

Monika WIŚNIEWSKA, Remigiusz WIŚNIEWSKI, Marian ADAMSKI
 UNIwersYTET ZIELONOGÓRSKI, INSTYTUT INFORMATYKI I ELEKTRONIKI

Dekompozycja systemów dyskretnych z wykorzystaniem hipergrafów

Mgr inż. **Monika WIŚNIEWSKA**

Ukończyła studia na Wydziale Elektrycznym Uniwersytetu Zielonogórskiego, o specjalności Inżynieria Komputerowa. Obroniła pracę magisterską w 2003 r. Od 2003 r. jest słuchaczem studiów doktoranckich, specjalność informatyka. Jej zainteresowania naukowe to analiza systemów dyskretnych z wykorzystaniem hipergrafów.



e-mail: M.Wisniewska@weit.uz.zgora.pl

Mgr inż. **Remigiusz WIŚNIEWSKI**

Mgr inż. Remigiusz Wiśniewski jest absolwentem Uniwersytetu Zielonogórskiego (2004). Ukończył studia o specjalności Inżynieria Komputerowa. W roku 2000 odbył przemysłową praktykę studencką w firmie Aldec Inc. w Stanach Zjednoczonych. Od roku 2004 pracuje jako asystent na Wydziale Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego.



e-mail: r.wisniewski@iie.uz.zgora.pl

Prof. dr hab. inż. **Marian ADAMSKI**

Dyrektor Instytutu Informatyki i Elektroniki Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zainteresowania badawcze obejmują projektowanie mikrosystemów cyfrowych oraz formalne metody programowania sterowników logicznych. Członek IEEE, IEE, ACM, Polskiego Towarzystwa Elektrotechniki Teoretycznej i Stosowanej oraz Polskiego Towarzystwa Informatycznego.



e-mail: M.Adamski@iie.uz.zgora.pl

Streszczenie

W referacie zaprezentowana zostanie metoda dekompozycji systemów dyskretnych z wykorzystaniem hipergrafów. Podział uzyskano poprzez zastosowanie hierarchicznej redukcji wierzchołków hipergrafu. W procesie partycjonowania bloki systemu dyskretnego reprezentowane są poprzez wierzchołki hipergrafu, natomiast połączenia między blokami – poprzez hiperkrawędzie. Przedstawiona metoda umożliwi sekwencyjną redukcję wierzchołków hipergrafu, w których projektant sam może zdecydować, na którym poziomie hierarchii chce zakończyć partycjonowanie. Dzięki temu dany system może zostać podzielony na dowolną liczbę mniejszych układów.

Słowa kluczowe: system dyskretny, dekompozycja, hipergraf.

Usage of hypergraphs in decomposition of discrete system

Abstract

In the paper a method of discrete-system decomposition is proposed. The method is based on the hypergraph reduction and partition. A discrete-system is represented by a hypergraph; where module corresponds to the vertex and connection (net) corresponds to the hyperedge. The proposed method allows hierarchical reduction of the hypergraph and finally – partition of the discrete-system.

Keywords: discrete-system, decomposition, hypergraph.

1. Wstęp

Rozmiar oraz stopień skomplikowania projektowanych systemów dyskretnych zwiększa się bardzo szybko [5]. Często wiąże się to z potrzebą podziału układu na mniejsze jednostki. Istotny jest sposób partycjonowania, aby dekomponowane były moduły najsłabiej powiązane [2].

W artykule zaproponowano metodę podziału systemu dyskretnego z wykorzystaniem teorii hipergrafów. System dyskretny reprezentowany jest poprzez hipergraf [1, 5]. Poszczególne moduły odzwierciedlane są poprzez wierzchołki, natomiast połączenia pomiędzy modułami – poprzez hiperkrawędzie. Tak określony system dyskretny może zostać poddany procesowi dekompozycji

z wykorzystaniem teorii hipergrafów. W odróżnieniu od klasycznych grafów niekierowanych [3], hipergraf zachowuje informacje o wszystkich podgrafach pełnych (klikach), co jest niezwykle istotne podczas podziału, gdyż nie ma potrzeby dodatkowego określania zależności pomiędzy wierzchołkami.

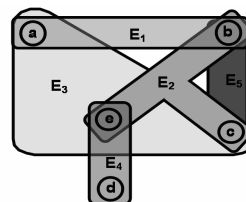
Przedstawiony sposób dekompozycji hipergrafu jest rozszerzoną wersją metody zaproponowanej przez H. Lee-Kwang oraz C.H. Cho [4]. Pierwotna metoda została zmodyfikowana oraz dopasowana na potrzeby dekompozycji systemów dyskretnych.

