

Stefan KUBISA

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA, INSTYTUT AUTOMATYKI PRZEMYSŁOWEJ, ZAKŁAD METROLOGII

## Intuicja i symulacja Monte Carlo podstawą analizy niedokładności pomiaru

Prof. dr hab. inż. Stefan KUBISA

Absolwent Wydziału Elektrycznego PS. Od ukończenia studiów w 1963 r. nauczyciel akademicki na tym Wydziale, od 2001 r. na stanowisku profesora zwyczajnego. Od 1990 r. członek Komitetu Metrologii i Aparatury Naukowej PAN. Zainteresowania naukowe: algorytmy przetwarzania w pomiarach mocy i energii elektrycznej, imitacji i wybranych wielkości mechanicznych, zaawansowane metody analizy niedokładności pomiaru.



e-mail: kubisa@ps.pl

### Streszczenie

Intuicja metrologa stanowi podstawę do formułowania założeń niezbędnych w obliczeniach przedziału ufności wyniku pomiaru. Intuicja opiera się o wiedzę i doświadczenie, którego nabywa się wraz z praktyką. Zdobycie doświadczenia można przyspieszyć wykonując pomiary wirtualne. Do tego celu predystynowana jest symulacja Monte Carlo. Jest ona narzędziem skutecznym nawet w przypadkach silnej nieliniowości równania pomiaru. Pozwala efektywnie badać wpływ sposobu sformułowania założeń na wynik obliczeń przedziału ufności.

**Słowa kluczowe:** założenia do obliczeń przedziału ufności, symulacja Monte Carlo.

### Intuition and Monte Carlo simulation – a basis for measurement inaccuracy analysis

#### Abstract

Metrologist's intuition provides a basis for formulation of assumptions that are necessary to calculate the confidence interval. The intuition is based on knowledge and experience, which is acquired by practice. Gaining experience may be expedited by making virtual measurements. A Monte Carlo simulation is well suited for this purpose. It is an effective tool for confidence interval calculation, even in the case of a strong non-linear measurement equation, and it enables testing effectively how different assumptions affect the result of calculations.

**Keywords:** assumptions for confidence interval calculation, Monte Carlo simulation.

## 1. Wstęp

Obliczenia niepewności pomiaru, lub ogólniej – przedziału ufności<sup>1</sup>, oparte są o arbitralne założenia formułowane na podstawie intuicji metrologa. Intuicja rodzi się z wiedzy i doświadczenia, których zdobywanie przez praktykę realnych, fizycznie realizowanych pomiarów, jest procesem długotrwałym. Można go przyspieszyć sięgając do pomiarów wirtualnych. Dla dowolnie złożonych procedur pomiarowych, modelowanych nieliniowymi równaniami [1], obliczenia przedziału ufności można wykonać za pomocą symulacji Monte Carlo (MC) [2]. Czas trwania symulacji, przy liczności próby rzędu  $10^6$ , zapewniającej wystarczającą dokładność, jest porównywalny z czasem obliczeń wykonywanych za pomocą specjalistycznego oprogramowania, np. [3], a opartych o splatanie rozkładów prawdopodobieństwa. Uniwersalny charakter symulacji MC i szybkość obliczeń pozwalają badać skutki różnych sformułowań wspomnianych arbitralnych założeń. Symulacja jest dobrym narzędziem do ćwiczeń intuicji metrologa.

Podstawowym pojęciem przy probabilistycznym podejściu [4] do analizy niedokładności pomiaru jest prawdopodobieństwo.

Pojęcie to nie jest tak oczywiste, jak się na ogół wydaje. Warto zainteresować się nim głębiej.

## 2. Prawdopodobieństwo

Pojęcie prawdopodobieństwa objaśnia przedstawiony niżej tekst, ograniczony znakami ► oraz ◀, który jest skrótem (ze zmianami redakcyjnymi, nie naruszającymi istoty rzeczy) artykułu R. Bartoszyńskiego [5].

►Prawdopodobieństwo<sup>2</sup> to liczbowe wyrażenie możliwości zajścia określonego zdarzenia. Stosowane określenie prawdopodobieństwa opiera się na trzech postulatach:

- 1) dla dowolnego zdarzenia losowego  $A$  (czyli podzbioru zbioru zdarzeń elementarnych<sup>3</sup>) prawdopodobieństwo  $P\{A\}$  tego zdarzenia jest liczbą zawartą między 0 a 1;
- 2) prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego, tj. takiego, które zawsze zachodzi (prawdopodobieństwo całego zbioru zdarzeń elementarnych), równe jest jedności;
- 3) jeżeli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$  wyłączają się wzajemnie, to prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na zajściu któregośkolwiek z tych zdarzeń jest równe sumie prawdopodobieństw:  $P\{A_1 \vee A_2 \vee \dots\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + \dots$

Te trzy postulaty, zaproponowane przez A. N. Kołmogorowa w 1933 r., wystarczają do udowodnienia wszystkich znanych twierdzeń teorii prawdopodobieństwa, nie dają jednak odpowiedzi na pytanie: jak w konkretnych przypadkach przyporządkować prawdopodobieństwo  $P\{A\}$  zdarzeniu  $A$ ? Dla celów praktycznych przyporządkowanie musi spełniać dodatkowy warunek, trudny do precyzyjnego sformułowania i związany z następującą intuicją: wyobraźmy sobie doświadczenie<sup>4</sup>, w wyniku którego zachodzi bądź zdarzenie  $A$ , bądź zdarzenie przeciwne nie- $A$ ; jeżeli w identycznych warunkach<sup>5</sup> przeprowadzi się serię  $k$  niezależnych powtórzeń doświadczenia i w rezultacie zaobserwuje się  $r$  razy zajście zdarzenia  $A$ , a pozostałe  $k - r$  razy zajście zdarzenia nie- $A$ , to ułamek<sup>6</sup>  $r/k$  powinien być bliski  $P\{A\}$  – tym bliższy, im większa jest liczba powtórzeń  $k$ . Przy nieograniczonym powtarzaniu doświadczenia częstość występowania danego zdarzenia powinna zbliżać się do prawdopodobieństwa. Trudność stanowi precyzyjne sformułowanie sensu zastrzeżenia: „w identycznych warunkach mogących mieć wpływ na zajście zdarzenia  $A$ ”.

