

Przemysław ORŁOWSKI

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA, INSTYTUT AUTOMATYKI PRZEMYSŁOWEJ

**Zastosowania dekompozycji SVD-DFT
Część 1: Wprowadzenie do analizy częstotliwościowej
dla układów niestacjonarnych**

Dr inż. Przemysław ORŁOWSKI

Uzyskał dyplomy magistra inżyniera elektronika oraz magistra inżyniera elektryka w roku 1999 na Wydziale Elektrycznym Politechniki Szczecińskiej. Stopień naukowy doktora nauk technicznych uzyskał na tym samym Wydziale w roku 2002. Obecnie adiunkt w Instytucie Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej. Główne kierunki badań naukowych to analiza i synteza układów sterowania, w szczególności układy dyskretne, układy niestacjonarne i układy niepewne.



e-mail: orzel@ps.pl

Streszczenie

W pracy zawarto genezę i szczegółowy opis opracowanej przez autora metody do uproszczonej analizy dyskretnych, niestacjonarnych układów liniowych określonych na skończonym horyzoncie czasowym w dziedzinie częstotliwości. Artykuł rozpoczyna opis modelu matematycznego układu oraz jego transformacja do postaci operatorowej. W dalszej części analizowane są własności rozkładu według wartości szczególnych (SVD) operatora układu dyskretnego. Dalsza dyskretna transformata Fouriera wektorów rozkładu SVD oraz zastosowanie własności gęstości widmowej mocy dają podstawy do zdefiniowania przybliżonych charakterystyk Bodego: amplitudowej i fazowej. Jako podsumowanie powyższych rozważań dokonano przykładowej analizy numerycznej układu niestacjonarnego, będącego rezultatem zmiennej w czasie linearyzacji nieliniowego układu oscylacyjnego. Rezultaty porównano z wynikami dla odpowiednika stacjonarnego.

Słowa kluczowe: układy dyskretne, układy niestacjonarne, układy zmiennej struktury, analiza częstotliwościowa.

**Applications of SVD-DFT decomposition
Part 1: Introduction to frequency analysis
for time-varying systems****Abstract**

The paper develops tools and methods for linear time-varying, discrete-time systems analysis. Considerations begins from a theoretical background. There are definitions, theorems and numerical algorithms for evaluation of approximated Bode diagrams. The main method is based on Singular Value Decomposition (SVD), Discrete Fourier Transform (DFT) and Power Spectral Density (PSD) properties. Theoretical considerations are summarized by numerical example – analysis of linearized time-varying model of oscillatory element. Obtained results are compared with diagrams for similar linear time invariant system.

Keywords: discrete-time systems, time-varying systems, non-stationary systems, frequency analysis.

1. Wprowadzenie

Jednym z ważniejszych narzędzi służących do analizy układów dynamicznych jest analiza częstotliwościowa. W chwili obecnej istnieje bogata literatura dotycząca jej zastosowań do analizy i syntezy układów liniowych stacjonarnych, zarówno ciągłych jak i dyskretnych. Niestety dobrze znane metody nie mogą być w prosty sposób przeniesione na układy niestacjonarne. Pierwsze próby rozszerzenia narzędzi częstotliwościowych do analizy układów niestacjonarnych liczą sobie przeszło pół wieku [1, 2]. Zaproponowane tam podejście bazowało na rozszerzeniu transformaty Laplace'a do zmiennej w czasie odpowiedzi impulsowej poprzez wprowadzenie dodatkowego parametru zależnego od przesunięcia czasowego. W wyniku otrzymuje się funkcję prze-

ścia układu zależną od 2 zmiennych $S(\nu, \tau)$. Pierwsza zmienna odpowiada przesunięciu w dziedzinie częstotliwości a druga przesunięciu w dziedzinie czasu. Podejście to nosi obecnie nazwę analizy częstotliwościowo-czasowej (time-frequency analysis) i jest wykorzystywane głównie do przetwarzania sygnałów [4-8] oraz do syntezy filtrów zmiennych w czasie.

