

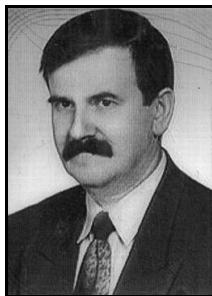
Tadeusz BIL

POLITECHNIKA KOSZALIŃSKA, WYDZIAŁ MECHANICZNY

## Optymalna synteza mechanizmu z wyższą parą kinematyczną typu torus–torus

Dr inż. Tadeusz BIL

Jest starszym wykładowcą na Wydziale Mechanicznym Politechniki Koszalińskiej. Przedmiotem jego zainteresowań jest synteza mechanizmów przestrzennych. Metody optymalizacji wykorzystuje również do analizy złożonych geometrycznie mechanizmów. Do modelowania i obliczeń stosuje własne oprogramowanie wykorzystujące kompilator Delphi i biblioteki OpenGl.



e-mail: bil@tu.koszalin.pl

### Streszczenie

W pracy przedstawiono jeden z problemów analizy kinematycznej i syntezy mechanizmów. Problemem tym jest modelowanie geometryczne mechanizmów w taki sposób, aby model obejmował jak najwięcej struktur zawierających najbardziej rozpowszechnione połączenia kinematyczne członów. Przedstawiony przykład syntezy mechanizmu pokazuje możliwości struktury zawierającej dwa stykające się torusy jako elementy wyższej pary kinematycznej i możliwość przekształcenia tego mechanizmu w układy prostsze, w których zamiast torusa(ów) może być wykorzystana powierzchnia kulista.

**Słowa kluczowe:** projektowanie, synteza mechanizmu

### Optimal synthesis of a mechanism with a higher kinematic pair of a torus-torus type Summary

#### Abstract

In this work there has been one of the problems of a kinematic analysis and synthesis of mechanisms introduced – a geometrical modeling of mechanisms in the way the model could cover as many number of structures including most widespread kinematic joints of links as possible. The introduced example of synthesis of mechanisms demonstrates possibilities of a structure containing two contacting toruses as the elements of a higher kinematic pair and a possibility of transformation of this mechanism into simpler arrangements in which a spherical surface may be used instead of a torus.

**Keywords:** designing, synthesis of a mechanism

## 1. Wstęp

Projektowanie mechanizmów to proces wieloetapowy, w którym kluczową, wyjściową dla kolejnych, pełni faza doboru struktury i geometrii członów, nazywanej synteza parametryczną. Synteza parametryczna obejmuje poszukiwanie najlepszych parametrów (wymiarów) wybranych struktur. Oba etapy syntezy mogą być wielokrotnie powtarzane, aż do uzyskania nowego, lepszego rozwiązania lub zaniechania dalszych poszukiwań.

Istniejące metody syntezy strukturalnej pozwalają wygenerować bardzo liczne zbiory rozwiązań mechanizmów spełniających postawione zadania tylko w zakresie rodzaju wymaganych ruchów [1]. Na końcu tego etapu powstaje pytanie, który z otrzymanych układów poddać dalszym analizom? Jest to zadanie na tyle trudne, że sięgamy często po rozwiązania prostsze, na przykład „płaskie”, dla których istnieją metody analizy i syntezy. O mechanizmach takich wiadomo, iż są to rozwiązania tylko teoretyczne, a ponadto często nie są one w stanie sprostać szczegółowym wymaganiom o charakterze kinematycznym. Z drugiej strony, stosowanie mechanizmów płaskich, wobec rosnących wymagań, wywołuje konieczność ich modelowania jako przestrzenne.

