

Przemysław ORŁOWSKI

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA, INSTYTUT AUTOMATYKI PRZEMYSŁOWEJ

Zastosowania dekompozycji SVD-DFT Część 2: Analiza stabilności układów niestacjonarnych w sprzężeniu zwrotnym

Dr inż. Przemysław ORŁOWSKI

Uzyskał dyplomy magistra inżyniera elektronika oraz magistra inżyniera elektryka w roku 1999 na Wydziale Elektrycznym Politechniki Szczecińskiej. Stopień naukowy doktora nauk technicznych uzyskał na tym samym Wydziale w roku 2002. Obecnie adiunkt w Instytucie Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej. Główne kierunki badań naukowych to analiza i synteza układów sterowania, w szczególności układy dyskretne, układy niestacjonarne i układy niepewne.



e-mail: orzel@ps.pl

Streszczenie

Głównym celem niniejszej pracy jest rozszerzenie kryterium Nyquista do badania stabilności układów niestacjonarnych, dyskretnych w sprzężeniu zwrotnym. Rozważania niniejsze rozpoczyna krótki przegląd literatury, oraz przywołanie modelu układu i aproksymowanych charakterystyk Bode'go z części pierwszej artykułu. W dalszej części pracy przytoczono definicje stabilności dla układów niestacjonarnych w otwartej pętli oraz podano twierdzenie pozwalające na określanie stabilności układu niestacjonarnego na podstawie aproksymowanych charakterystyk Bode'go. Wypracowane wyniki uzupełniają szczegółowe wyjaśnienia oraz ilustrują przykłady numeryczne.

Słowa kluczowe: układy dyskretne, układy niestacjonarne, układy zmiennej struktury, analiza stabilności, analiza częstotliwościowa, skończony horyzont czasowy.

Applications of SVD-DFT decomposition Part 2: Feedback stability analysis for time-varying systems

Abstract

The paper concerns on extending the classical Nyquist theorem to stability analysis of linear time-varying discrete-time feedback control systems. We begin from short literature review, model description and approximated Bode diagrams recalled from the first part of the article. Further we present stability concepts for open loop time-varying systems and then we state theorem for determining feedback stability of time-varying systems. Theoretical considerations are complemented with detailed justification and numerical examples.

Keywords: discrete-time systems, time-varying systems, non-stationary systems, stability analysis, finite time horizon, frequency analysis.

1. Wprowadzenie

Metody do badania stabilności oraz projektowania układów stacjonarnych liniowych w oparciu o zapas amplitudy i fazy są szeroko znane i stosowane. Niemniej analogiczne zagadnienia związane z analizą oraz wyznaczaniem zapasu stabilności dla układów niestacjonarnych są w literaturze nieobecne. Spotykane metody badania stabilności są najczęściej adaptacją metod dla układów nieliniowych i bazują na podejściu czasowym - kryterium Lapunova [1-5]. Podstawową własnością układów niestacjonarnych jest fakt, iż układ taki złożony z przełączających się układów stacjonarnych stabilnych, może być niestabilny. Niestabilność może się pojawić w przypadku nieskończonej ilości przełączeń. Przykład układu zmiennego w czasie, posiadającego niezmiennę w czasie wartość własną, znajdujące się we wnętrzu okręgu jednostkowego, które nie gwarantują stabilności został podany w pracach [4, 5]. Problematyka operacji przełączających cieszy się

rosnącym zainteresowaniem w sterowaniu adaptacyjnym i predykcyjnym.

Głównym celem niniejszej pracy jest pokazanie możliwości wykorzystania podejścia częstotliwościowego do analizy stabilności zewnętrznej, tj. stabilności układu ze sprzężeniem zwrotnym oraz wyznaczania zapasu stabilności dla układów niestacjonarnych. Podstawowym narzędziem są omówione w pierwszej części artykułu przybliżone charakterystyki Bodego wyznaczane metodą SVD-DFT oraz analogie występujące w odniesieniu do klasycznego kryterium Nyquista.

