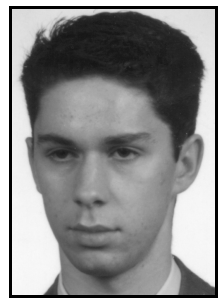
Kamil MIELCAREK
UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI, INSTYTUT INFORMATYKI I ELEKTRONIKI

Wyszukiwanie dziur nieparzystych jako jeden z aspektów rozpoznania grafów doskonałych w automatycznej syntezie układów cyfrowych

Mgr inż. Kamil MIELCAREK



Jest pracownikiem Instytutu Informatyki i Elektroniki Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zajmuje się zastosowaniem grafów doskonałych w procesach automatycznej syntezy i optymalizacji układów cyfrowych. Jednocześnie zajmuje się zagadnieniami serwerowych systemów sieciowych opartych na systemie OpenBSD jak i ich bezpieczeństwem, oprogramowaniem oraz rozwiązaniami sieciowymi. Zajmował się też systemami czasu rzeczywistego opartymi o systemy BSD i Linux.

e-mail: K.Mielcarek@iie.uz.zgora.pl

Streszczenie

Obserwujemy gwałtowny rozwój elektroniki i wszechobecną miniaturyzację, objawiającą się coraz większą ilością urządzeń realizujących coraz bardziej skomplikowane zadania. Ten rozwój pociąga za sobą konieczność opracowywania nowych, bardziej efektywnych metod panowania nad takim ogromem zależności. Złożoność problemów występujących w czasie automatycznego przygotowania układów cyfrowych powoduje, że w praktyce stosowane są algorytmy heurystyczne, dające wyniki przybliżone i nie zawsze w najkrótszym możliwym czasie. Pogoń za nowymi rozwiązaniami doprowadziła do pomysłu wykorzystania grafów doskonałych, które przez swoje własności pozwalają zmniejszyć wymagania czasowe a zatem i wymaganą moc obliczeniową, dając w zamian wyniki optymalne. Zanim można będzie operować na grafach doskonałych należy sprawdzić czy dany graf jest grafem doskonałym. Najnowsze prace wskazują, że grafy doskonałe można rozpoznawać (pośród innych metod) z użyciem algorytmów wyszukiwania dziur nieparzystych. Jednocześnie obserwuje się, że znacząca większość grafów opisujących rzeczywiste układy zawiera się w podklasach grafów doskonałych. W roku 1960, Claude Berge wysunął tezę mówiącą ze graf jest doskonały wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera ani dziur nieparzystych ani anty-dziur nieparzystych. Teza jest znana jako Strong Perfect Graph Conjecture. (Chvátal i Sbihi zaproponowali nazwę grafu Bergea) wg propozycji *dziura* natomiast, jest bezcięciwowym cyklem, o długości przynajmniej cztery, zaś anty-dziura jest dopełnieniem takiego cyklu. Dziury i anty-dziury są natomiast parzyste i nieparzyste zgodnie z parzystością ich liczby wierzchołków. Nieparzysta dziura jak i nieparzysta anty-dziura nie są doskonałe, bowiem ich liczby klikowe wynoszą odpowiednio 2 oraz 2k+1 natomiast liczby chromatyczne mają odpowiednio 3 oraz k+1, co jednoznacznie uniemożliwia im być grafem doskonałym (liczba chromatyczna grafu doskonałego G, jest równa liczbie kliki grafu, dla każdego indukowanego podgrafu grafu G).

Słowa kluczowe: grafy doskonałe, algorytmy rozpoznawania grafów doskonałych, teoria grafów, automatyczna synteza sterowników.

Recognizing odd-hole free graphs for testing perfect graphs for automatic synthesis of digital circuits

Abstract

This paper should to point out potential strenght of prerfect graph algorithms – especially algorithms with use of odd-hole-free graph - for automated synthesis of digital circuits. Typically known problems are NP-complete, but using perfect graphs, complexity is decreasing to polynomial. Studies in this matter show that plenty of dependencies describing real-life sequential circuits can be described using perfect graphs. There shown simplified methods to recognize perfect graphs, placed basic knowledge about the subject and shown simplified analysis of digital controller described in SFC. In this analysis some methods for recognizing perfect graphs was used.

Keywords: prefect graphs, odd-hole free graphs, prefect graphs recognizing algorithms, graph theory, automatic synthesis of digital controllers.