2. Podstawowe definicje

Hipergraf jest rozszerzeniem pojęcia grafu. Jego krawędzie, zwane hiperkrawędziami, mogą być incydentne do dowolnej liczby wierzchołków [1, 2, 5], podczas gdy w klasycznym grafie krawędzie mogą być incydentne maksymalnie do dwóch wierzchołków. Hipergraf H definiuje dwójka $H=(V, E)$, gdzie V jest dowolnym, niepustym zbiorem wierzchołków, natomiast E jest zbiorem krawędzi, czyli podzbiorem zbioru wszystkich możliwych zbiorów, których elementy należą do V [1]:

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \\ E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}.$$

Na rys. 1 przedstawiono przykładowy hipergraf H_1 . Dla uproszczenia oraz zwiększenia czytelności poszczególne wierzchołki hipergrafu zostały oznaczone kolejnymi literami alfabetu.



Rys. 1. Przykładowy hipergraf H_1
 Fig. 1. An exemplary hypergraph H_1

Hipergraf H_1 posiada $n=|V|=5$ wierzchołków: $V=\{a,b,c,d,e\}$, oraz $m=|E|=5$ krawędzi: $E=\{E_1,E_2,E_3,E_4,E_5\}$, gdzie $E_1=\{a,b\}$, $E_2=\{b,c,e\}$, $E_3=\{a,c,e\}$, $E_4=\{d,e\}$, $E_5=\{b,c\}$.

Hipergraf może być reprezentowany przez macierz incydencji, w której wiersze odpowiadają wierzchołkom, a kolumny krawędziom hipergrafu [2]. Jeśli element macierzy jest równy 1 to j -ta krawędź jest incydentna do wierzchołka. W przeciwnym przypadku element ten jest równy 0. Tabela 1 przedstawia macierz incydencji hipergrafu H_1 .

Stopień krawędzi $D_e(E_j)$ określa liczbę sąsiednich krawędzi, czyli takich, które zawierają wierzchołki należące do danej krawędzi, które należą także do innej krawędzi. W prezentowanym przykładzie: $D_e(E_1)=3$, $D_e(E_2)=4$, $D_e(E_3)=4$, $D_e(E_4)=2$, $D_e(E_5)=3$.

Tab. 1. Macierz incydencji hipergrafu H_1
 Tab. 1. Incidence matrix of hypergraph H_1

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
a	1	0	1	0	0
b	1	1	0	0	1
c	0	1	1	0	1
d	0	0	0	1	0
e	0	1	1	1	0

Stopień wierzchołka $D_v(v_i)$ określa liczbę hiperkrawędzi, do których dany wierzchołek należy. Przykładowo: $D_v(a)=2$, $D_v(b)=3$, $D_v(c)=3$, $D_v(d)=1$, $D_v(e)=3$.

Powyższe definicje są ogólnie znane i prezentowane w literaturze [1, 2]. Na potrzeby artykułu autorzy proponują wprowadzenie trzech dodatkowych pojęć, które dotychczas nie zostały zdefiniowane w literaturze polskojęzycznej:

Siła wierzchołka $S_v(v_i)$ należącego do krawędzi E_j określa liczbę wszystkich pozostałych hiperkrawędzi, do których dany wierzchołek także należy. W praktyce wartość ta może zostać zdefiniowana jako:

$$S_v(v_i) = \begin{cases} D_v(v_i) - 1, & \text{gdy } D_v(v_i) > 0; \\ 0, & \text{gdy } D_v(v_i) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

W prezentowanym przykładzie poszczególne siły poszczególnych wierzchołków wynoszą: $S_v(a)=1$, $S_v(b)=2$, $S_v(c)=2$, $S_v(d)=0$, $S_v(e)=2$.

Całkowita siła krawędzi $C_e(E_j)$ stanowi sumę wartości sił wszystkich wierzchołków należących do krawędzi E_j . W prezentowanym przykładzie:

$$\begin{aligned} C_e(E_1) &= S_v(a) + S_v(b) = 3, \\ C_e(E_2) &= S_v(b) + S_v(c) + S_v(e) = 6, \\ C_e(E_3) &= S_v(a) + S_v(c) + S_v(e) = 5, \\ C_e(E_4) &= S_v(d) + S_v(e) = 2, \\ C_e(E_5) &= S_v(b) + S_v(c) = 4. \end{aligned}$$

Liczba wierzchołków wspólnych $I(E_j)$ określa sumę wszystkich wierzchołków należących do krawędzi E_j , które należą także do innych hiperkrawędzi. Dla hipergrafu H_1 występują następujące wartości: $I(E_1)=2$, $I(E_2)=3$, $I(E_3)=3$, $I(E_4)=1$, $I(E_5)=2$.