Mechanizm elementarny przedstawiony w niniejszej pracy jest rozumiany jako mechanizm trójczłonowy, zawierający jedną parę kinematyczną wyższą [2] i dwie pary kinematyczne klasy piątej spośród trzech możliwych: R – obrotowej, P – przesuwnej lub H – śrubowej. Para wyższa może być zrealizowana przy pomocy powierzchni torusów znajdujących się w kontakcie jednopunktowym. Jak to pokazano w pracy [3] mechanizm taki jest uogólnieniem wielu struktur mechanizmów dźwigniowych. Mechanizm ten, szczególnie w postaci zawierającej tylko pary niższe, jest jednak skomplikowany. Wywołuje to chęć uproszczenia struktury. Takie prostsze mechanizmy będą zawierać zamiast jednego lub obu torusów powierzchnie prostsze geometrycznie, np. cylinder, kulę czy płaszczyznę, zawsze zachowując jeden stopień ruchliwości i takie same pary kinematyczne niższe łączące człony wejściowy i wyjściowy z podstawą. Mechanizm ten może być również przedstawiony jako mechanizm z parami tylko niższymi, którego człony tworzą jeden zamknięty kontur wektorowy. Zastosowano opis pozycji i orientacji elementów modelu przy pomocy macierzowych przekształceń jednorodnych [3]. Do rozwiązania zadania analizy wykorzystuje się metodę rozmykania zamkniętego wieloboku wektorowego w punkcie kontaktu elementów tworzących wyższą parę kinematyczną. Opis analityczny zaproponowanego modelu nie posiada rozwiązania algebraicznego. W pracy zastosowano optymalizację do określenia jego właściwości. Proces syntezy jest realizowany poprzez optymalizację tylko parametryczną, gdyż jest to mechanizm (prawie) najbardziej ogólny ze wszystkich mechanizmów trójczłonowych, które dadzą się przekształcić do mechanizmu jednokonturowego dźwigniowego. Sformułowanie „prawie” dotyczy wzajemnego rozmieszczenia poszczególnych par obrotowych zastępujących torus w równoważnym mechanizmie dźwigniowym. Położenie sąsiednich par jest wzajemnie prostopadłe, a w rozwiązaniu najbardziej ogólnym powinno być dowolne.

## 2. Przykład syntezy mechanizmu

Jako przykład syntezy mechanizmu z parą wyższą w postaci dwóch torusów rozpatrzono mechanizm przedstawiony na rys. 2. Przyjęto następujące założenia (wg oznaczeń na rys. 1a):

- człony wejściowy wykonuje pełny ruch obrotowy,  $\beta_1 = 0 \div 360^\circ$ ;
- człony wyjściowy wykonuje ruch wahliwy, wokół osi zwichrowanej względem osi napędowej (kąt między osiami  $\alpha_2 = 30^\circ$ , odległość między osiami  $a_1 = 10$ ) ze stałym przełożeniem  $k = \omega_2 / \omega_1 = 0,1$  w zakresie obrotu dźwigni napędowej  $\beta_1 = 0 \div 180^\circ$ ;
- kąt nacisku  $\mu_2 \leq 60^\circ$  [4].

Jako wartość stałą przyjęto też, że  $\alpha_1 = 0$  – oś napędowa pokrywa się z osią OZ nieruchomego układu współrzędnych (rys. 1).

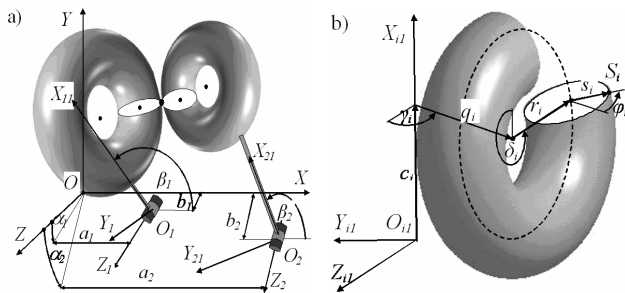
Jako kryterium optymalizacji przyjęto wskaźnik błędu przełożenia mechanizmu

$$K = \sqrt[4]{\sum_{i=1}^{180} (k_i - 0,1)^4}$$

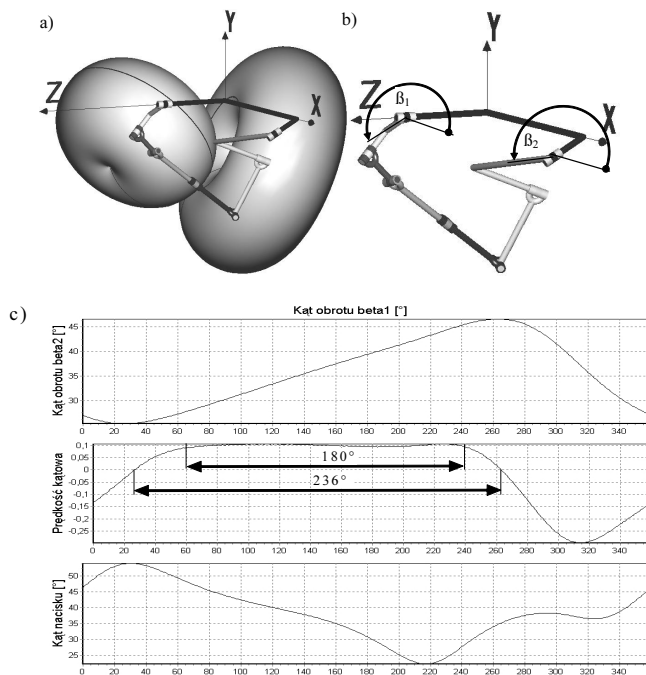
obliczony w 180 punktach (co  $1^\circ$ ) na podstawie wartości przełożenia  $k_i$  mechanizmu. Przełożenie  $k_i$  było obliczane jako prędkość kątowna ogniwa biernego  $\omega_2$  przy założeniu, że prędkość kątowna ogniwa czynnego  $\omega_1$  jest równa jedności. Prędkość kątowną obliczano numerycznie jako pochodną kąta obrotu ogniwa biernego względem czasu. Ograniczeniem była dopuszczalna wartość kąta nacisku, obliczana dla mechanizmu z parą wyższą.

