

Elżbieta KAWECKA

UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Informatyki i Elektroniki

## Wpływ sygnału ditherowego o rozkładzie równomiernym na dokładność estymacji funkcji autokorelacji

Mgr inż. Elżbieta KAWECKA



Mgr inż. Elżbieta Kawecka pracuje w Instytucie Informatyki i Elektroniki Uniwersytetu Zielonogórskiego na stanowisku asystenta. W 2003 roku otworzyła przewód doktorski w dyscyplinie elektrotechnika. Tematem jej rozprawy doktorskiej jest Kształtowanie niepewności cyfrowych pomiarów korelacyjnych. Jest autorką lub współautorką 12 publikacji oraz materiałów konferencyjnych. Główne zainteresowania naukowe dotyczą zagadnień związanych z konwersją a-c z sygnałem ditherowym.

e-mail: e.kawecka@iie.uz.zgora.pl

### Streszczenie

Przedstawiono twierdzenia Widrowa i warunki odtwarzalności dla kwantowania. Dokonano analizy błędu obciążenia estymatora funkcji autokorelacji spowodowanego niespełnieniem warunków odtwarzalności dla kwantowania. Szczególną uwagę poświęcono sygnałowi harmonicznemu z ditherem o rozkładzie równomiernym. W artykule zaprezentowano oraz porównano wyniki badań wykonanych w programie Mathcad oraz wyniki badań symulacyjnych wykonanych z użyciem wirtualnego korelatora.

**Słowa kluczowe:** cyfrowe estymatory funkcji autokorelacji, przetwarzanie a-c z ditherem, dither o rozkładzie równomiernym.

### The influence of uniformly distributed dither on the accuracy of autocorrelation function estimation

#### Abstract

The quantizing theorems of Widrow and quantizing reconstruction conditions for the estimation of the autocorrelation function are presented. An analysis of the bias error of the autocorrelation function estimator, caused by non-satisfied quantizing reconstruction conditions, is carried out. Special attention is devoted to the harmonic signal with uniformly distributed dither. In this article some preliminary research results are presented and discussed. A comparison of bias of the autocorrelation function estimator modeled in Mathcad (Eq. 16, 17) and obtained of virtual correlator model (Eq. 21) is carried out.

**Keywords:** digital estimators of autocorrelation functions, a-c conversion with dither, uniformly distributed dither.

### 1. Wstęp

W systemach pomiarowych z cyfrowym algorytmem pomiaru wynikiem pomiaru jest wartość estymaty oraz wartość niepewności wyniku. Ocenę niepewności wyniku sprowadza się do oceny niepewności estymaty. Ponieważ elementem każdego systemu pomiarowego z cyfrowym algorytmem pomiaru jest przetwornik A/C, dokonuje się analizy oraz oceny wpływu konwersji a-c na niepewność wyniku pomiaru. Jedną z metod ograniczenia tego wpływu jest konwersja a-c z sygnałem *ditherowym* oraz uśrednianiem [1, 5].

Podczas konwersji a-c sygnał pomiarowy podlega próbkowaniu (dyskretyzacji w dziedzinie czasu) oraz kwantowaniu (dyskretyzacji w dziedzinie wartości). Ponieważ operacja próbkowania jest operacją liniową, rozważania na temat nieliniowości konwersji a-c można sprowadzić do rozważania nieliniowości operacji kwantowania [7].

Celem niniejszej pracy jest analiza wpływu kwantowania na dokładność wyznaczania wartości funkcji autokorelacji w zerze dla sygnału harmonicznego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym.

### 2. Warunki odtwarzalności funkcji autokorelacji

#### Podstawy teoretyczne

Za twórcę teorii kwantowania sygnałów uważany jest Widrow. Wykazał on, że operację kwantowania można rozważać jako próbkowanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa przetwarzanego sygnału. Zaletą takiego rozwiązania jest to, że próbkowanie staje się operacją liniową.

