Dorota CENDROWSKA
POLSKO-JAPOŃSKA WYŻSZA SZKOŁA TECHNIK KOMPUTEROWYCH, WARSZAWA

Co tkwi we wzorach matematycznych: rzemiosło czy sztuka?

Dr inż. Dorota CENDROWSKA

Adiunkt w Katedrze Systemów Inteligentnych PJWSTK w Warszawie. Jednym z obszarów zainteresowań autorki jest typografia, który uwzględniając jej „zacięcie” dydaktyczne łączy się z popularyzowaniem wiedzy z zakresu składu tekstu.

e-mail: dorota.cendrowska@pjwstk.edu.pl

Streszczenie

Ludzie zajmujący się nauką nie są już tylko autorami. Stali się członkami jednoosobowych zespołów zajmujących się również stroną techniczną redagowanych przez siebie prac. W artykule tym wspomniano, jak bardzo zmienił się świat ludzi składających wzory. Podano podstawowe zasady składu wzorów matematycznych oraz przedstawiono typowe błędy.

Słowa kluczowe: typografia, skład wzorów matematycznych.

Inside Mathematical Formulas: Craft or Art?

Abstract

No longer scientists are only authors. They have unconsciously become also members of one-man-teams who have to care how their work looks like. In this paper, basic rules of typesetting concerning mathematical formulas are described. There are presented some typical mistakes which are done while typesetting maths.

Keywords: typography, maths typesetting.

1. Wstęp

Gdzie znajduje się granica między rzemiosłem a sztuką? Kiedy człowiek przestaje być rzemieślnikiem a zaczyna być artystą? Wydawać by się mogło, że naukowcy i studenci nauk technicznych nie muszą zadawać sobie takich pytań, ponieważ ze sztuką niewiele mają wspólnego, może poza specyficznym wizerunkiem ujętym w słowach piosenki „Okularnicy” Agnieszki Osieckiej. Nie da się ukryć, że wśród prac owej społeczności brak porywających opisów przyrody czy nagłych zwrotów akcji. Mimo to wiele z tych prac, choć wymagających, jest wyjątkowo ciekawych.

Bez względu na dziedzinę, specjalizację i wąski obszar badań pracowników nauk technicznych, wspólny element — można by rzec: wspólny mianownik — stanowią wzory matematyczne.

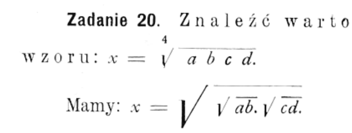
Zwykle postrzegane są przez pryzmat sensu ich istnienia czy potrzeby wykorzystania. Wzory służą do przedstawiania aktualnego stanu pola bitwy, do prowadzenia czytelnika konkretną ścieżką lub do próby przekonania go o słuszności naszych rozważań. Wzory są też mile widziane jako wnioski i kierunkowskazy do kolejnych podróży naukowych.

Żyjąc w dzisiejszym świecie ludzie zajmujący się nauką stali się już nie tylko autorami artykułów, ale również osobami, które te publikacje składają i redagują. Z tego też powodu celem tego artykułu jest namówienie Państwa na inne spojrzenie na wzory matematyczne. Przewrotnie, mniej nas będzie interesować ich sens a dużo bardziej ich wygląd. Typografia traktowana jako zbiór wielowiekowych doświadczeń drukarskich, określa nie tylko jak należy składać wybrane fragmenty tekstu np. nagłówki, cytaty, przypisy, ale również podaje „recepturki” na poprawne i czytelne złożenie wzorów matematycznych. Przyjrzymy się więc typowym błędom popełnianym podczas składania wzorów.

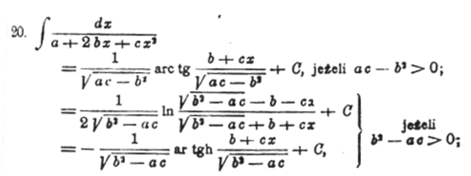
Wszystko to po to, aby pokazać, że dbając o czytelnika naszych prac, poza tym, że jesteśmy twórcami artykułu, stajemy się również artystami. Artyści, być może, tworzą nikomu nie potrzebne piękno. Nie każdy będzie w stanie docenić piękno Państwa wzorów zarówno pod względem merytorycznym czy wizualnym, ale przecież piękno tworzy się, by było piękniej wokół nas. Czego sobie i Państwu życzę.