1. Wstęp

Opierając się na własnościach grafów doskonałych, można postawić tezę, że jeśli układ opisany został za pomocą grafów doskonałych to każdy z elementów układu (każdy z podgrafów) tez jest opisany grafem doskonałym. Daje to możliwość dekompozycji systemu i weryfikacje poszczególnych modułów. Dalej prowadzi to do stwierdzenia, ze poprawnie zaprojektowany układ, reprezentowany przez graf niebędący doskonałym, potencjalnie zawiera błędy lub nie został zaprojektowany w należyty sposób. Nie jest możliwe w chwili obecnej stwierdzić czy układy zawsze są opisywane grafami doskonałymi, jednak zdecydowana większość należy do podklas grafów doskonałych [6].

Niniejszy artykuł ma na celu rozwinięcie tematyki wskazanej w [12] oraz potencjału i użyteczności algorytmów do rozpoznawania grafów doskonałych. Zagadnienia występujące w procesach automatycznej syntezy dają się rozwiązać w czasie wielomianowym, gdzie dla grafów w ogólności problem złożoności należy do klasy problemów NP-zupełnych.

Zastosowanie algorytmów rozpoznających grafy doskonałe na podstawie wyszukiwania dziur jest tez pośrednio metodą określenia przynależności grafów do podklasy grafów doskonałych, co jest nie bez znaczenia przy zastosowaniu pośredniego modelu formalnego opartego o grafy doskonałe. Jeśli graf jest grafem doskonałym, całkowicie pozbawionym dziur, to z definicji musi należeć do klasy grafów trójkątnych, będących jedna z podklas użyteczną podczas procesów automatycznej syntezy układów. Jest też wstępem do rozpoznania grafów interwałowych przydatnych w procesach harmonogramowania. Istnieje możliwość rozpoznania przynależności grafu do grafów doskonałych poprzez wyszukiwanie dziur nieparzystych, co powodowałoby dalsze uproszczenie złożoności obliczeniowej algorytmów.

Zastosowanie grafów doskonałych jako pośredni model formalny jest o tyle użyteczne, że znacząca większość zależności, opisujących rzeczywiste układy sekwencyjne, daje w wyniku grafy należące do podklasy grafów doskonałych [6], co pozwala przypuszczać, że sprawdzając powstające grafy opisujące układ będzie można zweryfikować jego poprawność, jak również jego części. Artykuł jest kontynuacją rozważań zawartych w [11].

2. Dziury, Antydziury i Grafy Doskonałe

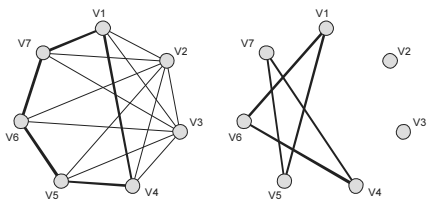
Algorytmy rozpoznawania grafów doskonałych opierają się o metodę poszukiwania nieparzystych dziur (ang. odd-hole) w grafach prostych skończonych [5]. Dowiedziono, że graf jest grafem doskonałym wtedy i tylko wtedy, gdy jest grafem Berge'a. Natomiast graf Berge'a można rozpoznać, gdy ani graf ani jego dopełnienie nie zawierają nieparzystych dziur. Nieparzysta dziura nigdy nie będzie grafem doskonałym. Jeśli więc graf zawiera nieparzysta dziurę to w myśl definicji istnieje możliwość wyindukowania podgrafu niebędącego grafem doskonałym, przez co graf nie może być doskonały.

Dziura, (*ang. graph hole*) to alternatywna nazwa dla bezcięciwowego cyklu o długości przynajmniej 4, dla uproszczenia nazywanego dziurą (Chvátal). Dziury są nazywane parzystymi, jeśli mają parzystą liczbę wierzchołków oraz nieparzyste, jeśli liczba wierzchołków jest nieparzysta. Dopełnienie dziury jest nazywane antydziurą (*ang. graph antihole*). Żadna nieparzysta dziura nie jest grafem doskonałym, (bowiem liczba kliki jest równa *2* a liczba chromatyczna *3*), jednocześnie anty-dziura też nie należy do grafów doskonałych (liczba kliki anty-dziury z *2k+1* wierzchołkami jest równa k a jej liczba chromatyczna wynosi *k+1*).