Przedstawienie teorii Widrowa wymaga wprowadzenia pojęcia funkcji charakterystycznej:

**Funkcja charakterystyczna**  $\Phi_x(v)$  jest transformatą Fouriera funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $p(x)$  do dziedziny  $v$  ze zmianą znaku. Dla sygnału  $x$  poddanego kwantowaniu jest ona równa [1]:

$$\Phi_x(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{jvx} dx = E[e^{jvx}]. \quad (1)$$

Twierdzenie teorii kwantowania Widrowa dotyczące odtwarzalności momentów sygnału ma postać [4]:

#### Twierdzenie

Jeżeli funkcja charakterystyczna ma ograniczoną dziedzinę, czyli gdy:

$$\Phi_x(v) = 0 \quad \text{dla} \quad |v| > \frac{2\pi}{q} - \varepsilon, \quad (2)$$

gdzie  $\varepsilon$  jest dowolnie małą liczbą dodatnią, to wszystkie istniejące momenty sygnału  $x$  mogą być odtworzone z momentów skwantowanego sygnału  $x_q$ .

Funkcja autokorelacji ergodycznego procesu  $\{x(t)\}$  może być wyrażona zależnością [1]:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt, \quad (3)$$

gdzie:  $x(t)$  jest realizacją procesu  $\{x(t)\}$ ,  $\tau$  – opóźnieniem, natomiast  $T$  – czasem obserwacji. Funkcja autokorelacji dla argumentu zerowego jest wartością średniokwadratową nazywaną w technice momentem rzędu drugiego [8]:

$$R_x(0) = \overline{x^2(t)}. \quad (4)$$

Dla uproszczenia, lecz bez wpływu na ogólność rozważań, założono, że  $x(t)$  ma zerową wartość średnią.

Zastosowanie konwersji a-c z *ditherem* w zastosowaniu do autokorelacji oznacza, że do sygnału  $x(t)$  dodawany jest dodatkowy sygnał  $d(t)$ , nazywany *ditherowym*. Uzyskany sygnał  $x_1(t)$  jest przetwarzany do postaci cyfrowej  $x_{1q}(i\Delta t)$ . Następnie jest on mnożony przez swoją kopię opóźnioną o  $k$  próbek, a wynik mnożenia jest uśredniany. Uzyskany w ten sposób estymator przyjmuje postać [1]:

$$\tilde{R}_x^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_{1q}(i) x_{1q}(i+k). \quad (5)$$

Zastosowanie *dithera* powoduje wzrost rozdzielczości kwantyzatora poprzez zmniejszenie zniekształceń nieliniowych wynikających z kwantowania, a także może prowadzić do zmniejszenia nieliniowości różniczkowej przetwornika [1]. Sygnałem *ditherowym* jest najczęściej losowy sygnał stacjonarny, niezależny od sygnału przetwarzanego, o parzystej funkcji gęstości prawdopodobieństwa lub rozkładu wartości i mający zerową wartość średnią.

Dokładność estymacji może być opisana za pomocą obciążenia estymatora, opisującego systematyczną składową błędów oraz wariancji, opisującej przypadkową składową błędów [1]:

$$b[\tilde{R}_x^d(k, M)] = E[\tilde{R}_x^d(k, M)] - R_x(k) \quad (6)$$

$$Var[\tilde{R}_x^d(k, M)] = E[\tilde{R}_x^d(k, M)]^2 - E^2[\tilde{R}_x^d(k, M)]. \quad (7)$$

W warunkach odtwarzalności dla kwantowania (spełnienia założeń twierdzenia Widrowa) wartość oczekiwana estymatora  $\tilde{R}_x^d(k, M)$  jest równa [1]:

$$E[\tilde{R}_x^d(k, M)] = \begin{cases} R_x(k) + R_d(k) + \frac{q^2}{12} & (k=0) \\ R_x(k) + R_d(k) & (k \neq 0) \end{cases} \quad (8)$$

W dalszej części artykułu zostanie omówiona sytuacja, kiedy sygnałowi harmonicznemu towarzyszy statystycznie niezależny sygnał *ditherowy* o rozkładzie równomiernym oraz zerowej wartości oczekiwanej.