Zmiennymi decyzyjnymi, w pierwszym etapie, były wszystkie niezależne parametry opisujące powierzchnie współpracujących

torusów i ich położenia względem nieruchomych układów współrzędnych (wg oznaczeń na rys. 1 ab).



Rys. 1. Mechanizm z wyższą parą kinematyczną torus-torus (a) i parametry położenia torusa i punktu na jego powierzchni (b)  
Fig. 1. Mechanism with a torus-torus higher kinematic pair (a) and parameters of position of a torus and a point on its surface (b)



Rys. 2. Schemat mechanizmu z parą wyższą typu torustorus otrzymany w wyniku syntezy (a), schemat równoważnego mechanizmu dźwigniowego 7R (b) i wykresy funkcji położenia, prędkości kątowej i kąta nacisku w zależności od kąta obrotu członu czynnego (c)  
Fig. 2. Diagram of a mechanism with a higher pair of a torus-torus type received in result of synthesis (a), diagram of equivalent linkage 7R (b) and diagrams of position function, angular velocity and pressure angle depending on the angle of rotation of input link

W wyniku optymalizacji otrzymano następujące wartości zmiennych decyzyjnych:  $b_1 = 4,09$ ,  $c_1 = 2,20$ ,  $q_1 = 1,59$ ,  $r_1 = 1,7$ ,  $s_1 = 3,43$ ,  $\gamma_1 = -44,17^\circ$ ,  $b_2 = 1,75$ ,  $c_2 = 10,43$ ,  $q_2 = 3,24$ ,  $r_2 = 3,95$ ,  $s_2 = 3,27$ ,  $\gamma_2 = -127,11^\circ$ .

W procesie analizy, po zakończeniu optymalizacji, ustalono wartości początkowe położenia kątowych członu czynnego  $\beta_{10} = 10^\circ$  i członu biernego  $\beta_{10} = 150^\circ$  w celu wygodniejszego przedstawienia liniowej części funkcji położenia mechanizmu.

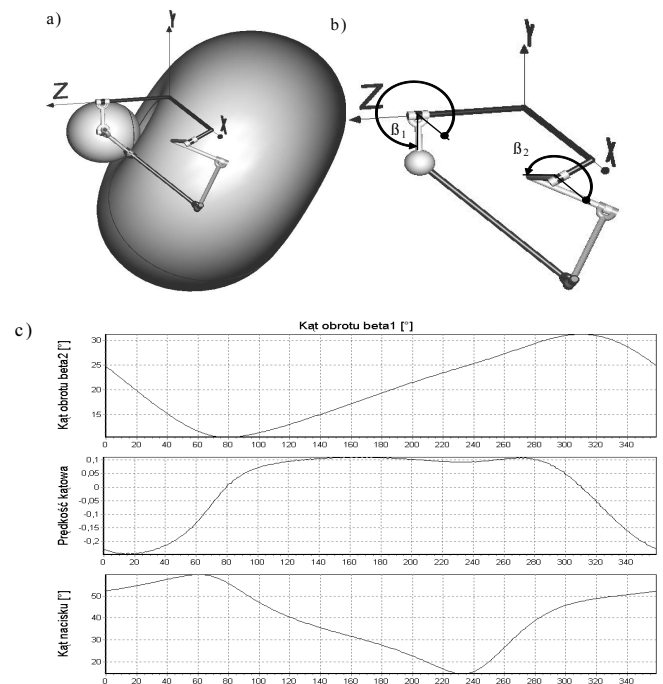
Optymalne wartości zostały zaokrąglone, po zakończeniu optymalizacji, do 2 znaków po przecinku. Na rysunkach 2c przedstawione są charakterystyki mechanizmu dla tak zaokrąglonych wartości. Maksymalny błąd przełożenia w zakresie obrotu członu czynnego  $\beta_1 = 0 \div 180^\circ$  wynosi  $\Delta k = 0,00755$  co odpowiada 7,55% wartości założonego przełożenia. Maksymalny kąt nacisku w mechanizmie rys. 2a wyniósł  $53,93^\circ$ . Maksymalny kąt obrotu członu czynnego, przy którym człon bierny obraca się w tę samą stronę, wynosi  $236^\circ$  (rys. 2c).