3. Dekompozycja hipergrafu

Proces dekompozycji hipergrafu można podzielić na dwie części. Pierwsza to hierarchiczna redukcja krawędzi hipergrafu, w której wierzchołki są cyklicznie łączone, aż do momentu całkowitej redukcji hipergrafu. Drugą część stanowi partycjonowanie, czyli właściwa dekompozycja hipergrafu.

Proces hierarchicznej redukcji hipergrafu obejmuje następujące etapy:

1. **Wyznaczenie krawędzi wszystkich najmniejszym stopniu.** W tym kroku należy określić stopnie wszystkich krawędzi hipergrafu, a następnie określić krawędź o najmniejszym stopniu. W przypadku, gdy istnieje jedna krawędź o najmniejszym stopniu, realizowany jest punkt 4, w przeciwnym wypadku, wykonywany jest punkt 2, lecz tylko dla krawędzi, które mają najmniejszy stopień. Proces wyznaczania stopnia krawędzi został przedstawiony w [4].
2. **Określenie krawędzi, która posiada najmniejszą liczbę wierzchołków wspólnych.** Podobnie jak w poprzednim kroku, w przypadku, gdy więcej niż jedna krawędź posiada najmniejszą liczbę wierzchołków wspólnych, realizowany jest krok 3. W innym przypadku należy przejść do punktu 4 analizując tylko krawędzie o najmniejszej liczbie wierzchołków wspólnych. Sposób wyznaczania najmniejszej liczby wierzchołków opisano w [4].
3. **Określenie krawędzi o najmniejszej całkowitej sile.** W [4] autorzy proponują realizację tego etapu poprzez wyznaczenie wartości sił $S_{j,k}(E_j, E_k)$ pomiędzy poszczególnymi hiperkrawędziami. Siła pomiędzy krawędzią E_j , a krawędzią E_k oznaczana

jest jako $S_{j,k}(E_j, E_k)$ i oznacza liczbę wierzchołków należącą do obu hiperkrawędzi. Następnie należy wyznaczyć całkowitą siłę hiperkrawędzi $C_e(E_j)$, poprzez zsumowanie wszystkich sił $S_{j,k}(E_j, E_k)$, w których krawędź ta występuje. Należy zwrócić uwagę na stopień skomplikowania powyższego rozwiązania. Określenie wartości sił pomiędzy poszczególnymi krawędziami oznacza analizę wszystkich wierzchołków dla wszystkich par krawędzi hipergrafu. Złożoność obliczeniowa algorytmu można zapisać następująco:

$$f(n, m) = O(m! * n) \quad (2)$$

Wynika stąd, że pokazany algorytm dekompozycji hipergrafu ma złożoność wykładniczą. Dlatego też proponujemy autorską metodę wyznaczenia całkowitej siły krawędzi hipergrafu. W tym celu należy najpierw wyznaczyć siły dla wszystkich wierzchołków, a następnie określić zostaje siłę poszczególnych krawędzi. W praktyce sprowadza się to do jednokrotnej analizy macierzy incydencji hipergrafu, podczas której wyznaczana jest siła wierzchołków. Analizowane są kolejne wiersze, siła wierzchołka jest równa sumie jedynek w wierszu. Następnie wystarczy zamienić wszystkie jedynki w danym wierszu na uzyskaną wartość siły wierzchołka. W ten sposób szukana całkowita siła krawędzi wyznaczana jest poprzez dodanie wszystkich wartości w kolumnie. Proponowany algorytm można opisać poprzez:

$$f(n, m) = O(m * n^2) \quad (3)$$

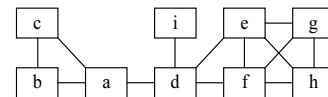
Z (2) oraz (3) wynika, że pierwotna wykładnicza złożoność obliczeniowa została w istotny sposób zredukowana do złożoności kwadratowej. Oznacza to znaczne zmniejszenie czasu, a także pamięci komputera (przechowanie zależności pomiędzy krawędziami) potrzebnych do realizacji algorytmu.