2. Model matematyczny

Niech model układu będzie dany w formie identycznej jak w pierwszej części artykułu [6] tj. w następującej postaci:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \cdot \mathbf{v}(k), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \cdot \mathbf{x}(k), \quad k \in \{0, \dots, N-1\}, \quad \mathbf{x}_p(0) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

gdzie

$\{\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n, k \in \{0, \dots, N-1\}\}$ jest stanem,

$\{\mathbf{v}(k) \in \mathbf{R}^m, k \in \{0, \dots, N-1\}\}$ jest sterowaniem,

$\{\mathbf{y}(k) \in \mathbf{R}^p, k \in \{0, \dots, N-1\}\}$ jest wyjściem.

Macierze układu są określone następująco

$$\{\mathbf{A}(k) \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{B}(k) \in \mathbf{R}^{n \times m}, \mathbf{C}(k) \in \mathbf{R}^{p \times n}, k \in \{0, \dots, N-1\}\}.$$

Charakterystyki amplitudowa i fazowa dane są następującymi zależnościami

$$|G(\omega_k)| = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N \sigma_j^2 \cdot |\text{DFT}_k[\mathbf{u}_j]|^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left| \sigma_i \cdot \sum_{n=1}^N u_{ni} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot (n-1) / N} \right|^2} \quad (3)$$

$$\varphi(\omega_k) = \arg \left(\sum_{j=1}^N \sigma_j \cdot \frac{\text{DFT}_k[\mathbf{u}_j]}{\text{DFT}_k[\mathbf{v}_j]} \right) = \arg \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{\sigma_i \cdot \sum_{n=1}^N u_{ni} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot (n-1) / N}}{\sum_{n=1}^N v_{ni} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot (n-1) / N}} \right) \right) \quad (4)$$

3. Stabilność układu otwartego

Stabilność układu niestacjonarnego można zdefiniować przez analogię do układów stacjonarnych. Można tu rozróżnić 2 typy stabilności: wejściowo-wyjściową oraz asymptotyczną.

Układ liniowy jest stabilny w sensie wejściowo-wyjściowym jeżeli operator $\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}$ jest ograniczonym operatorem z \mathbf{V} do \mathbf{Y} . Definicja ta może być stosowana tylko dla operatorów określonych na nieskończonym horyzoncie czasowym. Ponieważ operator $\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}$ dla układu (1-2) jest określony na skończonym horyzoncie czasowym, zatem jest on zawsze ograniczony.

Układ jest stabilny asymptotycznie jeżeli operator ewolucyjny $\Phi(k, i) = \mathbf{A}(k) \cdot \mathbf{A}(k-1) \cdot \dots \cdot \mathbf{A}(i)$ jest eksponentalnie stabilny tzn.,

$\|\Phi(k, i)\| \leq M \cdot e^{-\beta(k-i)}$ dla pewnych dodatnich parametrów $\beta > 0$, $M > 0$ i dla wszystkich $k \geq i$.

Do określania stabilności układów niestacjonarnych wykorzystuje się zazwyczaj stabilność asymptotyczną [7, 8].

Układ niestacjonarny jest asymptotycznie stabilny jeżeli spełniony jest następujący warunek:

$$\Phi(k, k_0) \rightarrow 0 \text{ dla } k \rightarrow \infty \quad (5)$$

Implikuje on, że dla dowolnych niezerowych warunków początkowych odpowiedź swobodna układu asymptotycznie stabilnego osiągnie zero po nieskończonej długim czasie $k \rightarrow \infty$. Warunek ten jest spełniony jeżeli wszystkie wartości własne operatora ewolucyjnego $\Phi(k, k_0)$, $k > k_0$, znajdują się wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej, tzn. $|\lambda_i(k)| < 1$ dla wszystkich i oraz k . W przypadku gdy dla pewnych k, i wartości własne operatora $\Phi(k, k_0)$ znajdują się na zewnątrz okręgu jednostkowego, układ może być momentami niestabilny.