Jednocześnie brak dziur w grafie powoduje, że graf jest albo prosty albo zawiera podgraf 2-gwiezdny (*ang. 2-star*) lub dwudzielny, (*ang. 2-join*). To stwierdzenie jest podłożem wyjścia do algorytmów rozpoznawania, czy graf przynależy do rodziny grafów doskonałych, poprzez rozłożenie grafu G na m podgrafów i stwierdzenie czy każdy z G_i gdzie $i=1,2,...,m$ - prostszy podgraf jest grafem bez nieparzystych dziur. Należy wspomnieć, że wyszukanie 2-gwiazdy jest problemem, który można rozwiązać

w czasie wielomianowym. Rozpoznanie 2-gwiazdy opartej o wierzchołki u i v, w czasie wielomianowym polega na sprawdzeniu czy zostaną rozłączone niesąsiadujące wierzchołki x i y, przez usunięcie wszystkich sąsiadów u i v z wyjątkiem x i y. Natomiast wielomianowy algorytm wyszukiwania podgrafu 2-dzielnego można znaleźć w [1, 17].

Autorzy [5] podają metodę rozpoznawania grafów doskonałych z użyciem dekompozycji 2-gwiazd oraz dekompozycji 2-dzielnej oraz algorytmy tworzenia grafów spełniających inne kryteria na potrzeby tych algorytmów.



Rys. 1. Graf G (a) oraz jego dopełnienie (b) zawierające nieparzystą „dziurę"
Fig. 1. Graph G (a) and complement (b) containing „odd-hole"

Przykładem grafu zawierającego nieparzystą „dziurę" może być graf G (rys. 1). Można w nim wyróżnić dziurę, na którą składa się cykl bez cięciw V_1,V_4,V_5,V_6,V_7,V_1. Jednocześnie można zauważyć, że w dopełnieniu grafu też można wyróżnić tego rodzaju konstrukcję zawierającą te same wierzchołki. Dla dopełnienia zauważamy cykl V_1,V_5,V_7,V_4,V_6,V_1 również będący nieparzystą dziurą. Jak widać - opierając się na definicji grafów Berge'a, ten graf nie jest grafem Berg'a, a co za tym idzie nie jest grafem doskonałym.

W ostatnich latach zaprezentowane były dwa algorytmy rozpoznawania grafów doskonałych o złożoności wielomianowej *„Recognizing Berge Graphs"* [16] - algorytm o złozoności rzedu $O(n^9)$ oraz *„A Polynomial Algorithm for Recognizing Perfect Graphs"* [5] - algorytm o złożoności rzędu $O(n^{20})$, jednak jak widać problem nadal pozostaje złożoność obliczeniowa algorytmów. Problem powstaje przez konieczność wykorzystania „czyszczenia" grafu [16].

wejście: graf spójny nieskierowany G
wyjście: tak/nie w zależności czy graf zawiera dziury.
1. Inicjowanie i wyzerowanie tablic *not_in_hole[ ]* i *in_path[ ]*
   wylicz macierz sąsiedztwa *A[ ]* grafu *G*;
2. dla każdego wierzchołka *u* grafu *G* wykonaj
   2.1 *in_path[u]* ← *1;*
   2.2 dla każdej krawędzi *vw* grafu *G* wykonaj jeśli *u* jest sąsiadem *v*
   I nie jest sąsiadem *w* i *not_in_hole[(u; v);w] = 0* to wtedy*in_path[v]* ← *1;*
   process(u, v, w); in_path[v] ← *0;*
   2.3 *in_ path[u]* ← *0;*
3. Wypisz graf *G* nie zawiera dziury.

process(a; b; c)
1. *in path[c]* ← *1;*
2. dla każdego wierzchołka *d* sąsiadującego z *c* w grafie *G* wykonaj
   2.1 jeśli *d* nie jest sąsiadem *a* ani *b* w grafie *G* to wtedy
   {fabcd jest P4 grafu G}
   2.2 jeśli *in_path[d] = 1* to wtedy wypisz graf G posiada dziurę; STOP.
   w przeciwnym razie jeśli *not_in_hole[(b; c); d] = 0* to wtedy
   process(b; c; d);
3. *in_path[c]* ← *0;*
4. *not in hole[(a; b); c]* ← *1;*
   not in hole[(c; b); a] ← *1;*

Rys. 2. Algorytm wyszukiwania dziur w grafie; [13]
Fig. 2. Hole finding algorithm for general graphs; [13]

Michele Conforti, Gérard Cornuéjols, i Kristina Vušković udowodnili, że każdy graf Berge'a bez kwadratów (dziur o długości 4) przynależy do dwóch podstawowych klas: grafów dwudzielnych oraz liniowych grafów dwudzielnych. Inaczej mówiąc, posiadają jedna z dwóch błędnych struktur „*star-cutset*" lub „*2-join*". Skoro grafy dwudzielne i liniowe grafy dwudzielne są doskonałe oraz to, że najmniejszy niedoskonały graf Berge'a nie zawiera żadnej z tych struktur, to oznacza, że każdy z grafów Berge'a niezawierający kwadratów jest doskonały.