„Klasycznie” prawdopodobieństwo określa reguła P. S. Laplace’a (XVIII w.): niech wynikiem doświadczenia jest zawsze dokładnie jedna spośród  $k$  wyłączających się możliwości, a szanse wystąpienia każdej z nich są takie same oraz, że  $r$  spośród tych  $k$  możliwości pociąga za sobą zajście zdarzenia  $A$ , a pozostałe  $k - r$  możliwości – zajście zdarzenia przeciwnego nie- $A$ . Wówczas prawdopodobieństwo  $P\{A\}$  ma wartość  $r/k$ . Trudność stanowi sprecyzowanie warunku „jednakowe szanse dla każdej możliwości”.

W sporze o istotę prawdopodobieństwa zasadniczy jest problem: czy prawdopodobieństwo jest obiektywną cechą zdarzenia, czy też jest związane z naszym opisem tego zdarzenia, czy też brakiem wiedzy o jego mechanizmie. ◀

Przykładem trudności obiektywnej oceny prawdopodobieństwa jest tzw. paradoks Bertranda [7, 8]. Dotyczy on następującej konstrukcji geometrycznej: Na płaszczyźnie leży okrąg i przecinająca się z nim prosta. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że okrąg

<sup>2</sup> Historia analiz tego pojęcia sięga XVII w. (B. Pascal, P. Fermat i Ch. Huygens).

<sup>3</sup> Zbiór zdarzeń elementarnych nazywa się też zbiorem pełnym zdarzeń lub populacją generalną [6].

<sup>4</sup> Mowa jest tutaj o doświadczeniu w znaczeniu eksperymentu, którego wynikiem jest zdarzenie.

<sup>5</sup> Te same warunki powtarzania doświadczenia nazywają się warunkami powtarzalności.

<sup>6</sup> Ułamek  $m/n$  nazywa się częstością występowania zdarzenia.

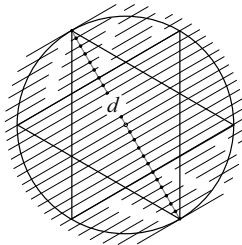
<sup>1</sup> Rozważania ograniczono w tej pracy do statycznych pomiarów laboratoryjnych, wykonywanych w warunkach powtarzalności.

odcina na prostej cięciwę o długości większej niż długość boku trójkąta równobocznego, wpisanego w okrąg? Ze zbioru wszystkich prostych przecinających się z okręgiem, czyli zbioru pełnego o liczności  $k$ , należy wyodrębnić podzbiór o liczności  $r$  prostych, z których okrąg odcina cięciwę o długości większej niż długość boku trójkąta równobocznego i które nazwiemy *prostymi sprzyjającymi*. Prawdopodobieństwem  $P$  będzie granica ułamka  $r/k$  gdy  $k$  rośnie nieograniczenie:

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r}{k} \quad (1)$$

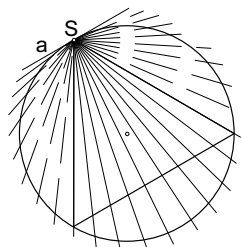
Analizujemy dwa przypadki:

1) Niech proste, przecinające się z okręgiem, tworzą wiązkę linii równoległych, rozmieszczonych w jednakowych odstępach, jak na rys. 1, na którym *proste sprzyjające* narysowano liniami ciągłymi, a pozostałe – liniami przerywanymi. Niech odstęp między prostymi maleją nieograniczenie. Zauważamy, że kierunek przebiegu prostych, tworzących wiązkę, może być dowolny i wnioskujemy, że określiliśmy zbiór pełny prostych przecinających się z okręgiem i zawierający się w nim zbiór *prostych sprzyjających*. Posiłkując się rys. 1 oceniamy szukane prawdopodobieństwo na  $P = 1/2$ .



Rys. 1. Paradoks Bertranda. Przypadek 1)  
Fig. 1. Bertrand's paradox. Case 1)

2) Niech proste, przecinające się z okręgiem, tworzą pęk linii przechodzących przez punkt  $S$  na okręgu i rozłożonych w formie wachlarza w jednakowych odstępach kątowych, jak na rys. 2, na którym *proste sprzyjające*, jak na rys. 1, narysowano liniami ciągłymi, a pozostałe – liniami przerywanymi. Niech odstęp kątowy maleją nieograniczenie. Zauważamy, że punkt  $S$  jest dowolnym punktem na okręgu. Znowu zdefiniowaliśmy zbiór pełny prostych przecinających się z okręgiem i zawierający się w nim zbiór *prostych sprzyjających*. Posiłkując się rys. 2 oceniamy szukane prawdopodobieństwo na  $P = 1/3$ .



Rys. 2. Paradoks Bertranda. Przypadek 2)  
Fig. 2. Bertrand's paradox. Case 2)

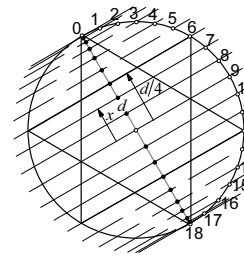
Paradoks jest pozorny – w każdym z rozpatrywanych przypadków inaczej zdefiniowano zbiór pełny zdarzeń: w przypadku 1) – jako zbiór prostych równoległych rozmieszczonych jednostajnie ze względu na odległości mierzone na średnicy  $d$  (rys. 1), a w przypadku 2) – jako zbiór prostych przechodzących przez punkt  $S$ , rozmieszczonych jednostajnie ze względu na kąty między prostymi.