Celem niniejszej pracy jest zaprezentowanie nowego podejścia do problemu opisu układu niestacjonarnego w dziedzinie częstotliwości. Koncepcja ta jest wynikiem prowadzonych przez autora badań, sygnalizowanych wcześniej m.in. w materiałach konferencyjnych [9-11]. Głównym motorem analizy jest rozkład według wartości szczególnych (w skrócie SVD od ang. Singular Value Decomposition) dyskretnego operatora układu definiowanego na skończonym horyzoncie czasowym. Cechą charakterystyczną prezentowanego podejścia jest kompatybilność z klasycznymi wynikami otrzymywanymi dla układów stacjonarnych. Rezultatem tej analizy jest zbiór punktów charakterystyki Nyquista lub Bodego. Dla układów stacjonarnych wyniki obydwu metod, klasycznej i proponowanej pokrywają się. Charakterystyki otrzymywane dla układów niestacjonarnych powinny być interpretowane jako pewne przybliżenie z uwagi na charakter tych układów. Z uwagi na zbieżność otrzymanych charakterystyk w przypadku stacjonarnym, ich rozbieżność może stanowić miarę stopnia zmienności czasowej układu.

Stosowane podejście stanowi połączenie 3 znanych przekształceń układu dynamicznego oraz ich własności. Model układu niestacjonarnego w przestrzeni stanu zamieniany jest na odpowiadającą mu opis operatorowy (sekcja 2), następnie dokonuje się rozkładu SVD operatora wejściowo-wyjściowego układu (sekcja 3.1) oraz dyskretnego transformaty Fouriera wektorów własnych układu otrzymanych w wyniku SVD (sekcja 3.3). Uwzględniając własności gęstości widmowej mocy i stosując ważone sumowanie przetworzonych wektorów możliwe jest wyznaczenie aproksymowanej charakterystyki częstotliwościowej (sekcja 3.4).

2. Opis modelu matematycznego

Do opisu dynamicznych, niestacjonarnych układów dyskretnych wykorzystuje się równania różnicowe o zależnych od czasu współczynnikach lub uogólniony opis przy pomocy równań stanu o macierzach zależnych od czasu. Dla układów rzeczywistych zawsze występuje niezerowe opóźnienie pomiędzy wyjściem a wejściem. W takim przypadku równanie wyjścia zawiera jedynie człon zależny od stanu i równania stanu przyjmują następującą postać:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \cdot \mathbf{v}(k), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \cdot \mathbf{x}(k), \quad k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{x}_p(0) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n, k \in \{0, \dots, N-1\}\} & \text{ jest stanem,} \\ \{\mathbf{v}(k) \in \mathbf{R}^m, k \in \{0, \dots, N-1\}\} & \text{ jest sterowaniem,} \\ \{\mathbf{y}(k) \in \mathbf{R}^p, k \in \{0, \dots, N-1\}\} & \text{ jest wyjściem.} \end{aligned}$$

Macierze układu są określone następująco

$$\{\mathbf{A}(k) \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{B}(k) \in \mathbf{R}^{n \times m}, \mathbf{C}(k) \in \mathbf{R}^{p \times n}, k \in \{0, \dots, N-1\}\}.$$

Alternatywnie możliwy jest zapis modelu układu przy pomocy operatorów. Równania (1-2) można wówczas zapisać w następującej formie:

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{v}} \quad (3)$$

Odpowiedź swobodną układu ($\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$) definiuje człon $\hat{\mathbf{y}}_0 = \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{x}_0$, zaś odpowiedź układu przy zerowych warunkach początkowych człon $\hat{\mathbf{y}}_v = \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{v}}$. Operatory $\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{B}}$ oraz $\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{N}}$ mogą zostać zdefiniowane w postaci macierzy blokowych w następujący sposób

$$\hat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}(1) & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}(N-2) \dots \mathbf{A}(1) & \dots & \mathbf{A}(N-2) & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{A}(N-2) \dots \mathbf{A}(0) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}(N-1) \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}(N-1) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Operatory $\hat{\mathbf{B}}$ i $\hat{\mathbf{C}}$ mają postać blokową diagonalną, natomiast sygnały muszą być zapisane w postaci wektorów blokowych:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(N-1) \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(N-1) \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{v}(N-1) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Operator $\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{B}}$ jest operatorem Hilberta-Schmidta z przestrzeni l_2 w przestrzeń l_2 i odwzorowuje ograniczone sygnały $\mathbf{v}(k) \in \mathbf{V} = l_2[0, N]$ w ograniczone sygnały $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, przy czym układ (3) jest równoważny układowi (1-2).