Do przybliżenia zagadnienia wyszukiwania dziur można posłużyć się powyższym algorytmem [13]. Nie jest to algorytm doskonały, jednak pozwala zrozumieć proces poszukiwań.

Zastosowanie powyższego algorytmu pozwala znaleźć odpowiedz, czy w grafie znajdują się dziury, co jak powiedziano wcześniej daje odpowiedz czy graf może przynależeć do klasy grafów trójkątnych.

wejście: graf spójny nieskierowany G
wyjście: tak/nie w zależności czy graf zawiera dziury.
1. Inicjowanie i zerowanie tablic *visited_P3[ ]* oraz *in_path[ ]*;
   wylicz macierz sąsiedztwa grafu *G*;
2. dla każdego wierzchołka grafu *G* wykonaj
   2.1 *in_path[u]* ← *1;*
   2.2 dla każdej krawędzi *vw* grafu *G* wykonaj jeśli *u* nie sąsiaduje z *v*
   ani *w* i *visited_P3[(v,w), u] = 0* wtedy
   in_path[v] ← *1; process(v, u,w); in path[v]* ← *0;*
   2.3 *in_path[u]* ← *0;*
3. Wypisz: *G* nie posiada anty-dziur.

process(a, b, c)
1. *in path[c]* ← *1;*
2. *visited_P3[(a, c), b]* ← *1;*
   visited_P3[(c, a), b] ← *1;*
3. dla każdego wierzchołka *d* sąsiadującego z *b* w grafie *G* wykonaj
   3.1 jeśli *d* jest sąsiadem *a* i nie jest sąsiadem *c* w grafie *G* wtedy
   {abcd jest a P4 of G}
   3.2 jeśli *in_path[d] = 1* wtedy
   Wypisz: G posiada anty-dziure; stop;
   else
   jeśli *visited_P3[(b, d), c] = 0* wtedy *process(b, c, d);*
4. *in path[c]* ← *0;*

Rys. 3. Algorytm wyszukiwania anty-dziur w grafie; [13]
Fig. 3. Anti-Hole finding algorithm for general graphs; [13]

3. Grafy Doskonałe w procesach syntezy

Omawiając zastosowanie grafów doskonałych w procesach syntezy należy przedstawić reprezentację układu stosując grafy doskonałe jako pośredni, wewnętrzny, model formalny. Realizacja modelu z użyciem grafów doskonałych pozwala opisać np. ścieżki przepływu danych i sterowania czy opisać układy opisane Sieciami Petriego. Jednocześnie pozwalają na używanie algorytmów realizujących np. procesy kolorowania, pokrycia klikami, dekompozycje a nawet kompozycje układów (prace trwają). Zaletą tych algorytmów jest ich niższa złożoność obliczeniowa (rzędu wielomianowego), gdzie w ogólnym przypadku są to problemy sięgające problemów o wykładniczej i wyższej złożoności. W praktyce stosowane są algorytmy heurystyczne, dające tylko przybliżenie wyników idealnych. Jest to kompromis miedzy szybkością działania oprogramowania a wielkością (czy jakością) układu. Stosując grafy doskonałe można osiągnąć wyniki idealne w czasie krótszym. Istnieje jednak konieczność rozpoznania czy układ opisany jest grafami doskonałymi co przekłada się na informacje użyteczne w kolejnych etapach opracowania specyfikacji wejściowej, przyczyniając się do kolejnego zmniejszenia złożoności całego procesu. Z braku dowodu nie można jednoznacznie stwierdzić, że wszystkie układy daje się zapisać z użyciem grafów doskonałych, dlatego opisywana metoda musi stanowić jedynie ścieżkę która będzie używana w momencie, kiedy układ daje się opisać grafem doskonałym. W pozostałych przypadkach będą używane metody klasyczne. Jednak prace praktyczne np. [6] pokazują ze znacząca większość układów z życia wziętych jest opisana grafami doskonałymi. Można postawić tezę, że poprawnie zaprojektowany układ będzie opisany grafami doskonałymi, co może być to wskazówką a może nawet konkretną metodą weryfikacji projektu.