Kolejną sytuację przedstawia rys. 3. Tu na półokręgu rozmieszczono jednostajnie 19 punktów  $S$ , ponumerowanych od 0 do 18. Przez punkt 0 poprowadzono styczną do okręgu, a przez pozostałe punkty – proste równoległe do niej. Rozkład punktów przecięcia

tych prostych z prostą  $d$  nie jest rozkładem jednostajnym, jak na rys. 1. Funkcja opisująca ten rozkład wynika z analizy zależności geometrycznych, przedstawionych na rys. 4.

Wyobraźmy sobie, że punkt  $S$  przemieszcza się w kierunku ruchu wskazówek zegara po półokręgu  $ABZ$  od położenia  $A$  do od położenia  $B$  zakreślając kąt  $\beta$ . Spośród pęku prostych przechodzących przez punkt  $S$  (rys. 2) w położeniu  $A$  wybieramy styczną  $a$ , a w położeniu  $B$  – prostą  $b$ , równoległą do  $a$  i równocześnie tworzącą kąt  $\beta$  ze styczną do okręgu w punkcie  $B$ . Gdy kąt  $\beta$  rośnie jednostajnie, punkt  $B$  przemieszcza się jednostajnie po okręgu, a prosta  $b$  przybiera wszystkie możliwe położenia kątowe  $\beta$  względem stycznej w punkcie  $B$ , czyli zbiór prostych  $b$  usytuowany jest względem stycznej w punkcie  $B$  tak, jak pęk prostych na rys. 2 względem stycznej  $a$  w punkcie  $S$ . Z rys. 4 wynika, że współrzędna  $x$  punktu przecięcia prostej  $b$  ze średnicą  $d$  wyraża się wzorem:

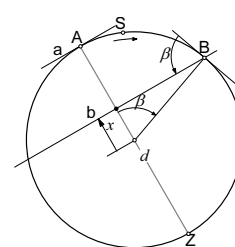
$$x = \frac{d}{2} \cdot \cos \beta = \frac{d}{2} \cdot \sin \left( \beta + \frac{\pi}{2} \right) \quad (2)$$



Rys. 3. Proste równoległe przecinające się z okręgiem w punktach rozmieszczonych jednostajnie na półokręgu  
Fig. 3. Mutually parallel lines, which are crossing a circle at points spaced uniformly on a semicircle

Gdy kąt  $\beta$  ma rozkład jednostajny, współrzędna  $x$  ma rozkład wartości funkcji sinus, czyli rozkład typu  $U$  o funkcji  $G(x)$  różniczkowej gęstości prawdopodobieństwa:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi \cdot d \cdot \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{x^2}{d^2}}} & \text{dla } x \in [-d/2, d/2] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-d/2, d/2] \end{cases} \quad (3)$$



Rys. 4. Szkic do obliczeń prawdopodobieństwa w przypadku wg rys. 3  
Fig. 4. Sketch for probability calculation for the case shown in Fig. 3

Kojarząc to spostrzeżenie z rys. 3 stwierdzamy, iż prawdopodobieństwo tego, że długość cięciwy jest większa od długości boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg, równe jest wartości całki:

$$P = \int_{-d/4}^{d/4} G(x) \cdot dx = \frac{1}{3} \quad (4)$$

co potwierdza wartość oceny prawdopodobieństwa, otrzymaną na podstawie oglądu rys. 2.

W tych rozważaniach wykorzystano pojęcie „jednakowe szanse dla każdej możliwości”. Jest ono równoważne pojęciu rozkładu jednostajnego. I tak w przypadku 1) (rys. 1), rozkład jednostajny przypisano położeniu punktu przecięcia rozważanych prostych równoległych z prostopadłą do nich średnicą okręgu, a w przypadku 2) (rys. 2), ten sam rozkład przypisano położeniu kątowemu prostych przecinających się w punkcie S, położonym na okręgu. Sytuacja pokazana na rys. 2 okazała się równoważna sytuacji przedstawionej na rys. 3, na którym z kolei rozkład jednostajny na półokręgu przypisano punktom przecięcia prostych równoległych z tym półokręgiem. Posiłkując się rys. 4 wykazano też, że to ostatnie przypisanie prowadzi do rozkładu typu U punktów przecięcia na średnicy.

Oceny prawdopodobieństwa mogą być poprawne tylko w ramach arbitralnych założeń, zastosowanych przy definiowaniu prawdopodobieństwa dla danej sytuacji. U źródła założeń leży często pojęcie rozkładu jednostajnego (które w następstwie dalszych analiz może prowadzić do innych rozkładów. Założenie o rozkładzie jednostajnym podpira się zaleceniem, znanym też z *Przewodnika* [9] i sformułowanym w [5] następująco: ► jeżeli nie znane są żadne przyczyny, które mogłyby powodować, że jedna z możliwości ma większe szanse wystąpienia niż inne, powinno się wszystkim możliwościom przypisać jednakowe prawdopodobieństwa. Jest faktem empirycznie stwierdzonym, że dla szerokiej klasy zjawisk powyższy sposób przypisywania prawdopodobieństwa zdarzeniom dostarcza „dobrych” wartości prawdopodobieństwa – obserwowane częstości<sup>7</sup> są istotnie bliskie tym prawdopodobieństwom. ◀

W odniesieniu do pomiaru prawdopodobieństwo  $P$  dotyczy prawdziwości orzeczenia o tym, że błąd pomiaru (9), (10) mieści się w przedziale niepewności pomiaru:

$$P \stackrel{\text{def}}{=} P\{\Delta q \in (-U, U)\} \quad (5)$$

lub ogólniej – o tym, że wartość mierzona mieści się w przedziale ufności.