2. Wzory matematyczne — teoria i... czas

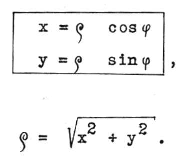
Przeglądanie starszych podręczników, skryptów czy książek, zawierających wzory matematyczne, nieuchronnie prowadzi do odkrycia, jak bardzo składanie wzorów zmieniło się w przeciągu ostatnich kilkudziesięciu lat. Za przykład niech posłużą wzory zamieszczone na rysunkach 1–5, których źródłem są publikacje [4, 5, 6, 7]. W sposobie złożenia wszystkich tych wzorów można dostrzec niezatarte ślady ówcześnie „kłopotliwych” elementów we wzorach np. symbolu pierwiastka czy liter z alfabetu greckiego oraz proponowane rozwiązania tych problemów.



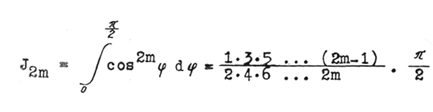
Rys. 1. Przykład wzoru matematycznego z książki wydanej w 1916 [6]
Fig. 1. An example of a mathematical formula published in 1916 [6]



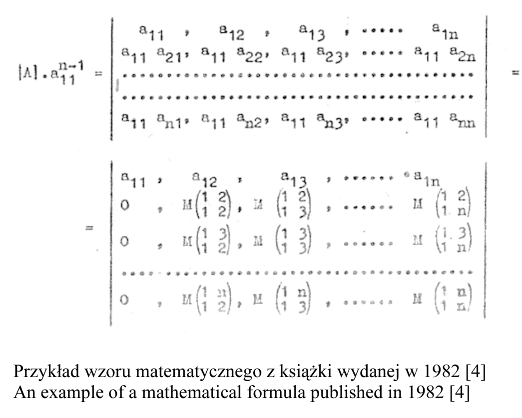
Rys. 2. Przykład wzoru matematycznego z książki wydanej w 1946 [7]
Fig. 2. An example of a mathematical formula published in 1946 [7]



Rys. 3. Przykład wzoru matematycznego z książki wydanej w 1960 [5]
Fig. 3. An example of a mathematical formula published in 1960 [5]



Rys. 4. Przykład wzoru matematycznego z książki wydanej w 1960 [5]
Fig. 4. An example of a mathematical formula published in 1960 [5]



Rys. 5. Przykład wzoru matematycznego z książki wydanej w 1982 [4]
Fig. 5. An example of a mathematical formula published in 1982 [4]

Najbardziej jaskrawe różnice widać we wzorach zaczerpniętych ze skryptu przedstawione na rysunkach 3–5. Oczywistymi ograniczeniami związanymi z narzędziem, jakim była maszyna do pisania, dotyczyły braku symboli matematycznych oraz dostępności tylko jednego kroju pisma. Oznaczało to m.in. brak skalowalnych wskaźników dolnych, górnych, brak pochylenia symboli, zastępcze sposoby umieszczania symboli z alfabetu greckiego. Przykłady te zostały przedstawione, aby czarno na białym pokazać, że dzisiejsze możliwości składania wzorów są niebywale bardziej zaawansowane i dostępne każdemu. To czego jednak edytory za nas zrobić nie mogą to, zadbanie o to, by wzory były nie tylko możliwe do napisania, ale aby były czytelne.

W przypadku tekstu ciągłego z łatwością dostrzec można różne elementy np.: tytuły, śródtytuły czy cytowania. Celem ich wyróżniania jest zwiększenie czytelności tekstu czy umożliwienie czytelnikowi sprawne „poruszanie się” po publikacji. Podobnie rzecz się ma w przypadku wzorów matematycznych.

Wśród zasad składu tekstu dotyczących składania wzorów matematycznych są te, które dotyczą całych wzorów, jak i ich poszczególnych elementów [8]. I tak, wzory składa się tym samym krojem pisma (dotyczy to również stopnia pisma). Odstępstwem od tej reguły jest zastosowanie innego kroju w przypadku, gdy tekst podstawowy składany jest czcionką zawierającą cyfry nautyczne.

W większości przypadków wzory są utożsamiane z czcionką pochyloną. Tymczasem tylko symbole oznaczające stałe i zmienne składane są tą odmianą pisma. W celu łatwiejszej identyfikacji symboli oznaczających wartości skalarne od tych symboli, pod którymi „ukrywają się” macierze czy wektory przyjęto, że te ostatnie składane są nie tylko czcionką pochyloną, ale dodatkowo są wytłuszczone. Istnieje cała plejada elementów we wzorach, których nie należy składać kursywą, zaczynając od nawiasów czy symboli lub skrótów nazw jednostek miary lub wielkości fizycznych. Omówione do tej pory zasady przedstawiono w przykładzie (1).