Oprócz rozpoznania grafów doskonałych ważne jest jeszcze zbadanie ich przynależności do konkretnych podklas grafów doskonałych będących typami grafów, które powstają w procesie analizy czy syntezy. Często produkt końcowy (graf) zależy od sposobu wykonywania koniecznych przekształceń. Przykładem może być graf reprezentujący obraz przepływu sterowania i danych opisany za pomocą grafu porównywalności, który po operacjach domknięcia tranzytywnego i symetrycznego stanie się grafem trójkątnym. Oda typy grafów należą do podklas grafów doskonałych. Odwracając proces dekompozycji powstaje zagadnienie zbudowania systemu, który będzie potrafił przechować dane o wcześniej badanych układach i traktować je jako elementy biblioteczne, których użycie (łączenie) będzie zachowywało wła-

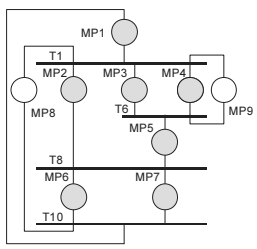
ściwość doskonałości. Warto zwrócić uwagę, że indukowane podgrafy grafu doskonałego są doskonałe czyli części składowe układu tez będą miały reprezentację przedstawioną grafem doskonałym.

Przegląd literatury wskazuje, że choć grafy doskonałe i ich specyficzne właściwości są znane to jednak brakuje ich szerokiego zastosowania. Brak opracowań wpływa na pomijanie tej części teorii grafów, mimo że fakt ich istnienia jest wymieniany w książkach związanych z syntezą układów logicznych. Zauważalne są korelacje grafów doskonałych z np. hipergrafami.

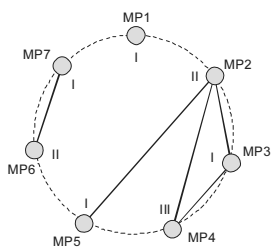
Na potrzeby zapełnienia braku realizacji systemu opartego o grafy doskonałe stworzono bibliotekę procedur, służącą do operowania na grafach doskonałych i grafach w ogólności, która może być podstawą budowy systemu automatycznej syntezy i/lub optymalizacji opartej o pośredni model formalny realizowany na grafach doskonałych i używający algorytmów o zmniejszonej złożoności obliczeniowej.

4. Zastosowanie (przykład)

Przedstawione w innych pracach algorytmy i metody, w połączeniu z metodami opisanymi w innych pracach pozwalają na przeprowadzenie uproszczonej przykładowej analizy. Niech dany jest opis układu w postaci grafu SFC. Za przykład niech posłuży sieć pochodząca z załącznika standardu IEC 1131-3 [14]. Oryginalny sposób interpretacji układowej sterownika rekonfigurowalnego przedstawiono w pracach M. Adamskiego. Poniżej przedstawiono opis sterowania mieszalnikiem już w postaci makrosieci Petriego.



Rys. 4. Makrosieć Petriego odpowiadająca modelowi SFC [14]
Fig. 4. Petrie macro-net eqivalent to SFC model from [14]



Rys. 5. Graf zgodności - modelu z rys. 4
Fig. 5. Compatibility graph of the model from fig. 4

Analiza dyskretna przestrzeni stanów lokalnych automatu współbieżnego, modelującego program sterownika logicznego, generuje grafy, które podczas analizy okazały się być grafami doskonałymi. Po wyznaczeniu relacji współbieżności między miejscami makrosieci, np. analizując graf znakowań makrosieci, uzyskano graf zgodności (współbieżności) między miejscami. Na podstawie analizy stwierdzono, że graf ten jest
- złożony z trzech składowych spójności,
- każda z nich odpowiada składowej automatowej,
- składowe są grafami doskonałymi,
- przynależy do podklasy grafów trójkątnych*,
- przynależy do podklasy grafów porównywalności*.