Mechanizmy z parami tylko niższymi, równoważne kinematycznie mechanizmom trójczłonowym z jedną parą wyższą, otrzyma się zastępując parę wyższą równoważnymi parami niższymi, zachowując te same pary łączące człony ruchome z ostoją. Kontakt punktowy dwóch powierzchni torusów jest równoważny układowi kinematycznemu z pięcioma parami obrotowymi, o osiach kolejno wzajemnie prostopadłych.

Ponieważ siedmioczłonowy mechanizm z siedmioma parami obrotowymi (7R) w wersji dźwigniowej jest skomplikowany, strukturę tę można uprościć. Można to zrobić zastępując torus, połączony z członem czynnym w mechanizmie trójczłonowym – kulą. Konsekwencją takiego uproszczenia w wersji dźwigniowej jest zmniejszenie liczby członów mechanizmu z 7 do 5. Jednocześnie zamiast trzech par obrotowych (RRR) wprowadza się jedną parę kulistą (S) (rys. 3). W rzeczywistości para kulista w mechanizmie dźwigniowym odpowiada układowi punkt-torus. Połączenie kula – torus może być zastąpione połączeniem punkt – torus poprzez zmniejszenie promienia kuli do zera i jednocześnie zwiększenie promienia tuby torusa o promień początkowy kuli. W mechanizmie dźwigniowym odpowiada to przesunięciu pary obrotowej zastępującej kontakt między elementami pary wyższej do punktu przecięcia się sąsiednich prostopadłych osi par obrotowych. Uproszczenie zmniejsza liczbę czynnych parametrów opisujących mechanizm. Zrealizowano go zmniejszając długość najmniejszej dźwigni do zera, chociaż możliwe są też inne uproszczenia, np. zmniejszenie jednocześnie do zera wymiarów  $s_1$  i  $s_2$ . W wyniku powstałby również 5-cio członowy mechanizm dźwigniowy o strukturze RRSRR.

W związku z uproszczeniem mechanizmu do postaci pary wyższej kula-torus, część zmiennych decyzyjnych staje się stałymi o ściśle określonych wartościach:  $q_1 = 0$ ,  $\gamma_1 = 0$ ,  $r_1 = 0$ .

W wyniku optymalizacji wykonanej po uproszczeniu, parametry będące w dalszym ciągu zmiennymi decyzyjnymi, przyjmują wartości:  $b_1 = 4,72$ ,  $c_1 = 2,44$ ,  $s_1 = 2,5$  na rys. 3a i  $s_1 = 0$  na rys. 3b,  $b_2 = 1,69$ ,  $c_2 = 9,90$ ,  $q_2 = 3,72$ ,  $r_2 = 4,57$ ,  $s_2 = 6,36$  na rys. 3a i  $s_2 = 8,86$  na rys. 3b,  $\gamma_2 = -120,65^\circ$ .