### 3. Zmienne losowe pomiaru. Równanie pomiaru

Dla ogólności dalej rozważa się tzw. pomiary pośrednie, w których wartość  $q$  mierzonej wielkości (czyli wartość tzw. wielkości wyjściowej pomiaru) wyznacza się z wartości  $x, y, z, \dots$  tzw. wielkości wejściowych<sup>8</sup> na podstawie znanej skądinąd zależności funkcyjnej:

$$q = f(x, y, z, \dots) \quad (6)$$

Zależność ta stanowi tzw. równanie pomiaru.

Pomiar pośredni może być jednoczesny gdy wartości  $x, y, z, \dots$  są wskazaniem (z uwzględnieniem ewentualnych poprawek) przyrządów pomiarowych, tworzących jeden układ pomiarowy, lub niejednoczesny gdy wartości  $x, y, z, \dots$  są wartościami zmierzonymi w osobnych układach pomiarowych. Pomiar bezpośredni można natomiast traktować jako przypadek szczególny pomiaru pośredniego jednoczesnego, gdy  $q = x$ .

Przy probabilistycznym podejściu do analizy dokładności wartości  $x, y, z, \dots$  oraz  $q$  traktuje się jako zmienne losowe. Zmiennymi losowymi są też błędy:

$$\Delta x \stackrel{\text{def}}{=} x - x_r, \quad \Delta y \stackrel{\text{def}}{=} y - y_r, \quad \Delta z \stackrel{\text{def}}{=} z - z_r, \quad \dots \quad (7)$$

przy czym  $x_r, y_r, z_r, \dots$  są hipotetycznymi wartościami prawdziwymi odpowiednich wielkości wejściowych. Z definicji (7) wynikają zależności:

$$x = x_r + \Delta x, \quad y = y_r + \Delta y, \quad z = z_r + \Delta z, \quad \dots \quad (8)$$

z których wnioskuje się, że rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych  $x, y, z, \dots$  różnią się od rozkładów zmiennych  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$  tylko wartościami oczekiwanymi, a zatem nie stanowi zasadniczej różnicy to, czy w analizie dokładności jako zmienne losowe pomiaru traktuje się zmienne  $x, y, z, \dots$  (podejście *Przewodnika* [9]), czy też zmienne  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$  (tradycyjne podejście polskie).

Z równania (6) wynika następujące ogólne wyrażenie, określające błąd pomiaru:

$$\Delta q = q \stackrel{\text{def}}{=} q - q_r = f(x, y, z, \dots) - f(x_r, y_r, z_r, \dots) = f(x_r + \Delta x, y_r + \Delta y, z_r + \Delta z, \dots) - f(x_r, y_r, z_r, \dots) \quad (9)$$

Wyrażenie to można wykorzystać w sytuacji liniowego lub dowolnie nieliniowego równania pomiaru (6), w szczególności do obliczeń metodą symulacji MC – jedyną metodą, która nie ogranicza stopnia nieliniowości równania pomiaru (6). Hipotetyczne wartości prawdziwe  $x_r, y_r, z_r, \dots$  w obliczeniach zastępuje się ich estymatami  $x_e, y_e, z_e, \dots$ . Przy niewielkiej nieliniowości równania pomiaru (6), wyrażenie (9) sprowadza się do znanej postaci przybliżonej:

$$\Delta q \approx \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x_e, y_e, z_e, \dots} \cdot \Delta x + \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_{x_e, y_e, z_e, \dots} \cdot \Delta y + \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{x_e, y_e, z_e, \dots} \cdot \Delta z + \dots \quad (10)$$

Wzory (9) i (10) wyrażają prawo propagacji błędów i są równaniami pomiaru w kategoriach błędów. Wzór (10), jeśli może być stosowany, ma tę przewagę nad ogólniejszym wzorem (9), że nie stwarza niebezpieczeństwa złego uwarunkowania numerycznego obliczeń.

W dalszych wywodach, zgodnie ze wspomnianym podejściem polskim, zmiennymi pomiaru będzie się nazywać błędy  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$  oraz  $\Delta q$ .

### 4. Problem statystycznej niezależności błędów. Kategorie błędów

Niepewność rozszerzoną pomiaru [9], lub granice przedziału ufności [2], wyznacza się z rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej wyjściowej  $\Delta q$ . Rozkład ten powiązany jest z rozkładami zmiennych wejściowych  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$  poprzez równanie pomiaru – ogólnie (9) lub, przy spełnieniu określonych warunków – (10). Prostota obliczeń wymaga, by błędy  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$  były statystycznie niezależne.

Z punktu widzenia analizy statystycznej niezależności błędów oraz stopnia arbitralności oceny typów ich rozkładów dogodnie jest rozróżnić dwie kategorie błędów odpowiadających kategoriom tzw. niepewności standardowych, zdefiniowanych w [9]:

- błędy wywołane efektami losowymi – błędy przypadkowe, nazywane dalej błędami typu A i oznaczane jako  $\Delta_{Ax}, \Delta_{Ay}, \Delta_{Az}, \dots$ . Estymatorami odchyłeń standardowych tych błędów są niepewności standardowe typu A,
- błędy wywołane efektami systematycznymi [10], traktowane jednak jako zmienne losowe (randomizowane) w populacji generalnej pomiarów wykonywanych w ten sam sposób za pomocą aparatury tego samego rodzaju i typu, nazywane dalej błędami typu B i oznaczane jako  $\Delta_{Bx}, \Delta_{By}, \Delta_{Bz}, \dots$ . Odchylenia standardowe tych błędów, dla ujednolicenia terminologii, nazywane są niepewnościami standardowymi typu B.