* (w tym przypadku)

W związku z tym jego kolorowanie daje się wykonać w czasie wielomianowym. W rezultacie kolorowania otrzyma się trzy składowe podsieci automatowe:
I: $\{MP_1, MP_3, MP_5, MP_7\} = \{P_1, P_5, P_6, P_7, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}\}$
II: $\{MP_2, MP_6\} = \{P_2, P_3, P_4, P_{14}, P_{15}\}$
III: $\{MP_4\} = \{P_8, P_{16}\}$

5. Wnioski

Współczesne metody projektowania układów bardzo szeroko stosują formalne modele pośrednie, do wewnętrznej i zewnętrznej reprezentacji struktur układów logicznych. Powszechnie stosowane są rozwiązania na bazie grafów czy sieci Petriego. Analiza większej liczby sieci Petriego, opisującej rzeczywiste układy sterowania podsuwa przypuszczenie, że relacja uporządkowania przestrzeni stanów lokalnych takiej sieci jest opisana grafem doskonałym. Wniosek ten potwierdza pośrednio [6], w której przeprowadzono znaczną liczbę testów na grafach opisujących rzeczywiste układy cyfrowe. Wyniki prac eksperymentalnych w tej dziedzinie wskazują, że znacząca większość rzeczywistych układów cyfrowych opisanych grafami należącymi do klasy grafów doskonałych daje się właściwie pokolorować w prosty sposób w czasie wielomianowym. Brak jest prostych algorytmu rozpoznawania grafów doskonałych metodą wyszukiwania nieparzystych dziur a istniejące metody sprowadzają problem do dekompozycji grafu na mniejsze części gdzie dokonywane są sprawdzenia własności, które są wykonywalne w czasie wielomianowym.

Algorytmy rozpoznawania grafów trójkątnych, porównywalności i interwałowych zostały zrealizowane praktycznie w formie biblioteki procedur z wykorzystaniem języka C. Jednocześnie trwają prace nad implementacją algorytmów wielomianowych rozpoznawania grafów przez wyszukiwanie dziur nieparzystych [5, 16].

6. Literatura

[1] Conforti M., Cornuejols G., Kapoor A., Vuškovič K., „Even-hole-free-graphs, Part II: Recognition algorithm", Journal of Graph Theory 40 (2002) 238-266
[2] Cornuéjols G., „The Strong Perfect Graph Conjecture"
[3] Cornuéjols G., „The Strong Perfect Graph Theorem"
[4] Cornuéjols G., Cunnigham W.H., „Compositions for perfect graphs", Discrete Mathematics 55 (1985) 245-254
[5] Cornuéjols G., Xinming L., Vuškovič K., "A polynomial algorithm for recognizing perfect graphs", Proceeding 44th Annual IEEE Symposium, 2003
[6] Coudert O., „Exact Coloring of Real-Life Graphs is Easy", Synopsys, Inc. 700 East Middlefield Rd., Moutain View, CA 94043, Proc. of the 34th Design Automation Conference DAC,, Anaheim, CA, USA, June 1997, pp. 121-126
[7] Giovani De Micheli: „Synteza i optymalizacja układów cyfrowych", Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998
[8] Golumbic M.C., „Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs", Courant Institute of Mathematical Science, New York University, Academic Press 1980
[9] Leuker G. S., "Interval graph algorithms. Ph. D. thesis", Princeton University
[10] Lovasz L., „A Characterization of Perfect Graphs", Journal of Combinatorial Theory (1972)
[11] Mielcarek K, „Grafy doskonałe jako alternatywa dla automatycznej syntezy i optymalizacji układów cyfrowych", Metody i systemy komputerowe w badaniach naukowych i projektowaniu inżynierskim : IV Krajowa Konferencja. Kraków, Polska, 2003, Oprogramowanie Naukowo-Techniczne, 2003
[12] Mielcarek Kamil, " Rozpoznawanie grafów doskonałych na potrzeby automatycznej syntezy układów cyfrowych", KNWS'06, Pomiary Automatyka Kontrola 6bis/2006
[13] Nikolopoulosy S. D., Paliosz L., "Hole and Antihole Detection in Graphs"
[14] International Electrotechnical Commission, "Programable controllers. Part 3 – Programing Languages IEC 1131-3"", Genewa, 1993
[15] Chudnovsky M., Cornuéjols G., Xinming L., Seymour P., Vuškovič K., "Cleaning for Bergeness", 2002
[16] Chudnovsky M., Cornuéjols G., Xinming L., Seymour P., Vuškovič K., „ Recognizing Berge Graphs", 2002
[17] Cornuéjols G., Cunnigham W.H., "Compositions for perfect graphs", Discrete Mathematics 55 (1985) 245-254

Artykuł recenzowany