3. Geneza i podstawy matematyczne metody

Elementy analizy częstotliwościowej, wprowadzone w niniejszej pracy opierają się głównie na rozkładzie według wartości szczególnych operatorów układu. Rozkład taki jest uogólnieniem klasycznego rozkładu SVD macierzy [3]. Jest to możliwe dlatego, że operatory definiowane dla układów dyskretnych na skończonym horyzoncie czasowym są skończenie wymiarowe.

3.1. Elementy rozkładu według wartości szczególnych

Podobnie jak w algebrze liniowej, SVD dekomponuje operator na odpowiadające mu zbiory wartości szczególnych σ_i wektorów własnych wejściowych \mathbf{v}_i oraz wyjściowych \mathbf{u}_i . Dowolna zespolona lub rzeczywista macierz \mathbf{X} może być zapisana jako iloczyn trzech macierzy $\mathbf{X} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^T$, gdzie $\mathbf{S} = \text{diag}(\sigma_i)$ jest macierzą diagonalną, a macierze ortonormalne \mathbf{U} , \mathbf{V} są złożone z kolumnowych wektorów własnych, odpowiednio \mathbf{u}_i i \mathbf{v}_i . Z punktu widzenia aproksymacji charakterystyk niezwykle istotna jest pewna własność zdekomponowanego operatora układu zawarta w twierdzeniu 1.

Twierdzenie 1. Dla układu, dla którego dokonano rozkładu SVD $\mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^T = \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{B}}$, na wejście którego podano sygnał $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_i$ równy i -tej kolumnie macierzy \mathbf{V} , odpowiedź układu

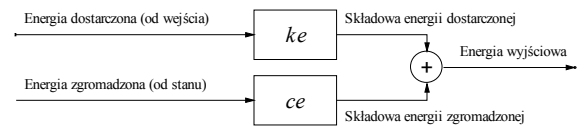
$\mathbf{y}_v = \sigma_i \cdot \mathbf{u}_i$ jest równa iloczynowi i -tej wartości szczególnej oraz i -tej kolumny macierzy \mathbf{U} .

Twierdzenie 2. Dla układu, dla którego dokonano rozkładu SVD $\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{V}_0^T = \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{N}}$, przy warunkach początkowych $\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_i$ równych i -tej kolumnie macierzy \mathbf{V}_0 , odpowiedź swobodna układu $\mathbf{y}_v = \sigma_i \cdot \mathbf{u}_i$ jest równa iloczynowi i -tej wartości szczególnej oraz i -tej kolumny macierzy \mathbf{U}_0 .

Dowód twierdzeń 1-2 wynika z ortonormalności macierzy \mathbf{U} , \mathbf{V} i własności SVD.

3.2. Wzmocnienie energetyczne układu

Znaczącym uproszczeniem modelu, jakiego można dokonać posługując się rozkładem SVD jest zamiana na odpowiadający mu model wzmocnienia i pojemności energetycznej przedstawiony poglądowo na rys. 1.



Rys. 1. Model energetyczny układu dynamicznego
Fig. 1. Energetical model of dynamical system

Oszacowania dla współczynników wzmocnienia energetycznego k_e oraz pojemności energetycznej c_e wynikają wprost z algebry liniowej i można je zapisać następująco:

$$\sigma_{\min}^2(\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{B}}) \leq k_e \leq \sigma_{\max}^2(\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{B}}) \quad k_e = \frac{\sum_{i=1}^N y^2(i)}{\sum_{i=1}^N v^2(i)} = \frac{\hat{\mathbf{y}}^T \cdot \hat{\mathbf{y}}}{\hat{\mathbf{v}}^T \cdot \hat{\mathbf{v}}} \quad (7)$$

przy warunku $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$

$$\sigma_{\min}^2(\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{N}}) \leq c_e \leq \sigma_{\max}^2(\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{N}}) \quad c_e = \frac{\sum_{i=1}^N y^2(i)}{\sum_{j=1}^N x_0^2(j)} = \frac{\hat{\mathbf{y}}^T \cdot \hat{\mathbf{y}}}{\hat{\mathbf{x}}_0^T \cdot \hat{\mathbf{x}}_0} \quad (8)$$

przy warunku $\mathbf{v}(\cdot) = \mathbf{0}$

Wynikająca stąd 2-norma operatora $\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{B}}$ jest równa:

$$\|\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{B}}\|_2 = \sup_v \sqrt{k_e} = \sigma_{\max}(\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{B}}) \quad (9)$$

Wektor sterujący \mathbf{v} oraz warunki początkowe \mathbf{x}_0 , dla których wzmocnienie i pojemność energetyczna są największe, dane są pierwszą kolumną macierzy \mathbf{V} .