4. **Zredukowanie krawędzi wyznaczonej w kroku 1, 2 lub 3.** Wyznaczona krawędź zostaje zredukowana, a wierzchołki wchodzące w jej skład zostają zastąpione jednym makrowierzchołkiem. W przypadku, gdy w dalszym ciągu nie można określić jednoznacznie krawędzi do redukcji, usuwane są kolejno wszystkie krawędzie o najmniejszej całkowitej sile.

Etapy od 1 do 4 powtarzane są cyklicznie do momentu całkowitej redukcji hipergrafu. Istotna jest kolejność wyznaczanych krawędzi w każdym cyklu, gdyż określa sposób dekompozycji hipergrafu, a co za tym idzie – systemu dyskretnego. Na tej podstawie wykonywane jest partycjonowanie hipergrafu, a sam podział zostaje przeprowadzony w odwrotnej kolejności do hierarchicznej redukcji.

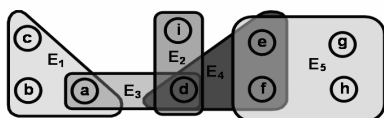
4. Przykład dekompozycji systemu dyskretnego

Zaprezentowana metoda dekompozycji systemu dyskretnego z wykorzystaniem hipergrafu zostanie zilustrowana przykładem. W tym celu wykorzystany zostanie hipotetyczny system dyskretny S_1 pokazany na rys. 2.



Rys. 2. System dyskretny S_1
 Fig. 2. Discrete-system S_1

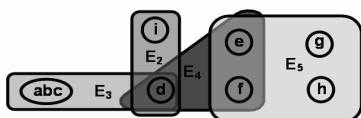
W układzie S_1 wyróżnić można osiem modułów oraz czternaście połączeń pomiędzy poszczególnymi blokami. Rysunek 3 przedstawia hipergraf H_2 obrazujący system dyskretny S_1 . Hipergraf H_2 posiada $n=|V|=8$ wierzchołków: $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, które odpowiadają modułom systemu S_1 . Połączenia pomiędzy modułami określone zostały z wykorzystaniem $m=|E|=5$ hiperkrawędzi: $E=\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$, gdzie $E_1=\{a, b, c\}$, $E_2=\{a, d\}$, $E_3=\{d, i\}$, $E_4=\{d, e, f\}$, $E_5=\{e, f, g, h\}$.



Rys. 3. Hipergraf H_2
Fig. 3. Hypergraph H_2

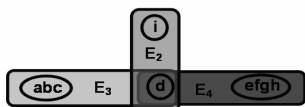
Zgodnie z algorytmem dekompozycji, pierwszym krokiem, jaki należy wykonać jest wyznaczenie krawędzi o najmniejszym stopniu. Dla rozpatrywanego przykładu poszczególne krawędzie mają następujące stopnie: $D_e(E_1)=1$, $D_e(E_2)=3$, $D_e(E_3)=2$, $D_e(E_4)=3$, $D_e(E_5)=1$. Ponieważ istnieją dwie krawędzie (E_1 oraz E_5) o najmniejszym stopniu, niezbędne jest określenie dla tych krawędzi liczby wierzchołków wspólnych. Wartości te odpowiednio wynoszą: $I(E_1)=1$ oraz $I(E_5)=2$. Wynika stąd, że jako pierwsze redukowane będą wierzchołki a , b oraz c , należące do krawędzi E_1 , która ma mniej wierzchołków wspólnych niż krawędź E_5 .

W wyniku redukcji wierzchołki a , b oraz c utworzą makrowierzchołek abc . Zredukowany hipergraf H_3 pokazano na rys. 4.



Rys. 4. Hipergraf H_3
Fig. 4. Hypergraph H_3

Dla hipergrafu H_3 wykonywany jest kolejny cykl hierarchicznej redukcji. Ponieważ poszczególne krawędzie mają następujące stopnie: $D_e(E_2)=2$, $D_e(E_3)=2$, $D_e(E_4)=3$, $D_e(E_5)=1$, kolejną krawędzią, która zostanie usunięta jest E_5 , a wierzchołki e , f , g , oraz h zostaną połączone (rys. 5).



Rys. 5. Hipergraf H_3 po zredukowaniu kolumn E_1 oraz E_5
Fig. 5. Hypergraph H_3 after the reduction of column E_1 and E_5

Tabela 2 obrazuje macierz incydencji nowopowstałego hipergrafu H_4 . Hipergraf H_4 posiada trzy krawędzie, które mają następujące stopnie. $D_e(E_2)=2$, $D_e(E_3)=2$, $D_e(E_4)=2$.