4. Stabilność układów niestacjonarnych w sprzężeniu zwrotnym - analogia do kryterium Nyquista

Stabilność układów niestacjonarnych bez sprzężenia zwrotnego była rozważana m.in. w pracach [9-12]. Uzupełnieniem tych rozważań jest analiza stabilności układu niestacjonarnego w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego. Jakkolwiek zawsze możliwa jest konwersja całej pętli do jednego zastępczego układu, niemniej jednak w wielu zastosowaniach wygodniejsze jest posłużenie się przybliżoną, proponowaną w niniejszej pracy metodą graficzną stanowiącą analogię do klasycznego kryterium Nyquista.

U podstaw klasycznego podejścia do stabilności układów stacjonarnych w zamkniętej pętli leży teoria generacji (regeneration theory) zapoczątkowana przez Nyquista [13]. Zgodnie z nią warunkiem koniecznym wzbudzenia układu jest jednoczesne występowanie określonych wartości przesunięcia fazowego i wzmocnienia układu w otwartej pętli sterowania. Wykorzystując rezultaty analizy SVD-DFT możliwe jest przeprowadzenie analogicznego rozumowania dla układów niestacjonarnych. Możliwe jest wyznaczenie widm częstotliwościowych wejściowych i wyjściowych oraz funkcji wiążących. W przypadku gdy w widmie następuje przesunięcie fazowe o 180°, przy wzmocnieniu ≥ 1 wówczas układ w zamkniętej pętli może być niestabilny.

Posługiwanie się klasycznym kryterium Nyquista dla układów stacjonarnych wymaga znajomości ilości niestabilnych biegunów oraz ilości nieminimalnofazowych zer, tj. zer i biegunów leżących poza okręgiem jednostkowym lub w prawej półpłaszczyźnie dla układów ciągłych). O ile nie jest problemem określenie czy układ niestacjonarny jest stabilny oraz czy ma charakter nieminimalnofazowy, o tyle wyznaczenie dokładnej analogii ilości zer i biegunów poza okręgiem jednostkowym stanowi w przypadku układów niestacjonarnych znaczący problem. W związku z tym przyjęto, że układ w otwartej pętli musi być stabilny i minimalnofazowy.

Twierdzenie 1. Zamknięta pętla sprzężenia zwrotnego z układem niestacjonarnym jest stabilna, jeżeli obiekt niestacjonarny w otwartej pętli jest stabilny, minimalnofazowy i przybliżona charakterystyka SVD-DFT Nyquista nie okrąży z lewej strony punktu -1.

Innymi słowy układ w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego będzie stabilny, jeżeli wzmocnienie na przybliżonej charakterystyce Bode'go dla przesunięcia fazowego $180^\circ \pm k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$ będzie mniejsze od 1 (<0 dB).

Specyfika układów niestacjonarnych pozwala na wzbudzenie się drgań również w sposób niestacjonarny, tj. przechodzenie pomiędzy różnymi wektorami własnymi w trakcie generacji drgań. Tak więc drgania generowane przez układ zmienny

w czasie mogą być również drganiami niestacjonarnymi, tzn. zawierać szerokie spektrum częstotliwości. Istnienie korelacji pomiędzy spektrami może wprowadzać pewne niedokładności do rezultatów proponowanej metody, podobnie jak analiza przy zbyt krótkim horyzoncie czasowym może prowadzić do niedokładnych (niedoszacowanych) wyników.