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=d\boldsymbol{A},\quad c=300\,000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \tag{1}$$

Kursywy nie stosujemy również w tych elementach wzoru, które stanowią opis słowny — patrz wzór (2) — gdzie „*dla*”, to słowo, a nie iloczyn trzech niewiadomych *d*, *l* i *a*.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{dla } x<1\\ 1 & \text{dla } x=1\\ \dfrac{2x}{x^2+1} & \text{dla } x>1\end{cases} \tag{2}$$

Może się to wydać dziwne, pismem prostym składane są również skróty i oznaczenia matematyczne np.: *cos*, *const*, *exp*, *max* itp., pomimo że są integralną częścią matematycznego świata i zwykle nie są spotkane w tekście ciągłym książek beletrystycznych. Przykład stanowią wyrażenia umieszczone we wzorze (3).

$$k=\min_i f(x_i)=\max_j g(x_j),\quad x=\log\left(\exp\left(x\right)\right) \tag{3}$$

Współistnienie obok siebie jednocześnie fragmentów wzorów, które naprzemiennie składane są krojem prostym i pochylonym niezmiennie musiałoby prowadzić do cichych wojen terytorialnych — symbole zajmują przestrzeń należącą do sąsiadujących symboli. Z tego powodu wprowadzono zasady umieszczania dodatkowych odstępów pomiędzy elementami wzorów. Przykład niepoprawnie złożonego wzoru przedstawiono w (4) oraz jego poprawioną wersję w (5).

2!*j*+3!*y*+77*T*(*a*+*b*) (4)

$$2!\,j+3!\,y+77T(a+b) \tag{5}$$

W ten sposób doszliśmy do najciekawszej części dotyczącej roli odstępów we wzorach matematycznych. Jest z nimi podobnie jak z kulturą, o której mawia się, że nie wiadomo czym jest, ale doskonale widać gdy jej brak. Omówmy więc pokrótce najbardziej podstawowe zasady związane z odstępami we wzorach.

Odstępy wielkości 1 punktu wstawia się pomiędzy oznaczenia matematyczne składane czcionką prostą a liczbami lub symbolami je reprezentujące (6). Taki sam odstęp wstawiany jest również:

- pomiędzy liczbami a nawiasami otwierającymi (7);
- przed nawiasem otwierającym i po nawiasie zamykającym, jeżeli brak jest znaków działań odpowiednio przed i po nawiasie (7);
- pomiędzy następującymi po sobie oznaczeniami matematycznymi (8);
- przed przecinkami użytymi jako znaki matematyczne (9);
- przed operatorami funkcyjnymi (9).

$$4\cos\beta+\sin 17+4!\,\alpha \tag{6}$$

$$3\left(a+b\right)+5x\left(a-b\right) \tag{7}$$

$$\arcsin\left(\alpha+\beta\right) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{a}=\left[\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}\right],\quad c=x\,f(\boldsymbol{a}) \tag{9}$$

Odstępy wielkości 2 punktów wstawiany powinien być:

- po przecinkach użytych jako znaki matematyczne (9);
- pomiędzy dwa odwrotne nawiasy (10);
- przed i po wielokropku (10);

$$\left(1+2\right)\left(n+\left(n-1\right)\right)+\ \ldots\ +\left(\left(n-1\right)+n\right)\left(2+1\right) \tag{10}$$

Tak wyglądają najważniejsze z istotnych fragmentów sztuki prawidłowego składania wzorów, której przyświeca szacunek dla odbiorcy, co nie jest bez znaczenia, gdy w pracy sześćdziesięciostronicowej znajdziemy dwadzieścia pięć stron skąpo komentowanych wzorów. Jak wygląda praktyka?

Większość z tych zasad zwykle jest automatycznie wprowadzana w czyn podczas edytowania wzoru, bez względu na to, czy osoba składająca tę wiedzę posiada, czy też nie.

Jednak zastosowanie niektórych zasad oznacza świadomie wykonaną dodatkową pracę. Podkreślić należy, że jak pokażemy w kolejnych częściach artykułu nie ma edytora, który byłby od tych braków całkowicie wolny.

3. Typowe błędy — MICROSOFT WORD

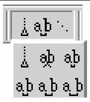
Podstawowy błąd związany z tym edytorem nie dotyczy bezpośrednio wzorów matematycznych, choć kładzie się na nich długim cieniem. Błąd ten dotyczy polskiej niepodważalnej pewności, że edytor ten nie ma przed nami żadnych tajemnic. To, w połączeniu z polską zaradnością daje niebywałe efekty „radzenia sobie”, gdy przyjdzie się zmierzyć z umieszczaniem wzorów matematycznych w tekście.

