura

[1] Dusza Daniel.: Analiza właściwości metrologicznych systemu analogowego do sprawdzania przekładników i przetworników w paśmie częstotliwości od 16 2/3 Hz do 2 kHz., Rozprawa doktorska, 2006
[2] Dusza Daniel.: Nadążny filtr synchroniczny w paśmie częstotliwości akustycznych. Referat z XXXVIII Międzynarodowej Konferencji Metrologów MKM 2006. Warszawa, 4-6 września 2006W: PAK 2006 nr 9, bis wyd. spec.
[3] Komachi Y., Tanaka S., Lock-in amplifier using a sampled-data synchronous filter, Journal of Physics E.: Scientific Instruments 1975 Vol. 8, 967-971.
[4] Nawrocki Z., Dusza D., Nadążny filtr synchroniczny w paśmie częstotliwości akustycznych, Prace Naukowe Instytutu Maszyn, Napędów i Pomiarów Elektrycznych, Zeszyt 56, Seria: Studia i Materiały, Wrocław 2004.
[5] Nawrocki Zdzisław, Dusza Daniel: Nadążny filtr synchroniczny oraz sposób tłumienia trzeciej harmonicznej i jej wielokrotności. Zgłosz. pat. nr P 372406 z 24.01.2005

Artykuł recenzowany