Adaptacja klasycznego kryterium Nyquista dla układów niestacjonarnych wymaga pewnych wyjaśnień. Jakie są różnice pomiędzy zdekomponowanymi układami stacjonarnym i niestacjonarnym w sensie wejściowo-wyjściowym? Wynikiem rozkładu według wartości szczególnych (SVD) są 3 macierze: wejścia $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N]$, przejścia diagonalna \mathbf{S} oraz wyjścia $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N]$. Macierze wejścia i wyjścia składają się z kolumnowych wektorów własnych, wejścia i wyjścia odpowiednio. Jeżeli na wejście układu zostanie podany dowolny wektor własny \mathbf{v}_k wówczas na wyjściu układu pojawi się wektor $\mathbf{y} = \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{s}_k$. Jeżeli obiekt pracuje w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego, wówczas sygnał ten zostanie odjęty od sygnału odniesienia. Po przejściu przez układ stacjonarny będzie to sygnał $A \cdot \mathbf{v}_{k,n}$, natomiast dla układu niestacjonarnego w ogólności będzie to $A \cdot \mathbf{v}_{k,n} + B_1 \cdot \mathbf{v}_{k1,n1} + B_2 \cdot \mathbf{v}_{k2,n2} + \dots$ gdzie n oznacza przesunięcie oraz k numer wektora własnego. Widoczne jest że układ niestacjonarny może nie tylko zmieniać amplitudę i fazę sygnału ale również może wprowadzać nowe wektory skojarzone ($k1, k2, \dots$).

Przykład: Niech w pewnym układzie niestacjonarnym jeden prążek o pulsacji ω_0 będzie wzmocniany o wartość niewiele mniejszą od jedności przy jednoczesnym przesunięciu fazowym o 180° . Ze względu na występujące w układach niestacjonarnych zjawiska modulacji w widmie wyjściowym może się pojawić dodatkowy prążek ω_1 . Podobna sytuacja może mieć miejsce dla składowej ω_1 , tzn. po przejściu przez układ może stać się widmem zawierającym w sobie dodatkową składową ω_0 . Przy sprzyjających wartościach przesunięć fazowych i amplitud odpowiednich harmonicznych prążków ω_0, ω_1 może nastąpić wzrost pozornego wzmocnienia układu dla częstotliwości ω_0 do lub powyżej wartości 1. Może to już skutkować niestabilnością zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego.

Do wyznaczenia pozornego wzmocnienia układu niestacjonarnego nie wystarcza pomiar wzmocnień i przesunięć fazowych poszczególnych prążków, lecz analiza całego widma wyjściowego generowanego przez sygnał wejściowy układu.

Do wyznaczenia pozornego wzmocnienia i przesunięcia fazowego układu z pomocą przychodzą tu zależności (3-4) oraz pojęcia wprowadzone w pierwszej części artykułu [6]. Operator układu $\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}$ może być wyznaczony zarówno teoretycznie, na podstawie danego modelu matematycznego [6] jak również na podstawie pomiarów zbioru przesuniętych w czasie odpowiedzi impulsowych układu niestacjonarnego $h(t, \tau)$. Zgodnie z zależnością (3) wypadkowa charakterystyka amplitudowa układu jest ważoną średnią kwadratową charakterystyk poszczególnych wektorów własnych. Charakterystyka fazowa (4) jest natomiast średnią ważoną przesunięć fazowych wprowadzanych przez poszczególne wektory własne. Wpływ na stabilność układu w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego mają zarówno poszczególne wektory własne jak również występujące w układzie interakcje (modulacje, przeskoki częstotliwości, itp.). Zjawiska te są uwzględnione przy wyznaczaniu aproksymowanych charakterystyk amplitudowo-fazowych właśnie dzięki opisanym wyżej ważonym uśrednieniom.

Należy tu podkreślić że dla tak wyznaczonych charakterystyk układ może ale nie musi znaleźć się na granicy stabilności przy warunkach analogicznych jak dla układu stacjonarnego - wzmocnienie 1, przesunięcie fazowe 180° . Jest to spowodowane zarówno czynnikami związanymi z ograniczeniami natury numerycznej takimi jak skończony horyzont czasowy analizy ale również pewnymi własnościami układu które nie znajdują swego odzwierciedlenia na charakterystyce wypadkowej, takimi jak np. przesunię-

cia fazowe wzajemne i wzmocnienia skrośne pomiędzy różnymi prążkami lub wręcz widmami. Czynniki te nie wpływają jednak w istotny, niekorzystny sposób na wykorzystanie zdefiniowanych charakterystyk, gdyż rzeczywista krytyczna wartość wzmocnienia jest równa lub większa od wartości odczytanej z charakterystyk. Jednak nawet jeżeli wartość rzeczywista jest większa to w większości przypadków różnice są nieznaczne, szczególnie w układach, dla których zmiany parametrów nie następują w sposób ekstremalny. Ponadto odczytana wartość niesie ze sobą informacje o szacunkowej wartości wzmocnienia od której należy rozpocząć poszukiwania rzeczywistej wartości wzmocnienia.