Wektor sterujący \mathbf{v} oraz warunki początkowe \mathbf{x}_0 , odpowiadające najmniejszym wartościom wzmocnienia i pojemności energetycznej, dane są ostatnią kolumną macierzy \mathbf{V} .

3.3. Związek gęstości widmowej mocy z transformatą zdekomponowanego operatora układu

Wyprowadzenie zależności, które umożliwiają wyznaczenie charakterystyk: amplitudowej i fazowej dla niestacjonarnych układów dyskretnych wymaga posłużenia się gęstością widmową mocy. Związek gęstości widmowej mocy z charakterystyką amplitudową układu wyraża się następująco:

$$S_y(\omega_k) = |G(\omega_k)|^2 \cdot S_v(\omega_k) \quad (10)$$

gdzie $S_y(\omega_k)$, $S_v(\omega_k)$ oznaczają odpowiednio wyjściowe i wejściowe widmo gęstości mocy układu.

Jednoznaczne wyznaczenie charakterystyki amplitudowej $|G(\omega_k)|$ jest możliwe wówczas, gdy znane są widma wejściowe i wyjściowe gęstości mocy układu. Korzystając z rozkładu SVD operatora układu można udowodnić następujące twierdzenia:

Twierdzenie 3. Dyskretne widmo gęstości mocy dla dowolnej ortonormalnej macierzy powstałej wskutek rozkładu wg wartości szczególnych, liczone jako suma widmowych gęstości mocy poszczególnych kolumn macierzy $\{\mathbf{V} = \{v_{ij}\}, i, j = 1 \dots N\}$ jest równe $S(\omega_k) = 1$.

$$S_v(\omega_k) = \sum_{j=1}^N S_j(\omega_k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N |\text{DFT}_k[\mathbf{v}_j]|^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left| \sum_{n=1}^N v_{ni} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot (n-1) / N} \right|^2 = 1 \quad (11)$$

gdzie $\omega_k = \frac{k}{2 \cdot T_p \cdot N}$, T_p – okres próbkowania.

Dowód twierdzenia wynika bezpośrednio z ortonormalności macierzy rozkładu SVD [3] oraz własności transformaty DFT, która jest transformatą unitarną. Spełnione jest wówczas równanie:

$$|\text{DFT}_k[\mathbf{v}_j]|^2 = 1 \quad (12)$$

zatem

$$S(\omega_k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N 1 = 1 \quad (13)$$

co dowodzi powyższego twierdzenia.

Twierdzenie 4. Wyjściowe widmo gęstości mocy może być obliczone jako suma widmowych gęstości mocy poszczególnych kolumn macierzy będącej iloczynem macierzy $\mathbf{U} \cdot \mathbf{S}$. Można to zapisać następująco

$$S_y(\omega_k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N |\text{DFT}_k[\mathbf{u}_j \cdot s_{jj}]|^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left| \sum_{n=1}^N u_{ni} \cdot \sigma_i \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot (n-1) / N} \right|^2 \quad (14)$$

gdzie $\omega_k = \frac{k}{2 \cdot T_p \cdot N}$, T_p – okres próbkowania, $\sigma_i = s_{ii}$ – i – ta wartość szczególna rozkładu $\mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^T = \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{B}}$.

Dowód twierdzenia wynika z własności SVD, w szczególności z ortonormalności macierzy \mathbf{U} i \mathbf{V} .