Błędów przypadkowych  $\Delta_{Ax}, \Delta_{Ay}, \Delta_{Az}, \dots$  nie można traktować jako niezależnych zmiennych losowych, ale też nie ma potrzeby

<sup>7</sup> Częstości zwane są też prawdopodobieństwami empirycznymi.

<sup>8</sup> Formalnie biorąc należałoby odróżniać pojęcia zmiennych  $X, Y, Z, \dots$  oraz  $Q$  od pojęć wartości tych zmiennych  $x, y, z, \dots$  oraz  $q$ . Dla uproszczenia tekstu świadomie rezygnuje się z tego.

oddzielnego oceniania ich rozkładów. Propagacja tych błędów wg (9) lub (10) tworzy błąd przypadkowy  $\Delta_A q$ , którego rozkład można ocenić a posteriori, metodami statystycznymi, po wykonaniu pomiaru złożonego z  $n > 1$  niezależnych obserwacji wartości  $q_i = f(x_i, y_i, z_i, \dots)$ . Przy tym wartości  $x_i, y_i, z_i, \dots$  ( $i = 1, \dots, n$ ) powinny być wyznaczone w tej samej chwili  $t_i$ . Wymóg niezależności obserwacji może oznaczać celowość badania stopnia skorelowania obserwacji i wyznaczania efektywnej liczby obserwacji, mniejszej od  $n$  [11]. Próby określania typu rozkładu błędu, np. na podstawie histogramu, mogą mieć sens tylko przy dużej liczbie  $n$ , np. rzędu co najmniej  $10^2$ . To natomiast stoi w sprzeczności z wymaganiami, by kolejne obserwacje wykonywać w warunkach powtarzalności. Przy niewielkiej liczbie  $n$  nie pozostaje nic innego, jak założyć normalny rozkład błędu  $\Delta_A q$ , estymować odchylenie standardowe  $\sigma_A$  za pomocą odchylenia empirycznego  $s$  (11) i postępować dalej zgodnie z utartą procedurą [9]. Skutki takiego postępowania przedstawiono częściowo w [12]. Szerzej omawia je rozdz. 6. Rozkład błędu  $\Delta_A q$ , a przynajmniej estymata  $s$  (11) jego odchylenia standardowego, określane jest zatem a posteriori.

Błędy  $\Delta_{Bx}, \Delta_{By}, \Delta_{Bz}, \dots$  są błędami aparaturowymi, błędami pomiaru itp. Przy umiejętnym doborze zbioru zmiennych wejściowych  $x, y, z, \dots$  [9] mogą to być błędy statystycznie niezależne o rozkładach prawdopodobieństwa określonych a priori (przed pomiarem) na podstawie wiedzy i doświadczenia mierzącego [9]. Błędowi tym przypisuje się często arbitralnie rozkład jednostajny lub trapezowy. W niektórych sytuacjach może być uzasadnione przypisanie innego rozkładu [12].

Problem niezależności zmiennych wejściowych nie istnieje natomiast w pomiarach pośrednich niejednoczesnych, które prowadzą się do obliczeń wg funkcji (6) na podstawie wyników niezależnych pomiarów wartości  $x, y, z, \dots$ . Rozkłady prawdopodobieństwa błędów  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$  określone są przez wykonawców pomiarów wartości  $x, y, z, \dots$ . Dla wykonawcy pomiaru pośredniego niejednoczesnego są to zatem błędy typu B o rozkładach znanych a priori.

## 5. Założenie o normalnym rozkładzie błędów przypadkowych obserwacji

Przy niewielkiej liczbie  $n$  obserwacji trzeba przyjąć hipotezę o normalnym rozkładzie błędów przypadkowych obserwacji i nieznaną odchylenie standardowe  $\sigma_A$  wartości średniej z obserwacji przybliżać odchyleniem empirycznym  $s$ , czyli, wg [9], niepewnością standardową  $u_A$  typu A:

$$u_A = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (q_{av} - q_i)^2}{n \cdot (n-1)}} \quad (11)$$

przy czym  $q_{av}$  jest średnią arytmetyczną z  $n$  zaobserwowanych wartości  $q_i$ , a  $n-1 = \nu$  – liczbą stopni swobody.

Rozważmy sytuację, gdy błąd  $\Delta_A q$  wartości średniej z obserwacji  $q_{av}$  jest jedynym (lub zdecydowanie dominującym) błędem pomiaru. Niepewność rozszerzoną  $U$  dla poziomu ufności  $p$  oblicza się wtedy jako iloczyn  $u_A$  przez współczynnik rozszerzenia  $k_S(p, \nu)$ , określony według rozkładu Studenta dla danego poziomu ufności  $p$  i liczby  $\nu$ :

$$U = k_S(p, \nu) \cdot u_A \quad (12)$$

Wartości  $u_A = s$  (11) mają znaczny losowy rozrzut, mimo, że obserwacje  $q_i$  pochodzą z tej samej populacji generalnej obserwacji o rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym<sup>9</sup>  $\sigma_{obs}$ . Zdarzają się przypadki, gdy losowe wartości  $q_i$  są bliskie sobie, co daje małe wartości  $s \ll \sigma_A$  i przypadki, gdy wartości te są mocno