5. Przykład numeryczny – układ przełączający o stałych wartościach własnych

Przykłady analizowane poniżej są szczególnymi przypadkami układu niestacjonarnego, skonstruowanymi tak, aby zmiany współczynników macierzy układu $\mathbf{A}(k)$ nie powodowały zmian wartości własnych tej macierzy. Wartości własne macierzy układu $\mathbf{A}(k)$ znajdują się wewnątrz okręgu jednostkowego, jednak ze względu na występujące w strukturze układu przełączenia może on być zarówno wewnętrznie stabilny jak i niestabilny. Czynnikiem decydującym jest wartość parametru ε , określającego interwał czasowy pomiędzy przełączeniami. Macierze modelu (1-2) są następujące

$$\mathbf{A}(k) = \mathbf{A}_\kappa, \quad \mathbf{B}(k) = [1 \ 0]^T, \quad \mathbf{C}(k) = [0 \ 1] \quad (6)$$

gdzie

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1.2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1.2 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1.2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1.2 & -1 \end{bmatrix}, \kappa = \text{floor} \left(\text{rem} \left(\frac{k}{\varepsilon}, 4 \right) \right) \quad (7)$$

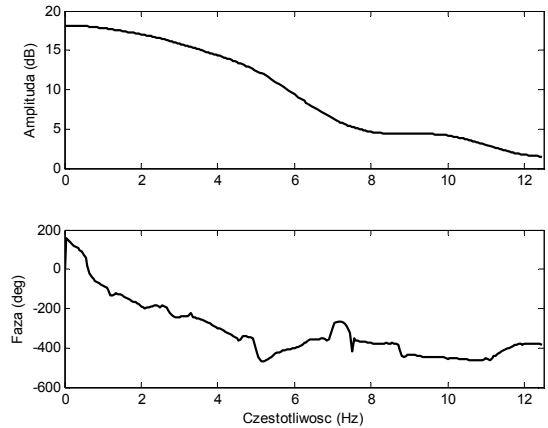
Zmienna pomocnicza κ przyjmuje wartości $\{0,1,2,3\}$ i służy do wyboru odpowiedniej macierzy \mathbf{A} modelu. Jest ona wyznaczona przez zaokrąglenie w dół (funkcja floor) części całkowitej z dzielenia (funkcja rem) współczynnika k/ε przez 4, gdzie k jest dyskretnym czasem. Okres próbkowania jest równy $T_p=0.04$ s. Wartości własne macierzy $\mathbf{A}(k)$ są niezależne od parametru ε i równe $0.5 \pm 0.3873i$ dla wszystkich k .

Aby zbadać wpływ parametru ε na stabilność układu, analiza została przeprowadzona dla 3 różnych wartości ε wynoszących odpowiednio 2, 5 oraz 40. Wartość $\varepsilon=2.9$ jest graniczna z punktu widzenia stabilności wewnętrznej układu. Dla wartości większych układ jest stabilny dla mniejszych niestabilny. Analizę stabilności zewnętrznej przeprowadzono każdorazowo w oparciu o wyznaczone charakterystyki amplitudową i fazową oraz odpowiedzi czasowe układu: skokową i impulsową.