### Względne obciążenie funkcji autokorelacji w zerze dla sygnału harmonicznego oraz sumy sygnałów: harmonicznego i *dithera* o rozkładzie równomiernym

Sygnałowi harmonicznemu o funkcji gęstości prawdopodobieństwa:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{A-x^2}}, & |x| \leq A \\ 0, & \text{poza tym} \end{cases} \quad (9)$$

odpowiada funkcja charakterystyczna o postaci [2, 3]:

$$\Phi_x(v) = J_0(A \cdot v), \quad (10)$$

gdzie  $J_i(A \cdot v)$  jest funkcją Bessel'a pierwszego rodzaju rzędu  $i$ . Natomiast sygnałowi o rozkładzie równomiernym i funkcji gęstości prawdopodobieństwa:

$$p_d(x) = \begin{cases} \frac{1}{2A_d}, & |x| \leq A_d \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases} \quad (11)$$

gdzie  $2A_d$  jest wartością międzyszczytową sygnału, odpowiada funkcja charakterystyczna postaci [3]:

$$\Phi_d(v) = \frac{\sin(A_d v)}{A_d v}. \quad (12)$$

Dla sygnału harmonicznego  $x(t)$  występującego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym  $x_d(t)$ , gdzie  $x(t)$  oraz  $x_d(t)$  są realizacjami statystycznie niezależnych procesów losowych, postać analityczna funkcji charakterystycznej  $\Phi_z(v)$  oraz wyrażenie na jej pochodną przyjmują postaci:

$$\Phi_z(v) = \Phi_x(v) \cdot \Phi_d(v) = J_0(Av) \cdot \frac{\sin(A_d v)}{A_d v} \quad (13)$$

$$\dot{\Phi}_z(v) = -J_1(A \cdot v) \cdot A \cdot \frac{\sin(A_d \cdot v)}{A_d \cdot v} + J_0(A \cdot v) \cdot \left( \frac{\cos(A_d \cdot v)}{v} - \frac{\sin(A_d \cdot v)}{A_d \cdot v^2} \right). \quad (14)$$

Ponieważ sygnał o rozkładzie równomiernym nie spełnia założeń teorii Widrowa [9], słuszna jest zależność:

$$E[\tilde{R}_x^d(0, M)] = E[x_{1,q}^2] = \frac{A^2}{2} + \frac{A_d^2}{3} + \frac{q^2}{12} + b, \quad (15)$$

gdzie  $b$  jest obciążeniem estymatora.

W wyniku prostych obliczeń matematycznych można wyznaczyć postać analityczną względnego obciążenia estymatora funkcji autokorelacji dla argumentu zerowego sygnału harmonicznego w funkcji  $A/q$  [1]:

$$\delta_h\left(\frac{A}{q}\right) = \frac{b}{0,5 \cdot A^2} = 4 \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} \left[ (-1)^i \cdot \left[ \frac{1}{\pi \cdot i} \cdot \left(\frac{A}{q}\right)^{-1} \cdot J_1(\beta) + \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{\pi \cdot i} \cdot \left(\frac{A}{q}\right)^{-1} \right]^2 \cdot J_1(\beta) \right] \right], \quad (16)$$

gdzie  $\beta = 2\pi \cdot i \cdot \frac{A}{q}$ .