Tymczasem potrzebujemy zaledwie dwóch akapitów, aby wskazać te miejsca, których znajomość w pełni wystarcza, aby bez zbędnego nakładu czasu stosować, omówione w punkcie 2, zasady.

Podaliśmy już, że fragmenty wzoru mogą pełnić różną rolę: być nazwą niewiadomej, stałej, wektora czy być fragmentem niezbędnego opisu. O sposobie składania tych elementów (rodzaj czcionki, ew. pochylenie, wytłuszczenie) możemy zadecydować wybierając z menu edytora równań opcje *Styl/Definiuj*. Sama decyzja w tym względzie nie wystarczy jednak, aby edytor wiedział, które elementy wzoru jaką pełnią rolę. Domyślnie, wszystkie symbole, które wprowadzano z klawiatury, są traktowane jako niewiadoma, czyli w taki sposób, jakby przedtem wybrano z menu edytora równań opcje: *Styl/Matematyka*. „Domyślność” tę jednak możemy zmieniać w trakcie wprowadzania wzoru wybierając odpowiednio dla oznaczenia macierzy *Styl/Macierz-Wektor* lub umożliwiając wprowadzenie opisu po wybraniu *Styl/Tekst*.

W edytorze tym dostępne są cztery odstępy dodatnie i jeden odstęp ujemny, który umożliwia zbliżanie do siebie sąsiadujących ze sobą symboli. Wszystkie dostępne są na pasku narzędziowym. Interesujący nas jego fragment przedstawiono w tabeli 1. Zilustrowano również użycie każdego z odstępów we wzorze (11). Dla porównania, wyrażenie *ab* obrysowane linią, to standardowy odstęp międzyznakowy w edytorze równań.

Tab. 1. Odstępy we wzorach matematycznych
Tab. 1. TeX commands for different types of spaces

menu	przykłady użycia (examples of use)
	$ab \;\; \boxed{ab},\;\; ab,\;\; a\,b,\;\; a\:b,\;\; a\;\;b \qquad (11)$

4. Typowe błędy w świecie TEX-a

Najbardziej typowym błędem jest myślenie, że wzory złożone w TeXu (LaTeXu lub innej odmianie TeXa) są zawsze składane perfekcyjnie i użytkownik może czuć się całkowicie zwolniony z tego, o czym pisaliśmy w części drugiej. Błędy, choć w innym zakresie, nie omijają nas również w przypadku tego narzędzia i dotyczą tego, czego nie widać, czyli odstępów.

Tymczasem w TeXu są do dyspozycji cztery rodzaje odstępów, w tym jeden ujemny. Odpowiadające im instrukcje przedstawiono w tabeli 2. Poza przykładami podanymi do tej pory, które również w TeXu zostałyby w przeważającej większości złożone niepoprawnie, na rysunku 6. zamieszczono nowe proste przykłady ilustrujące automatyczny sposób złożenia tych wzorów w TeX-u oraz efekt, który chcielibyśmy uzyskać.

Tab. 2. Instrukcje TeXa dot. odstępów we wzorach matematycznych
Tab. 2. TeX commands for different types of spaces

instrukcja	znaczenie (description)
`\,`	3/18 rozmiaru aktualnie używanej czcionki
`\:`	4/18 rozmiaru aktualnie używanej czcionki
`\;`	5/18 rozmiaru aktualnie używanej czcionki
`\!`	–3/18 rozmiaru aktualnie używanej czcionki

jest	**chcielibyśmy, by było**
$x=1,2,\dots,k-1,k$	$x=1,\:2,\:\dots,\:k\!-\!1,\!k$
$x_i^2+y_j^2=?$	$x_i^2+y_j^2=\;\,?$
$\sqrt{\log x}$	$\sqrt{\,\log x}$
$\sqrt{2}x$	$\sqrt{2}\,x$
$\int\int_D dxdy$	$\int\!\!\int_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

Rys. 6. Rzeczywistość i życzenia w składzie wzorów w TeXu
Fig. 6. Wishes and reality — mathematical formulas in TeX

Nie pozostaje już nic innego jak bez zbędnego rozpisywania się zwrócić Państwa uwagę na te miejsca, w których poprawimy troszeczkę TeXa. Kod źródłowy zawarto w tabeli 3.