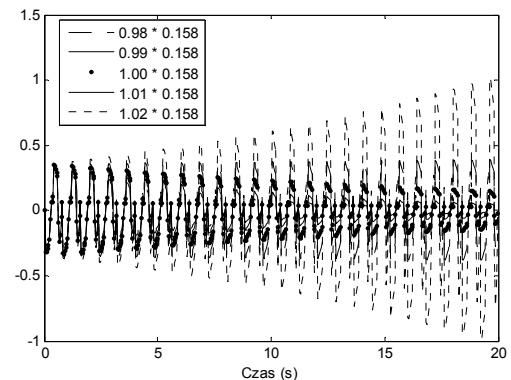
Na rys. 1 przedstawiono charakterystyki amplitudową i fazową dla wartości parametru $\varepsilon=5$. Układ jest wewnętrznie stabilny, co stwierdzono na podstawie charakterystyki impulsowej, zatem można poszukiwać takiej wartości wzmocnienia regulatora w zamkniętej pętli sterowania dla którego znajdzie się on na granicy stabilności. Z rys. 1 można odczytać kilka wartości wzmocnienia odpowiadające przesunięciu fazowemu $\pm 180 \pm m \cdot 360$ deg, przy czym wartością największą jest $m_{dB} = |G(f=0)| = 18.2$ dB.

Dla wartości wzmocnienia zredukowanej do $-m_{dB}$ układ jest stabilny. Krytyczna wartość wzmocnienia znaleziona eksperymentalnie wynosi $k_{crit_dB} = -16$ dB. Jest ona większa od wyznaczonej z rys. 1 (-18.2 dB), niemniej należy tu uwzględnić, że układ ma charakter silnie niestacjonarny i uzyskany wynik może być obciążony pewnym błędem. Przeprowadzone badania symulacyjne dla innych układów oraz rozumowanie przeprowadzone w sekcji 2 pozwalają stwierdzić że błąd ten będzie miał zawsze charakter nadmiarowy, tzn. układ dla wyznaczonej wartości wzmocnienia

będzie się znajdował na granicy stabilności lub będzie stabilny. Na rys. 2 wykreślono charakterystyki impulsowe dla układu ze sprzężeniem zwrotnym z wartościami wzmocnienia krytycznego przeliczonego do skali liniowej $k_{crit}=0.158$ oraz wzmocnień k różniących się od k_{crit} o $\pm 1\%$ i $\pm 2\%$ w skali liniowej.



Rys. 1. Charakterystyki Bodego SVD-DFT wyznaczone dla $N=500$, $\varepsilon=5$
Fig. 1. Bode SVD-DFT diagrams for $N=500$, $\varepsilon=5$



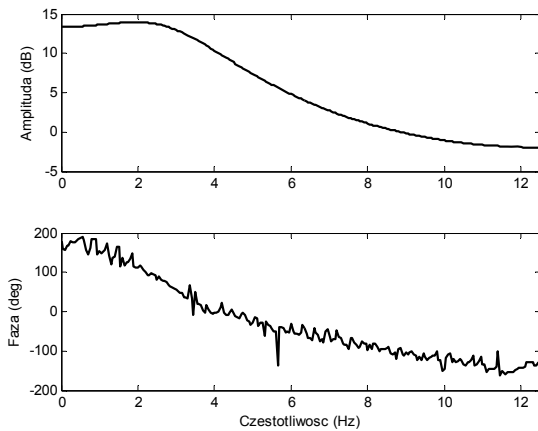
Rys. 2. Charakterystyki impulsowe układu w sprzężeniu zwrotnym wyznaczone dla $N=500$, $\varepsilon=5$ i wzmocnienia regulatora -16dB (0.158)

Fig. 2. Impulse responses for feedback systems for $N=500$, $\varepsilon=5$ and controller gain -16dB (0.158)