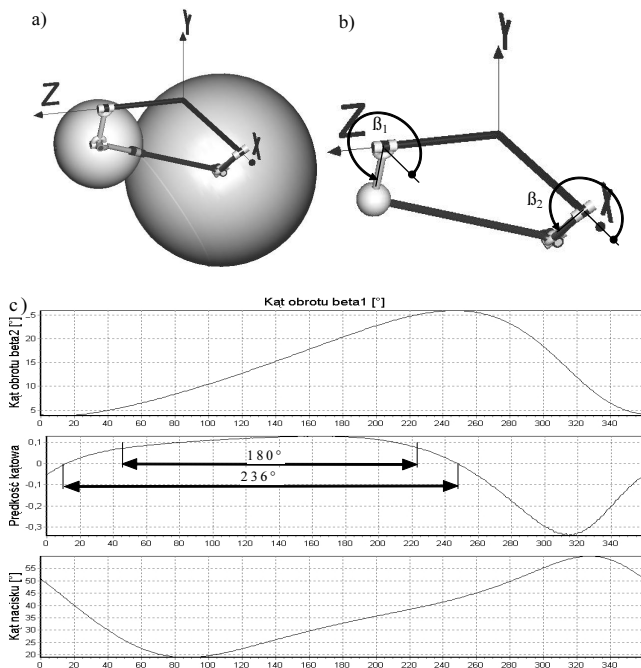


Rys. 3. Schemat mechanizmów z parą wyższą w postaci kula-torus i równoważnego RRRRR (a), schemat równoważnego mechanizmu dźwigniowego RSRRR (b) i wyniki analizy w postaci wykresu funkcji położenia, prędkości kątowej i kąta nacisku w zależności od kąta obrotu członu czynnego mechanizmu z parą wyższą (c)

Fig. 3. Diagram of a mechanisms with a higher pair of a sphere-torus type and equivalent linkage RRRRR (a), diagram of equivalent linkage RSRRR (b) and results of analysis with diagram of position function, angular velocity and pressure angle depending on the angle of rotation of input link of mechanism with higher pair (c)

Stałe wartości początkowe położenia członów wynoszą:  $\beta_{10} = 10^\circ$  i  $\beta_{10} = 170^\circ$ . Maksymalny błąd przełożenia w zakresie obrotu członu czynnego  $\beta_1 = 0 \div 180^\circ$  wynosi  $\Delta k = 0,01498$  co odpowiada 14,98% wartości założonego przełożenia, czyli błąd zwiększył się około dwukrotnie w stosunku do mechanizmu z parą torus-torus. Maksymalny kąt nacisku w mechanizmie wzrósł do  $59,73^\circ$  (przy tym samym ograniczeniu kąta nacisku  $\mu_2 \leq 60^\circ$ ). Maksymalny kąt obrotu członu czynnego, przy którym człon bierny obraca się w tę samą stronę wynosi  $232^\circ$  (rys. 3c).

I ten mechanizm można konstrukcyjnie uprościć, zastępując drugi torus, połączony z członem biernym, kulą. Konsekwencją takiego uproszczenia w wersji dźwigniowej jest kolejne zmniejszenie liczby członów mechanizmu z 5 do 4. Jednocześnie zamiast kolejnych dwóch par obrotowych (RR) wprowadza się jeden przegub uniwersalny (U) (rys. 4).



Rys. 4. Schemat mechanizmu z parą wyższą kulą-kulą i równoważnego mechanizmu RURUR (a), schemat równoważnego mechanizmu dźwigniowego RSUR (b) i wykresy funkcji położenia, prędkości kątowej i kąta nacisku w zależności od kąta obrotu członu czynnego (c)

Fig. 4. Diagram of a mechanism with a higher pair of a sphere-sphere type and equivalent linkage RURUR (a), diagram of equivalent linkage RSUR (b) and a diagram of position functions, angular velocity and pressure angle in dependence from angle of rotation of input link (c)

Uproszczenie to zmniejsza liczbę czynnych parametrów opisujących mechanizm. W związku z tym kolejna część zmiennych decyzyjnych staje się stałymi o ściśle określonych wartościach:  $q_2 = 0$ ,  $\gamma_2 = 0$ ,  $r_2 = 0$ ,  $b_2 = 0$ . W wyniku optymalizacji pozostałe parametry, będące w dalszym ciągu zmiennymi decyzyjnymi, przyjmują wartości:  $b_1 = 4,57$ ,  $c_1 = 2,74$ ,  $s_1 = 2,5$  na rys. 4a i  $s_1 = 0$  na rys. 4b,  $c_2 = 13,26$ ,  $s_2 = 5,39$  na rys. 4a i  $s_2 = 7,89$  na rys. 4b. Stałe wartości początkowe położenia członów wynoszą:  $\beta_{10} = 10^\circ$  i  $\beta_{10} = 170^\circ$ . Maksymalny błąd przełożenia, przy obrocie dźwigni napędowej o  $180^\circ$  wynosił  $\Delta k = 0,03384$  co odpowiada 33,84% wartości założonego przełożenia, czyli błąd przełożenia zwiększył się ponad dwukrotnie w stosunku do mechanizmu z parą wyższą w postaci torus-torus. Maksymalny kąt obrotu członu czynnego, przy którym człon bierny obraca się w tę samą stronę wynosi  $236^\circ$  (rys. 4c). Maksymalny kąt nacisku w mechanizmie rys. 4a wzrósł do  $60,15^\circ$ . Przekroczenie dopuszczalnego kąta nacisku  $\mu_2 \leq 60^\circ$  wynikało z zastosowanej metody uwzględniania ograniczeń podczas optymalizacji – metody zewnętrznej funkcji kary.