rozrzucone i wtedy  $s \gg \sigma_A$ . To zjawisko szczególnie ostro występuje przy małej liczbie stopni swobody  $\nu = n-1$ . Wartości niepewności rozszerzonej  $U$  (12) są więc też mocno rozrzucone przy powtarzaniu pomiaru złożonego z  $n$  obserwacji mimo, że warunki powtarzalności są spełnione. Stąd fałszywe wnioskowanie, że wartość niepewności rozszerzonej warto obliczać tylko z *grubsza*. Tymczasem, pomimo znacznego rozrzutu wartości  $U$ , prawdopodobieństwo<sup>10</sup>  $P(5)$  tego, że błąd wartości średniej  $\Delta_A q$  mieści się w przedziale niepewności rozszerzonej jest równe poziomowi ufności:

$$P\{\Delta_A q \in (-U, U)\} = p \quad (13)$$

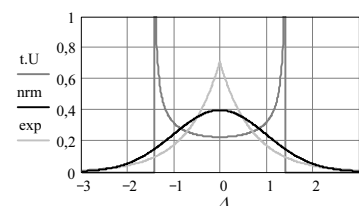
co łatwo sprawdzić za pomocą symulacji MC. Poprawność obliczeń wg (12) wynika stąd, że rozkład Studenta, zwany też statystyką Studenta, jest rozkładem zmiennej losowej  $t$ :

$$t \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_A q / s \quad (14)$$

## 6. Skutki innego niż normalny rozkładu błędu przypadkowego obserwacji

Błąd przypadkowy może mieć rozkład inny niż normalny [12], ale nie można tego stwierdzić na podstawie małej liczby  $n$  obserwacji. Za pomocą symulacji MC można natomiast badać rozkład (statystykę) zmiennej zdefiniowanej wzorem (14) dla dowolnego rozkładu błędu przypadkowego. Symbol  $t$  zwyczajowo przyjęty dla zmiennej Studenta, tj. dla rozkładu ułamka  $\Delta_A q/s$  gdy błąd przypadkowy ma rozkład normalny, niech ma zastosowanie także dla innych rozkładów błędu przypadkowego obserwacji.

Interesująca może być statystyka zmiennej  $t$  dla obserwacji o rozkładzie typu U (rys. 5), który może pochodzić od zakłóceń od sieci energetycznej albo, jak w przykładzie przytoczonym w [9] – od cyklicznych zmian temperatury przy dwustawnej termostatacji układu pomiarowego. Tę statystykę – wynik symulacji MC – dla liczby stopni swobody  $\nu = 1$  pokazano na rys. 6 1a) i 1b) w zestawieniu ze statystyką Studenta. Na wykresie 1b) zastosowano podziałkę logarymiczną na osi rzędnych dla uwypuklenia różnic między statystykami w obszarze tzw. *ogonów*.



Rys. 5. Rozkłady o jednostkowym odchyleniu standardowym: t.U – typu U, nrm – normalny, exp – Laplace'a

Fig. 5. Distributions with unitary standard deviation: t.U – U-type, nrm – normal, exp – Laplace's one

Symulację wykonano też dla rozkładu dwustronnie wykładniczego (Laplace'a) [13], który różni się (rys. 5) od rozkładu normalnego inaczej, niż rozkład typu U.

Za pomocą symulacji MC można wyznaczyć współczynniki rozszerzenia dla sytuacji dominującego błędu przypadkowego o różnych rozkładach prawdopodobieństwa. W tab. 1 zestawiono wartości współczynników dla rozkładu typu U i rozkładu Laplace'a, dla dwóch poziomów ufności: 95% i 99%. W celach porównawczych podano współczynniki dla normalnego rozkładu błędu przypadkowego, czyli dla rozkładu Studenta zmiennej  $t$  (14).

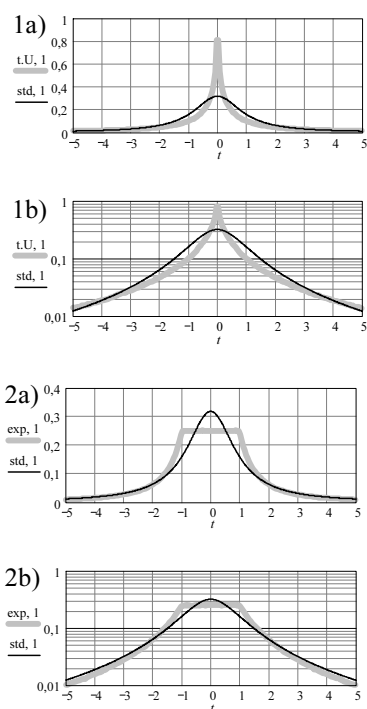
<sup>9</sup> Rozróżnia się odchylenie standardowe  $\sigma_{obs}$  obserwacji  $q_i$  od  $n^{0.5}$ -krotnie mniejszego odchylenia standardowego  $\sigma_A$  wartości średniej  $q_{av}$ .

<sup>10</sup> Mowa jest tu o prawdopodobieństwie w populacji generalnej pomiarów złożonych z  $n$  obserwacji i wykonywanych w powtarzalnych warunkach, wywołujących dominujący błąd przypadkowy o rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym obserwacji  $\sigma_{obs}$ .

Dane z kolumn 4 i 5 tab. 1 pozwalają oszacować dokładność oceny współczynnika rozszerzenia, wykonanej za pomocą symulacji MC. Przy zastosowanej tu liczności próby  $10^6/n$  jako pewne można przyjąć dwie cyfry znaczące. Dalsza analiza danych z tab. 1 pozwala sformułować następujące wnioski:

- 1) Rozkład Laplace'a błędu przypadkowego obserwacji daje mniejsze, a rozkład typu U – większe wartości współczynnika rozszerzenia, niż rozkład normalny.
- 2) Różnice między wartościami współczynników rozszerzenia maleją ze wzrostem liczby stopni swobody.