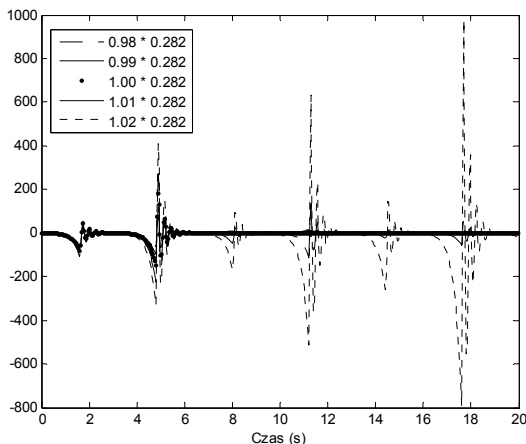
Na rys. 3 przedstawiono charakterystyki amplitudową i fazową dla wartości parametru $\varepsilon=40$. Charakterystyki te podobnie jak poprzednie zostały wyznaczone dla horyzontu analizy 500 kroków. Niemniej jednak dla układów stabilnych charakterystyki te nie ulegają istotnym zmianom przy wydłużaniu horyzontu czasowego, co świadczy to o dobrej stabilności numerycznej proponowanej metody. Odpowiedź impulsowa w otwartej pętli sterowania wskazuje na stabilny charakter tego układu, zatem posługując się rys. 3 można odczytać wartości wzmocnienia w decybelach odpowiadające przesunięciu fazowemu $\pm 180 \pm m \cdot 360$ deg. Największą z nich jest $m_{dB} = |G(f=0)| = 13.4$ dB. Krytyczna wartość wzmocnienia znaleziona eksperymentalnie jest zbliżona do $-m_{dB}$ i wynosi $k_{crit_dB} = -11$ dB. Na rys. 4 wykreślono charakterystyki impulsowe dla układu ze sprzężeniem zwrotnym z wartościami wzmocnienia krytycznego przeliczonego do skali liniowej $k_{crit}=0.282$ oraz wzmocnień k różniących się od k_{crit} o $\pm 1\%$ i $\pm 2\%$ w skali liniowej.

Dla układu o wartości parametru $\varepsilon=2$ układ w otwartej pętli jest niestabilny. Potwierdzają to odpowiedzi impulsowe, niemniej wyznacznikiem takiego stanu rzeczy są również wartości wzmocnień na charakterystyce amplitudowej przedstawionej na rys. 5 dla $\varepsilon=2$, $N=100$. Zależą one silnie od długości horyzontu czasowego,

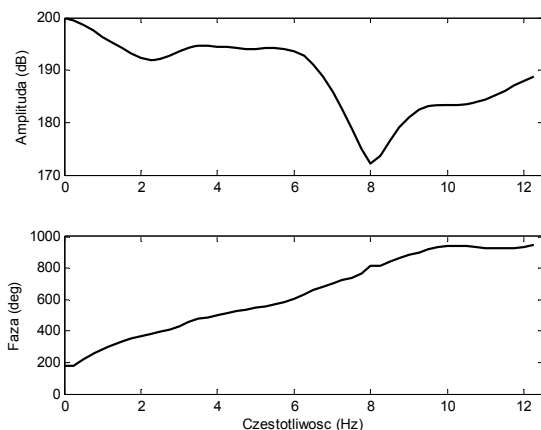
osiągając przy jego wzroście bardzo duże wartości, podczas gdy dla układów stabilnych są zbliżone do pewnej charakterystyki. Jest to kolejny wyznacznik niestabilności tego układu.



Rys. 3. Charakterystyki Bodego SVD-DFT wyznaczone dla $N=500$, $\varepsilon=40$
Fig. 3. Bode SVD-DFT diagrams for $N=500$, $\varepsilon=40$



Rys. 4. Charakterystyki impulsowe układu w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego wyznaczone dla $N=500$, $\varepsilon=40$ i wzmocnienia regulatora -11dB (0.282)
Fig. 4. Impulse responses for feedback systems for $N=500$, $\varepsilon=40$ and controller gain -11dB (0.282)



Rys. 5. Charakterystyki Bodego SVD-DFT wyznaczone dla układu niestabilnego $N=100$, $\varepsilon=2$

Fig. 5. Bode SVD-DFT diagrams for unstable system $N=100$, $\varepsilon=2$

- nie istnieje graniczna charakterystyka amplitudowo-fazowa, do której byłyby zbliżone charakterystyki dla dużych N dążących do nieskończoności,
- założenie dokonane w twierdzeniu 4 o stabilności układu w otwartej pętli sterowania.