W analogiczny sposób można uzyskać postać analityczną względnego obciążenia estymatora funkcji autokorelacji w zerze dla sumy sygnału harmonicznego i *dithera* o rozkładzie równomiernym w funkcji  $A_d/q$ :

$$\delta\left(\frac{A_d}{q}\right) = \frac{b}{0,5 \cdot A^2} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} \left[ (-1)^i \cdot J_0(\beta) \cdot \sin\left(2\pi \cdot i \cdot \frac{A_d}{q}\right) \cdot \left(\frac{1}{\pi \cdot i}\right)^2 \cdot \left(\frac{A}{q}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{A_d}{q}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{\pi \cdot i} - \frac{A_d}{q} \cdot \text{ctg}\left(2\pi \cdot i \cdot \frac{A_d}{q}\right) + \frac{A}{q} \cdot \frac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)}\right) \right], \quad (17)$$

### 3. Przebieg eksperymentu

W ramach eksperymentu zostały przeprowadzone obliczenia obciążenia w programie Mathcad oraz z użyciem wirtualnego korelatora na podstawie (16) i (17). Ponieważ w literaturze nie jest znana postać analityczna wariancji estymatora funkcji autokorelacji, do przeprowadzenia badań został wykorzystany tylko wirtualny korelator [6].

Badania symulacyjne przebiegały w ten sposób, że dla wirtualnego korelatora zostały wygenerowane sygnały harmoniczne o amplitudzie 8V i częstotliwości 1 kHz oraz *ditherowe* o rozkładzie równomiernym i zerowej wartości średniej. Wartość amplitudy *dithera* dobrano zgodnie z zależnością [3]:

$$A_d = k \cdot \frac{q}{2}, \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, 6. \quad (18)$$

Aby sygnał z *ditherem* nie przekroczył zakresu przetwornika dobrano maksymalną wartość generowanego sygnału zgodnie z zależnością:

$$U_{FS} = A + A_{d\_max} \quad (19)$$

gdzie  $A_{d\_max}$  jest maksymalną wartością amplitudy *dithera* równą  $3q$  oraz wzorem:

$$q = \frac{2 \cdot U_{FS}}{2^B} \quad (20)$$

gdzie:  $q$  jest krokiem kwantowania,  $U_{FS}$  – zakresem przetwarzania,  $B$  – liczbą bitów przetwornika bipolarnego. Eksperyment przeprowadzono dla następujących parametrów przetwarzania a-c:

- 6-bitowy przetwornik bipolarny A/C;
- częstotliwość próbkowania sygnału równa 16386 kHz,
- 16386 liczby próbek sygnału,
- liczba powtórzeń eksperymentu  $N = 10\,000$ .

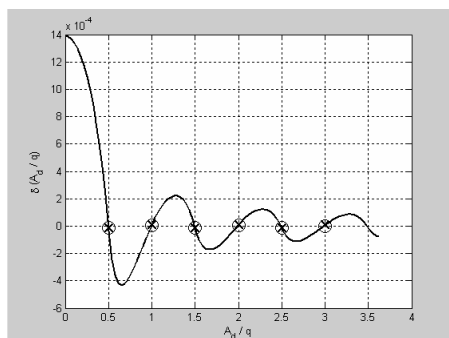
Po wprowadzeniu do wirtualnego korelatora obliczonych parametrów, dokonano pomiaru wartości względnego obciążenia określonego na podstawie zależności:

$$\delta\left(\frac{A_d}{q}\right) = \frac{\widetilde{R}_x^d(0, N) - \left(\frac{A^2}{2} + \frac{A_d^2}{3} + \frac{q^2}{12}\right)}{A^2/2}, \quad (21)$$

gdzie  $\widetilde{R}_x^d(0, N)$  jest średnią arytmetyczną z  $N$  wyników estymacji wartości funkcji autokorelacji.