3.4. Aproksymacja charakterystyki Bodego

Wyznaczenie charakterystyk Bodego sprowadza się do wyznaczenia charakterystyki amplitudowej $|G(\omega_k)|$ oraz charakterystyki fazowej $\varphi(\omega_k) = \arg(G(\omega_k))$. Charakterystykę amplitudową można uzyskać podstawiając zależność (11) do równania (10). Obustronne pierwiastkowanie daje w rezultacie:

$$|G(\omega_k)| = \sqrt{S_y(\omega_k)} \quad (15)$$

Po podstawieniu zależności (14) można ostatecznie zapisać

$$|G(\omega_k)| = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N \sigma_j^2 \cdot |\text{DFT}_k[\mathbf{u}_j]|^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left| \sigma_i \cdot \sum_{n=1}^N u_{ni} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot (n-1) / N} \right|^2} \quad (16)$$

co jednoznacznie definiuje charakterystykę amplitudową.

Przez analogię do charakterystyki amplitudowej zależność aproksymująca charakterystykę fazową może być zapisana w sposób następujący:

$$\varphi(\omega_k) = \arg \left(\sum_{j=1}^N \sigma_j \cdot \frac{\text{DFT}_k[\mathbf{u}_j]}{\text{DFT}_k[\mathbf{v}_j]} \right) = \arg \left(\sum_{i=1}^N \left(\sigma_i \cdot \frac{\sum_{n=1}^N u_{ni} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot (n-1) / N}}{\sum_{n=1}^N v_{ni} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot (n-1) / N}} \right) \right) \quad (17)$$

Wartości szczególne σ_i pełnią w zależnościach (16-17) funkcję wag.

Wyprowadzone zależności są prawdziwe zarówno dla układów stacjonarnych jak i niestacjonarnych. Charakterystyki wyznaczone podaną metodą dla układów stacjonarnych przy skończonym horyzoncie czasowym odpowiadają charakterystykom Bodego wyznaczonym klasycznie przez podstawienie w transformacji $z = \exp(j \cdot \omega \cdot T_p)$.

3.5. Wnioski

W układach stacjonarnych liniowych nie następuje modulacja wejścia (stanu, wyjścia) a różnice pomiędzy sygnałami wejściowymi i wyjściowymi mogą być odzwierciedlone poprzez zmianę amplitudy i fazy poszczególnych składowych sinusoidalnych sygnału. Podobna zależność zachodzi dla zdekomponowanego operatora układu. Dla układu stacjonarnego liniowego widma amplitudowe odpowiadających sobie wektorów własnych macierzy \mathbf{U} i \mathbf{V} są identyczne, co można zapisać

$$\forall_{k,j} |\text{DFT}_k[\mathbf{u}_j]| = |\text{DFT}_k[\mathbf{v}_j]| \quad (18)$$

lub równoważnie

$$\forall_{k,j} \left| \sum_{n=1}^N u_{n,j} e^{-2 \cdot \pi \cdot \sqrt{-1} \cdot (k-1) \cdot (n-1) / N} \right| = \left| \sum_{n=1}^N v_{n,j} e^{-2 \cdot \pi \cdot \sqrt{-1} \cdot (k-1) \cdot (n-1) / N} \right| \quad (19)$$

Zależności (18,19) nie są w ogólności spełnione dla układów niestacjonarnych z uwagi na typowe dla nich zjawiska rozszczepienia widm i modulację wewnętrzną. Własności te można wykorzystać m.in. przy określaniu stopnia niestacjonarności układu [11].

4. Przykład numeryczny

Jako przykład zostanie rozpatrzony układ oscylacyjny opisany następującym równaniem różniczkowym:

$$\ddot{y}(t) + \beta(\dot{y}(t)) \cdot \omega_0(y(t)) \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2(y(t)) \cdot y(t) = \omega_0^2(y(t)) \cdot u(t) \quad (20)$$

Współczynniki β , ω_0 dane są w formie wielomianowej

$$\begin{aligned} \beta(t) &= b_2 \cdot (x_1(t))^2 + b_1 \cdot |x_1(t)| + b_0 \\ \omega_0(t) &= w_3 \cdot (x_2(t))^3 + w_2 \cdot (x_2(t))^2 + w_1 \cdot x_2(t) + w_0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{b} = [b_2, b_1, b_0] = [0.001, 0, 0.001]$$

$$\mathbf{w} = [w_3, w_2, w_1, w_0] = [0.002, 0, 0.02, 4]$$

Układ ten można zapisać w postaci macierzy dyskretnego równania stanu:

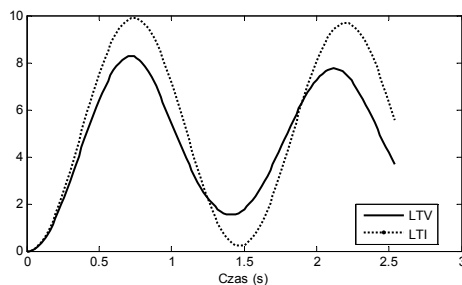
$$\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta(k) \cdot \omega_0(k) & -\omega_0^2(k) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot T_p \quad (22)$$

$$\mathbf{B}(k) = [1 \ 0]^T \cdot T_p, \quad \mathbf{C}(k) = [0 \ \omega_0^2(k)]$$

gdzie x_1 jest uogólnioną prędkością, x_2 położeniem i T_p okresem próbkowania.

Dla dowolnych sygnałów wejścia i stanu układ ten jest nieliniowy. Niemniej rozpatrując zachowanie tego układu dla ustalonych warunków początkowych $x_0=[0,0]^T$ i danej trajektorii wejścia $u(t)=5 \cdot 1(t)$ w istocie zachodzi $\beta(x_1(k)) = \beta(k)$, $\omega_0(x_2(k)) = \omega_0(k)$ i układ ten można traktować jak układ niestacjonarny liniowy. Dla porównania z przypadkiem stacjonarnym liniowym zostanie wykorzystane podstawienie $\beta = \beta\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |x_1(k)|\right)$, $\omega_0 = \omega_0\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |x_2(k)|\right)$.

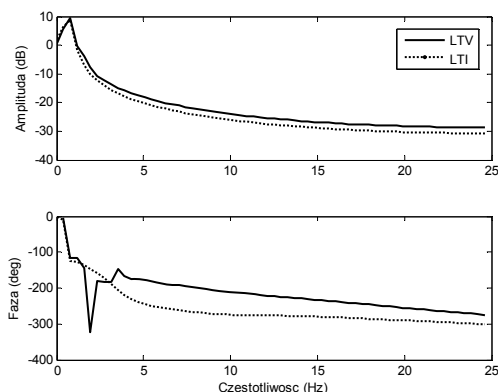
W pierwszej kolejności wyznaczono charakterystyki czasowe. Rys. 2 pokazuje odpowiedź skokową układu w przypadku niestacjonarnym (LTV) wykreśloną linią ciągłą oraz przypadek stacjonarny (LTI) wykreślony linią kropkowaną. Z rysunku widać wyraźnie, że pomiędzy układami zachodzą wyraźne różnice w zakresie tłumienia – większe w przypadku niestacjonarnym oraz dla częstotliwości własnej układu, która jest większa również w przypadku niestacjonarnym.



Rys. 2. Odpowiedź skokowa układu niestacjonarnego – linia ciągła, stacjonarnego linia kropkowana

Fig. 2. Step response for time-varying (solid line) and for time-invariant system (dotted line)

Kolejnym krokiem analizy jest porównanie przybliżonych charakterystyk Bodego – amplitudowych i fazowych wykreślonych na rys. 3. Przypadek niestacjonarny podobnie jak poprzednio zaznaczono linią ciągłą. Charakterystyki amplitudowe obu układów są bardzo bliskie, przy czym większą rozbieżność można zaobserwować dla wyższych częstotliwości.

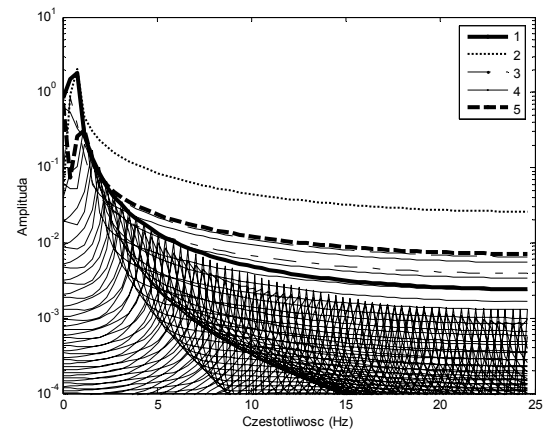


Rys. 3. Charakterystyki amplitudowo-fazowe Bodego dla układu niestacjonarnego – linia ciągła oraz dla układu stacjonarnego linia kropkowana