Wniosek 2) ilustruje „działanie” centralnego twierdzenia granicznego rachunku prawdopodobieństwa: Rozkład prawdopodobieństwa wartości średniej z obserwacji dąży do rozkładu normalnego gdy liczba obserwacji dąży do nieskończoności, niezależnie od rozkładu prawdopodobieństwa poszczególnych obserwacji. Statystyki wg rys. 6 dążą więc do rozkładu normalnego gdy  $\nu \rightarrow \infty$ .



Rys. 6. Statystyki zmiennej losowej  $t_{wg}$  (14) dla  $\nu = 1$ : linie czarne – statystyka Studenta, linie szare – symulacje MC dla rozkładów obserwacji: 1a), 1b) – typu U, 2a), 2b) – Laplace’a  
 Fig. 6. Statistics of random variable  $t$  by formula (14) for  $\nu = 1$ : black curves – Student’s statistics, grey curves – MC simulations for different observation distributions: 1a), 1b) – U-type, 2a), 2b) – Laplace’s one

Tab. 1. Współczynniki rozszerzenia dla trzech rozkładów błędu przypadkowego  
 Tab. 1. Coverage factors for three distributions of the random error

1.	2.	3.				6.
		Rozkład błędu przypadkowego				
		typu U	normalny wg		Laplace’a	
symulacji MC	rozkładu Studenta					
95%	1	37,3	12,7	12,71	10,1	
	4	3,44	2,77	2,776	2,49	
	16	2,14	2,12	2,120	2,06	
99%	1	266	64,0	63,66	50,2	
	4	8,0	4,63	4,604	3,81	
	16	3,05	2,93	2,921	2,78	

Rozkład błędu  $\Delta q$  pomiaru, gdy ma on oba składniki:  $\Delta Aq$  i  $\Delta Bq$ , wyznacza się [12] jako spłot rozkładu Studenta o  $\nu$  stopniach swobody, reprezentującego rozkład błędu  $\Delta Aq$  o nieznanym odchyleniu standardowym  $\sigma_A$ , estymowanym przez odchylenie

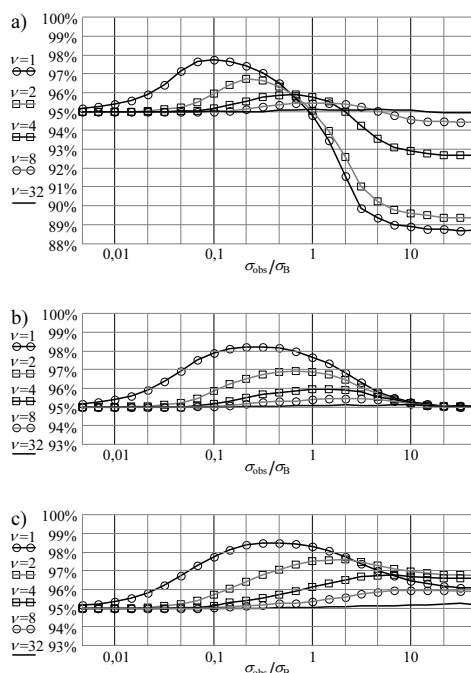
empiryczne  $s$  (11), z rozkładem błędu  $\Delta Bq$  o odchyleniu standardowym  $\sigma_B$  w populacji generalnej. Na podstawie tego spłotu oblicza się niepewność rozszerzoną  $U$  na założonym poziomie ufności. Jeżeli, za pomocą symulacji MC, zbadać prawdopodobieństwo  $P$  (5) tego, że błąd  $\Delta q$  leży w przedziale niepewności rozszerzonej  $U$ , to okazuje się [12, 14], że prawdopodobieństwo to jest na ogół większe od założonego poziomu ufności  $p$ :

$$P\{\Delta q \in (-U, U)\} \geq p \tag{15}$$

mimo, że obserwacje pochodzą z populacji generalnej o rozkładzie normalnym z niezmiennym odchyleniem standardowym<sup>11</sup>  $\sigma_{obs}$ .

Wykres przedstawiony na rys. 7 b) oraz wykresy pokazane w [12, 14] ilustrują nierówność (15), której spełnienie można uznać za wystarczające dla pozytywnej oceny poprawności obliczenia niepewności rozszerzonej  $U$ .

Gdy obserwacje pochodzą z populacji o odchyleniu standardowym  $\sigma_{obs}$  o rozkładzie innym, niż normalny, obraz ulega zmianie. I tak wykres na rys. 7 a) dotyczy sytuacji, gdy obserwacje pochodzą z populacji o rozkładzie typu U, a wykres na rys. 7 c) – gdy pochodzą one z populacji o rozkładzie obustronnie wykładniczym.



Rys. 7. Prawdopodobieństwo  $P$  (5) jako funkcja stosunku  $\sigma_{obs}/\sigma_B$  i liczby  $\nu$  stopni swobody. Poziom ufności  $p = 95\%$ . Rozkład obserwacji: a) – typu U, b) – normalny, c) – Laplace’a

Fig. 7. Probability  $P$  (5) as a function of ratio  $\sigma_{obs}/\sigma_B$  and degree of freedom  $\nu$ . Confidence level  $p = 95\%$ . Observations distribution: a) – U-type, b) – normal, c) – Laplace’s one

Rysunek 7 przedstawia wyniki symulacji MC przy liczności próby  $10^6$  oraz przy założeniu, że błąd  $\Delta Bq$  pochodzi z populacji o rozkładzie jednostajnym. Bliższe rzeczywistości byłoby założenie, że błąd ten ma rozkład normalny. Badań dla takiej sytuacji jeszcze nie zakończono, ale wstępnie sugerują one, że wyniki będą różnić się wyników przedstawionych na rys. 7 tylko ilościowo.