Tab. 3. Instrukcje TeXa dot. odstępów we wzorach matematycznych
Tab. 3. TeX commands for different types of spaces

efekt	kod
$x=1,\:2,\:\dots,\:k\!-\!1,\!k$	`$x=1,\:2,\:\dots,\:k\!-\!1,\!k$`
$x_i^2+y_j^2=\;\,?$	`$x_1^2+y_j^2=\;\,?$`
$\sqrt{\,\log x}$	`$sqrt{\,\log x}$`
$\sqrt{2}\,x$	`$sqrt{2}\,x$`
$\int\!\!\int_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$	`$\int\!\!\int_D \mbox{d}x\, \mbox{d}y$`

5. Inter-edytorski problem

Choć można dyskutować o wyższości jednych edytorów nad drugimi to, mimo to zawsze znajdzie się w życiu jakiś problem, który nie jest w ogóle rozwiązywany automatycznie. Rzec należy: i całe szczęście! Wymaga to jednak pewnej umowy między członkami społeczności żyjącymi na co dzień w cieniu takiego problemu.

Za przykład posłuży nam łamanie „długich wzorów", czyli takich, które nie mieszczą się w jednym wierszu i jesteśmy zmuszeni do ich podziału na kilka krótszych wierszy. Wzory, które w ten sposób powstają nazywane są wielowierszowymi. Powstaje też uzasadnione pytanie: jak łamać takie wzory?

Otóż, przyjęto [8], że wzory przenosi się na znakach relacji. Jeśli jest to konieczne, wzór możemy również przenieść na znakach działań. W obu przypadkach znak pochodzący z końca wiersza należy powtórzyć na początku następnego wiersza. Jeżeli wzór jest dzielony na znaku mnożenia, to jako symbolu oznaczającego mnożenie należy umieścić skośny krzyżyk (×). W celu zwiększenia czytelności dopuszcza się, aby znaki działań lub relacji znajdujące się na początkach wierszy stanowiły jeden pion. Zilustrowano to schematem wzoru (12).

$$
\begin{aligned}
\ldots\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

Nieznajomość wspomnianych zasad łamania wzorów wielowierszowych może prowadzić do nieporozumień, gdy działanie jest „czułe" na powtórzenia np. odejmowanie — narzędzie, jakie jest używane do składania wzorów, jest w tym przypadku zupełnie drugorzędne.

6. Podsumowanie

Wierząc, że na tych skromnych trzech stronach znaleźli Państwo dla siebie coś nowego i użytecznego pozostaje już tylko zadać zagadkę. Ile we wzorze (13) popełniono błędów. Należy dodać, że nie jest to „zwykły" wzór wymyślony na potrzeby tego artykułu, to „żyjący" wzór, zdobyty od studentów mających czasem do zdania jakieś *colloquium*.

$$
f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1} & dla \quad x<-1 \\ ax+b \quad dla & -1\le x<2 \\ \arccos(x-2) & dla \quad 2\le x\le 3 \end{cases} \qquad (13)
$$

„Dla treningu" można również złożyć wzór z rys. 2 wykorzystując każdy z używanych przez Państwa edytorów. Ile zasad, o których pisaliśmy zostało w nim poprawnie zastosowanych, o których zapomniano składając wzór (13)?

Choć przytoczone przykłady ilustrują raczej, że w składaniu wzorów jest dużo rzemiosła, to pozostaje mieć nadzieję, że przyznają Państwo, że można znaleźć w nich również choć odrobinę sztuki, zwłaszcza gdy w ich złożenie włożymy trochę serca, bo mała różnica czyni dużą różnicę.

7. Literatura

[1] Cendrowska D.: Zrób to lepiej! O sztuce komputerowego składu tekstu, PWN, Warszawa 2006.
[2] Chwałowski R.: Typografia typowej książki, Helion, Gliwice 2002.
[3] Kopka H., Daly P. W.: A Guide to LaTeX, Addision-Wesley, 1999.
[4] Turowicz A.: Teoria macierzy, Wydawnictwo AGH, Kraków 1982.
[5] Wrona W.: Matematyka, cz. IV, zeszyt 1, Politechnika Warszawska, 1960.
[6] Zydler J.: Geometrya w zakresie szkoły średniej, Wydawnictwo M. Arcta, Warszawa 1916.
[7] Praca zbiorowa, Technik, podręcznik dla inżynierów, Tom I, P. Wodziański (wydawca), Londyn 1946.
[8] Norma BN-65/7440-05, Zasady składania wzorów matematycznych.

Artykuł recenzowany