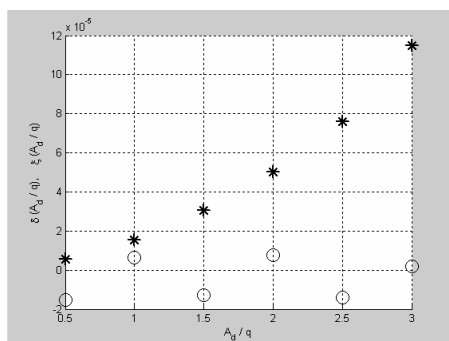
#### 4. Uzyskane wyniki oraz ich ocena

Na rys. 1 przedstawiono wyniki analiz matematycznych (16), (17) oraz badań symulacyjnych (21) dla przetwornika 6-bitowego. Parametry sygnałów i parametry przetwarzania a-c dobrano wg zależności przedstawionych w rozdziale 3. Względne obciążenie estymatora funkcji autokorelacji w zerze dla sumy sygnału harmonicznego i *dithera* o rozkładzie równomiernym, po uwzględnieniu poprawki Sheppard'a, dla  $\delta(0,5)$  wynosi  $-1,35 \cdot 10^{-3}$ , natomiast dla  $\delta(1)$  wynosi  $8,73 \cdot 10^{-6}$  (rys. 1).



Rys. 1. Względne obciążenie  $\delta(A_d/q)$  estymatora funkcji autokorelacji sygnału harmonicznego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym w funkcji  $A_d/q$ , przetwornik 6-bitowy. Wyniki uzyskane z: 'o' – wirtualnego korelatora, 'x' – Mathcad'a

Fig. 1. Relative bias  $\delta(A_d/q)$  of the autocorrelation function estimator of the harmonic signal with uniformly distributed *dither* as a function of  $A_d/q$ , 6-bit converter. Values obtained from: 'o' – virtual correlator; 'x' – Mathcad



Rys. 2. 'o' – Względne obciążenie estymatora  $\delta(A_d/q)$  oraz '\*' – względna niepewność standardowa typu A  $\xi(A_d/q)$  funkcji autokorelacji sygnału harmonicznego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym w funkcji  $A_d/q$ , uzyskane z wirtualnego korelatora, przetwornik 6-bitowy

Fig. 2. 'o' – Relative bias of the autocorrelation function estimator  $\delta(A_d/q)$  and '\*' – relative A-type standard uncertainty of the autocorrelation function estimator  $\xi(A_d/q)$  of the harmonic signal with uniformly distributed *dither* as a function of  $A_d/q$ , obtained from virtual correlator, 6-bit converter

Zgodnie z przewidywaniem, wzrost wartości  $A_d/q$  powoduje wzrost względnej niepewności standardowej typu A (22), przy niewielkiej zmianie wartości obciążenia.

$$\xi = \frac{\sqrt{\text{Var} \tilde{\Psi}}}{\Psi} \quad (22)$$

Optymalne jest więc przyjęcie  $A_d/q = 0,5$ , dla której wartość (22) jest najmniejsza.

W tabeli 1 przedstawiono wartości względnego obciążenia (16), (17) obliczonego w programie Mathcad dla  $A_d/q = 0,5$ ,  $B$ -bitowych przetworników oraz różnych poziomów sygnału *ditherowego*. Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że kwantowanie z sygnałem *ditherowym* o rozkładzie równomiernym znacząco wpływa na zmniejszenie wartości względnego obciążenia  $\delta(A_d/q)$  (porównaj kol. 2 i 3). Podczas przeprowadzania eksperymentu wartość amplitudy *dithera* dobrano zgodnie z (18). Jednak ze względu na kształt funkcji  $\delta(A_d/q)$  zmiana poziomu sygnału *ditherowego* już o 1% może znacznie wpływać na wartość obciążenia (rys. 1, tab. 1).