Na podstawie wyników symulacji MC, przedstawionych na rys. 6 i rys. 7, można sformułować następujący wniosek: Wiedza o tym, czy obserwacje mają rozkład normalny, czy innego rodzaju, może mieć istotne znaczenie wtedy, gdy liczba obserwacji jest niewielka oraz odchylenie standardowe  $\sigma_{obs}$  obserwacji jest kilkakrotnie większe od odchylenia standardowego  $\sigma_B$  błędu typu B.

<sup>11</sup> Równość prawdopodobieństwa  $P$  i poziomu ufności  $p$  zachodzi w populacji generalnej pomiarów charakteryzujących się jednakowym stosunkiem  $s/\sigma_B$  [12].

Nie ma żadnych teoretycznych podstaw do ustalenia, co dokładnie oznaczają określenia *niewielka* i *kilkakrotnie*. Nie ma też takich podstaw dla zalecenia, by zakładać poziom ufności 95%. Te wartości liczbowe wybiera się arbitralnie, a na to, jakie to są liczby, niebagatelny wpływ ma posługiwanie się akurat dziesiętnym, a nie innym systemem pozycyjnym zapisu liczb (dlatego 0,95 uważamy za liczbę „rozsądnie bliską” liczbie 1), oraz to, że niektóre z liczb, np. 3 i 7, uważamy za „magiczne”. Sięgając do magii i przyglądając się wykresom na rys. 7 a), przyjmijmy więc, że założenie o normalnym rozkładzie obserwacji jest w pełni akceptowalne gdy spełniony jest warunek:

$$n \geq 7 \quad (16)$$

## 7. Podsumowanie

Wyniki symulacji Monte Carlo, przedstawione na rys. 7, potwierdzają dość powszechną, opartą o wieloletnie doświadczenie, intuicję metrologów zalecającą, by na pomiar laboratoryjny składały się obserwacje w liczbie  $n$  rzędu 10 (np. 7 ... 15) jako liczbie stanowiącej kompromis między postulatem zachowania tzw. warunków powtarzalności, nakazującym ograniczanie liczby  $n$  obserwacji, a postulatem dobrej reprezentacji efektów losowych za pomocą niepewności typu A, nakazującym zwiększanie liczby  $n$ . Tym samym pokazano, że symulacja MC jest efektywnym narzędziem weryfikacji hipotez, dotyczących analizy dokładności pomiarów.

## 8. Literatura

- [1] Kubisa S., Moskowicz S.: A study on transitivity of Monte Carlo based evaluation of the confidence interval for a measurement result, PAK 6/07, s. 7 – 10.
- [2] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Supplement 1. Numerical Methods for the Propagation of Distributions, Projekt dokumentu Międzynarodowego Biura Miar z 16. 03. 2004.
- [3] Korczyński J. M., Fotowicz P., Hetman A., Hłobaż A., Lewandowski D.: Sieciowy system informatyczny do obliczania niepewności pomiaru, PAK 2/07, s. 25 – 27.
- [4] Kubisa S.: Sześć podejść do oceny miary niedokładności pomiaru – od determinizmu po symulację Monte Carlo, PAK 2/07, s. 8 – 11.
- [5] Bartoszyński R.: Prawdopodobieństwa rachunek, Prawdopodobieństwo, hasła WEP, t. 9., PWN, Warszawa 1967, s. 396 – 399.
- [6] Skubis T.: Podstawy metrologicznej interpretacji wyników pomiarów, Wydaw. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2004.
- [7] Kordos M.: Wykłady z historii matematyki, Wydaw. Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994.
- [8] Sztencel R., Jakubowski J.: Wstęp do teorii prawdopodobieństwa, Wydaw. Script, Warszawa 2001.
- [9] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, BIPM / IEC / IFCC / ISO / IUPAC / IUPAP / OIML, 1995. (Wydanie polskie: Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik, tłum. J. M. Jaworski, Główny Urząd Miar, 1999).
- [10] Turzeniecka D., Waśkiewicz Z.: Analiza sytuacji niejednoznacznych w ocenie niepewności wyniku pomiarów, Metrologia i Systemy Pomiarowe, z. 1, Warszawa 1996.
- [11] Dorozhovec M., Warsza Z. L.: Wyznaczanie niepewności typu A pomiarów o skorelowanych rezultatach obserwacji, PAK 2/07, s. 20 – 24.
- [12] Kubisa S.: Niepewność pomiaru. Problem adekwatnych interpretacji i założeń, Podstawowe Problemy Metrologii, Prace Komisji Metrologii Oddziału PAN w Katowicach, Konferencje Nr 11, Ustroń, 14 – 17 maj 2006, s. 9 – 16
- [13] Dorozhovec M., Warsza Z. L.: Propozycje rozszerzenia metod wyznaczania niepewności wyników pomiarów wg Przewodnika GUM, (1), PAR, 1/07, s. 16 – 25.
- [14] Kubisa S.: Jaki sens ma splot rozkładu Studenta z rozkładem jednostajnym? Materiały Kongresu Metrologii, Wrocław 6 – 9 września 2004, s. 29 – 32.

Artykuł recenzowany

## INFORMACJE

# WYDAWNICTWO POMIARY AUTOMATYKA KONTROLA



specjalizuje się w wydawaniu czasopisma i książek popularno-naukowych  
w dziedzinie automatyki i pomiarów

Osoby i firmy przemysłowe zainteresowane współpracą z Wydawnictwem  
proszone są o kontakt bezpośredni dla uściślenia szczegółów współpracy

Wydawnictwo PAK  
00-050 Warszawa  
ul. Świętokrzyska 14A  
tel./fax 022 827 25 40

Redakcja PAK  
44-100 Gliwice  
ul. Akademicka 10, p. 30b  
tel./fax 032 237 19 45  
e-mail: [wydawnictwo@pak.info.pl](mailto:wydawnictwo@pak.info.pl)