Dobór wzmocnienia regulatora proporcjonalnego stabilizującego układ nie jest możliwy.

Symulacje przeprowadzone dla różnych wartości wzmocnień potwierdziły niestabilność zamkniętego układu regulacji dla dowolnych wartości wzmocnień regulatora k .

6. Podsumowanie

Ważnym wypracowanym osiągnięciem niniejszej pracy jest uogólnienie dobrze znanego twierdzenia Nyquista o stabilności układu w zamkniętej pętli na układy niestacjonarne, przy wykorzystaniu metody SVD-DFT. Korzystając z przybliżonych charakterystyk Bodego wyznaczonych metodą SVD-DFT możliwe jest wyznaczenie przybliżonej wartości krytycznej wzmocnienia, dla której układ w sprzężeniu zwrotnym osiągnie granicę stabilności. W istocie wyznaczona wartość krytyczna jest jednocześnie zapasem stabilności układu. Uzyskane rezultaty nie zawsze odpowiadają dokładnie tym otrzymywanym dla układów stacjonarnych, w których powyższe zależności nie mają charakteru przybliżonego a dokładny. Pamiętając jednak o możliwości przeszacowania wyników proponowana metoda może być stosowana do analizy stabilności układów niestacjonarnych w sprzężeniu zwrotnym. Rozszerzenie kryterium Nyquista na układy zmienne w czasie powinno stanowić istotne ułatwienie syntezy niestacjonarnych układów sterowania lub co najmniej pewnej szerokiej ich klasy. W takim przypadku układy te można traktować podobnie jak układy stacjonarne i stosować dobrze znane metody syntezy. Przejrzyste i łatwe do implementacji algorytmy obliczeniowe stanowią dodatkową zaletę proponowanej metody.

7. Literatura

- [1] Miller, D. E., Davison, E. J. (1989) An adaptive controller which provides Lyapunov stability. *IEEE Trans. Automat. Control*, 34, 599–609.
- [2] Narendra, K. S., Balakrishnan, J. (1989) Adaptive control using multiple models. *IEEE Trans. Automat. Control*, 42, 171–187.
- [3] Shorten, R. N., Narendra, K. S. (1998) On the stability and existence of common Lyapunov functions for stable linear switching systems, *Proc. of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, FL, pp. 3723–3724.
- [4] M. de la Sen, Robust stability of a class of linear time-varying systems, *IMA Journal of Mathematical Control and Information* (2002) 19, 399–418
- [5] Khalil, H. K. (1996) *Nonlinear Systems (Second Edition)*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [6] P. Orłowski (2007). Zastosowania dekompozycji SVD-DFT. Część 1: Wprowadzenie do analizy częstotliwościowej dla układów niestacjonarnych. *PAK 2/2007*.
- [7] K. Liu, (1999). Extension of modal analysis to linear time-varying systems. *Journal of Sound and Vibration* 226, 149-167.
- [8] Shokoohi, S., Silverman, L. (1987). Linear time-variant systems: stability of reduced models. *Automatica*, Vol. 20, pp. 59-67.
- [9] B. D. O. Anderson, Internal and external stability of linear time varying systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 20:408–413, 1982.
- [10] P. Iglesias. Input-output stability of sampled-data linear time-varying systems. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 40(9):1647–1650, 1995.
- [11] H. S. Han and J. G. Lee, Necessary and sufficient conditions for stability of time-varying discrete interval matrices, *Int. J. Control*, vol. 59, no. 4, pp. 1021–1029, 1994.
- [12] P. Orłowski (2006). Methods for stability evaluation for linear time varying, discrete-time systems on finite time horizon. *International Journal of Control*. Vol. 79, No. 3, pp. 249-262.
- [13] Nyquist, H. (1932). Regeneration theory, *Bell Laboratories Technical Journal*, 11, 126–147.

Przemysław ORŁOWSKI

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA, INSTYTUT AUTOMATYKI PRZEMYSŁOWEJ