Tab. 1. Względne obciążenie  $\delta(A_d/q)$  obliczone dla różnych wartości  $A_d$   
Tab. 1. Relative bias  $\delta(A_d/q)$  calculated for different values of  $A_d$

B	$\delta(A_d/q)$			
	$A_d=0$	$A_d$	$A_d + 1\%A_d$	$A_d - 1\%A_d$
3	$-1,07 \cdot 10^{-1}$	$1,72 \cdot 10^{-3}$	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$1,42 \cdot 10^{-3}$
6	$-3,92 \cdot 10^{-3}$	$7,1 \cdot 10^{-6}$	$1,92 \cdot 10^{-5}$	$-5,26 \cdot 10^{-6}$
8	$-4,81 \cdot 10^{-4}$	$2,15 \cdot 10^{-7}$	$1,72 \cdot 10^{-6}$	$-1,32 \cdot 10^{-8}$
12	$-7,46 \cdot 10^{-6}$	$2,09 \cdot 10^{-10}$	$2,36 \cdot 10^{-8}$	$-2,37 \cdot 10^{-8}$
16	$-1,17 \cdot 10^{-7}$	$2,04 \cdot 10^{-13}$	$3,66 \cdot 10^{-10}$	$-3,73 \cdot 10^{-10}$

#### 5. Podsumowanie

Konwersja a-c z sygnałem *ditherowym* i z uśrednianiem jest obecnie jednym ze sposobów ograniczania niepewności wyniku pomiaru. Dodanie sygnału *ditherowego* do sygnału przetwarzanego przed jego skwantowaniem zmienia właściwości operacji kwantowania, a także stwarza możliwość ich kontroli i formowania.

Pomimo, że sygnał *ditherowy* mający funkcję charakterystyczną o rozkładzie równomiernym, nie spełnia warunku odtwarzalności dla kwantowania wg Widrowa, to dodanie go do przetwarzanego sygnału harmonicznego może obniżyć wartość względnego obciążenia. Analityczne modele błędów estymacji określonej cyfrowo funkcji autokorelacji są dość złożone. Dodatkowo w literaturze nie jest znana postać analityczna względnego obciążenia estymatora funkcji autokorelacji. W tej sytuacji zastosowano opracowany przez autora wirtualny korelator [6], dzięki któremu dobrano optymalną wartość stosunku amplitudy *dithera* do kroku kwantowania przetwornika ze względu na kryterium, wyznaczonej symulacyjnie, względnej niepewności standardowej typu A. Zaprezentowane w artykule rezultaty analiz matematycznych są zbliżone z wynikami badań symulacyjnych (rys. 1).

#### 6. Literatura

- [1] Lal-Jadziak J.: Kształtowanie dokładności w pomiarach korelacyjnych, Seria Monografie, nr 101, Wyd. Politechniki Zielonogórskiej, Zielona Góra 2001.
- [2] Mariano J. L. Ramos H. G.: Validity of Widrow's model for sinusoidal signals, Measurement 39, 2005.
- [3] Lal-Jadziak J.: Wpływ kwantowania na dokładność estymacji wartości średniokwadratowej, Pomiary Automatyka Kontrola nr 7/8 2002.
- [4] Widrow B., Kollar I., Liu M.-C.: Statistical theory of quantization, IEEE Trans. Instrum. Meas., 1996, vol. 45. no. 2, s. 353-361.
- [5] Domańska A.: Optymalizacja parametrów konwersji a-c z sygnałem *ditherowym* i uśrednianiem według kryterium wariancji błędu kwantowania, Pomiary Automatyka Kontrola nr 7/8 2006.
- [6] Kawecka E.: Zastosowanie modelu wirtualnego korelatora do oceny niepewności cyfrowych estymatorów funkcji korelacyjnych, Pomiary Automatyka Kontrola nr 6 2006.
- [7] Domańska A.: Konwersja a-c z ograniczeniem zmian widma sygnału po-miarowego, V Szkoła-Konferencja Metrologia Wspomagana Komputerowo, 21-24 maj 2001, Rynia k/Warszawy.
- [8] Jaworski J.: Matematyczne podstawy metrologii, WNT, 1979.
- [9] Kollar I.: Bias of mean value and mean square value measurements based on quantized data, IEEE Trans. Instrum. Meas., 1994, vol. 43. no. 5, s. 733-739.