W ten sposób otrzymano trzy kolejno coraz prostsze kinematyczne mechanizmy realizujące założoną charakterystykę z różną dokładnością. Proponowany sposób postępowania w procesie syntezy jest następujący:

Jeżeli mechanizm spełnia wymagania, to należy nałożyć dodatkowe ograniczenia upraszczające, powtarzając proces optymalnej syntezy z uproszczeniami do momentu, aż mechanizm przestanie spełniać postawione wymagania. Ostatni układ, który jeszcze spełniał postawione wymagania, jest rozwiązaniem końcowym. Ograniczenia upraszczające, to takie, jakie wymieniono poprzednio, czyli przejście do układu kierunków ortogonalnych, do układu płaskiego, sferycznego czy innych specyficznych rozwiązań, np. zwiększając liczbę połączeń obrotowych kosztem przesuwnych, które na ogół są bardziej kosztowne. Nałożenie wymagań upraszczających już na początku syntezy zablokuje proces syntezy. Poza obszarem rozwiązań pozostanie część rozwiązań, niespełniających ograniczeń upraszczających. Podstawą do takiego sformułowania jest złożoność i niejednoznaczność przejścia parametrycznego od mechanizmu prostszego do bardziej złożonego.

### 3. Wnioski

W pracy przedstawiono jeden z problemów analizy kinematycznej i syntezy mechanizmów. Problemem tym jest modelowanie geometryczne mechanizmów w taki sposób, aby model obejmował jak najwięcej struktur zawierających najbardziej rozpowszechnione połączenia kinematyczne członów. Opis pozycji i orientacji elementów modelu może być oparty na macierzowych przekształceniach jednorodnych, co pozwoli na łatwe przeniesienie wyników do innych programów komputerowego wspomaganie projektowania.

Ponieważ opis analityczny zaproponowanego modelu nie posiada rozwiązania algebraicznego, w pracy zastosowano rozwiązanie metodą optymalizacji.

W celu sprawdzenia poprawności rozważań teoretycznych opracowano program umożliwiający animację analizowanych przestrzennych mechanizmów z parą wyższą i z parami tylko niższymi. Przedstawiono przykład obliczeniowy mechanizmu siedmioczłonowego z siedmioma parami obrotowymi. Zamieszczono wykresy przedstawiające funkcje położenia, kąt nacisku i prędkość kątową członu biernego modelu mechanizmu z wyższą parą kinematyczną.

Przedstawiony przykład syntezy mechanizmu pokazuje możliwości struktury zawierającej dwa stykające się torusy jako elementy wyższej pary kinematycznej i możliwości przekształcenia tego mechanizmu w układy prostsze, w których zamiast torusa(ów) może być wykorzystana powierzchnia kulista.

Struktura mechanizmu 7R jest najbardziej złożoną strukturą mechanizmu jednokonturowego z parami obrotowymi [3]. Do wizualizacji użyto biblioteki OpenGL, która jest szeroko stosowana również w pakietach typu CAD/CAM. Wszystkie programy zostały zapisane w języku PASCAL, na którym był wzorowany język stosowany, np. w pakiecie MATLAB, co umożliwia łatwe (po niewielkich modyfikacjach) przeniesienie opracowanych procedur do tego pakietu.

### 4. Literatura

- [1] Gronowicz A.: Podstawy analizy układów kinematycznych. Oficyna Wydaw. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2003.
- [2] Zhou Y.B., Buchal R.O., Fenton F.G., Tan F.R.: Kinematic analysis of certain spatial mechanisms containing higher pairs. Mechanism and Machine Theory, vol. 30. No. 5, 1995, 705720.
- [3] Bil T.: Analiza geometryczna trójczłonowego mechanizmu z wyższą parą kinematyczną w postaci stykających się powierzchni dwóch torusów. W książce Teoria maszyn i mechanizmów. Pod red. J. Wojnarowskiego i M. Galickiego. Tom I. Zie-lona Góra 2006, 67-73.
- [4] Zhang W.: On the finding of the spatial linkage with constant pressure angle. Mechanism and Machine Theory, vol. 32, 1997, 933940.