Tab. 2. Macierz incydencji hipergrafu H_4
Tab. 2. Incidence matrix of hypergraph H_4

	E_2	E_3	E_4
abc	1	0	0
d	1	1	1
$efgh$	0	0	1
i	0	1	0

Ponieważ wszystkie trzy hiperkrawędzie mają ten sam stopień, konieczne jest określenie liczby wierzchołków wspólnych. Wartość ta jest także taka sama i wynosi $I(E_2)=I(E_3)=I(E_4)=1$. Dlatego też należy określić krawędź o najmniejszej całkowitej sile. Zgodnie z algorytmem najpierw należy określić siłę wszystkich wierzchołków.

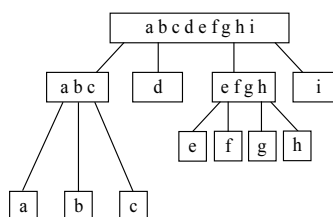
W prezentowanym przykładzie poszczególne wierzchołki mają siłę: $D_s(abc)=D_s(efgh)=D_s(i)=0$, $D_s(d)=2$. Tabela 3 prezentuje zmodyfikowaną macierz incydencji, w której uwzględnione zostały stopnie wierzchołków. Suma wartości w poszczególnych kolumnach określa całkowity stopień krawędzi. Z tabeli wynika, że całkowita siła wszystkich kolumn jest taka sama i wynosi $C_e(E_2)=C_e(E_3)=C_e(E_4)$. Oznacza to, że z hipergrafu usunięte zostaną wszystkie pozostałe hiperkrawędzie (kolejność nie ma znacze-

nia). W ten sposób początkowy hipergraf H_2 został całkowicie zredukowany.

Tab. 3. Zmodyfikowana macierz incydencji hipergrafu H_4
Tab. 3. Modified incidence matrix of hypergraph H_4

	E_2	E_3	E_4
abc	0	0	0
d	2	2	2
$efgh$	0	0	0
i	0	0	0
$C_e(E_j)$	2	2	2

Dekompozycja systemu dyskretnego przebiega w odwrotnej kolejności do hierarchicznej redukcji. Rysunek 6 ilustruje proces podziału.



Rys. 6. Schemat dekompozycji systemu dyskretnego S_7
Fig. 6. Decomposition diagram of the discrete-system S_7

Zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 6, po pierwszym cyklu system dyskretny jest dekomponowany na cztery bloki, zawierające odpowiednio moduły: abc , d , $efgh$ oraz i . Wynika to z faktu, że wierzchołki odpowiadające tym modułom były łączone podczas ostatniego etapu hierarchicznej redukcji.

Jeśli ten podział nie jest jeszcze satysfakcjonujący, wykonywany jest kolejny cykl partycjonowania, w którym rozdzielone zostają moduły e , f , g oraz h . Jako ostatnie podzielone zostają moduły a , b , oraz c . Oznacza to, że są one najsilniej związane (kolejne to e , f , g , h , itd.).

5. Podsumowanie

W referacie przedstawiono sposób dekompozycji systemu dyskretnego z wykorzystaniem hipergrafów. Proces partycjonowania bazuje na hierarchicznej redukcji hiperkrawędzi. Informacja ta wykorzystana jest w późniejszej dekompozycji systemu dyskretnego. W ten sposób partycjonowanie układu przebiega sekwencyjnie, a projektant sam może zdecydować, na którym etapie przerwać proces dekompozycji.

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego finansowanego ze środków Zintegrowanego Programu Operacyjnego Rozwoju Regionalnego (Działanie 2.6: Regionalne strategie innowacyjne i transfer wiedzy) z udziałem Europejskiego Funduszu Społecznego.

6. Literatura

- [1] Berge C.: Graphs and Hypergraph, North-Hols.r Mathematical Library, Amsterdam 1976.
- [2] De Micheli G.: Synteza i optymalizacja układów cyfrowych, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.
- [3] Corno F., Prinetto P., Sonza Reorda M., "Using Symbolic Techniques to find the Maximum Clique in very large sparse graphs", The European and Test Conference (EDTC'95), 1066-1409/95 \$10.00 IEEE 1995.
- [4] Lee-Kwang H. and Cho Ch. H.: Hierarchical Reduction and Partition of Hypergraph, IEEE Transitions on systems, Vol. 26, No 2, 1996.
- [5] Łuba T.: Synteza układów logicznych, Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania, Warszawa 2000.