Fig. 3. Approximated Bode diagrams for time-varying system (solid line) and for time-invariant system (dotted line)

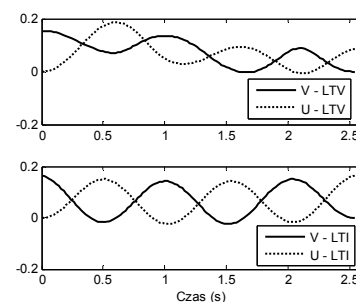
Znacznie większe rozbieżności można zaobserwować na charakterystyce fazowej. W szczególności widoczne są zaburzenia zaczynające się od silnego impulsu ujemnego dla częstotliwości około 1.6 Hz i kończące się słabym impulsem dodatnim dla częstotliwości około 4 Hz. Tego typu zaburzenia charakterystyki fazowej są wynikiem zjawisk niestacjonarnych. Bardziej szczegółowej analizy można dokonać na podstawie wykresu składowych

charakterystyki amplitudowej przedstawionej na rys. 4. Linie przedstawiają charakterystyki amplitudowe poszczególnych wektorów własnych pomnożonych przez odpowiadające im wartości szczególne $U \cdot S$. Wartości szczególne są uporządkowane w kolejności malejącej, zatem największy wpływ na kształt charakterystyki ma kilka pierwszych wartości i wektorów własnych. Na rys. 4 wyróżniono 5 pierwszych składowych. Pierwsza składowa – linia ciągła gruba kształtuje w sposób dominujący część niskoczęstotliwościową, druga składowa – linia kropkowana kształtuje w sposób dominujący część wysokoczęstotliwościową. Pozostałe składowe mają nieco mniejszy wpływ. Niemniej 5 składowa odpowiada za zjawiska niestacjonarne. Ilustracją tego jest rys. 5, na którym wykreślono piąte kolumny macierzy U oraz V (piąte wektory własne) dla układu niestacjonarnego – górny wykres oraz dla układu stacjonarnego – dolny wykres. Dolne wykresy zawierają mniejszą ilość składowych częstotliwości (kształt sinusoidalny) niż górne posiadające znacznie bardziej rozbudowane spektrum (zmodulowana sinusoida, brak symetrii).



Rys. 4. Składowe charakterystyki amplitudowe w dziedzinie częstotliwości dla układu niestacjonarnego

Fig. 4. Components of magnitude diagram in frequency domain for time-varying system



Rys. 5. Piąte wektory własne dla macierzy U oraz V w dziedzinie czasu dla układu niestacjonarnego – górny wykres oraz dla układu stacjonarnego – dolny wykres

Fig. 5. Fifth singular vectors for matrix U and V in time domain for time-varying system (LTV) and for time-invariant system (LTI)

5. Podsumowanie

Przedstawione w pracy metody umożliwiają w prosty sposób wyznaczenie przybliżonych charakterystyk częstotliwościowych dla układów niestacjonarnych dyskretnych. Ponieważ są one znaczącym uproszczeniem rzeczywistości, powinny być traktowane jako użyteczne, aczkolwiek jedynie przybliżone narzędzie do badania układów zmiennych w czasie. W przypadku gdy wymagane jest przeprowadzenie nieco dokładniejszej analizy można posłużyć się bezpośrednią analizą składowych wektorów własnych. Proponowana metodologia nie ogranicza w żadnym stopniu możliwości zastosowania narzędzi analizy częstotliwościowo-

czasowej w oparciu o 2 wymiarową funkcję przejścia, oraz innych ważnych narzędzi takich jak krótkookresowa transformata Fouriera i transformata falkowa.

Istotną cechą proponowanej metody jest kompatybilność wyników uzyskiwanych dla układów stacjonarnych oraz zbieżność do tych wyników w przypadku, gdy niestacjonarność występująca w układzie mają charakter marginalny. Podstawowym motorem proponowanej metody jest rozkład według wartości szczególnych operatora układu oraz dyskretne transformata Fouriera. Z uwagi na własności rozkładu SVD możliwa jest selektywna analiza najbardziej znaczących wektorów i wartości szczególnych, z pominięciem tych mniej znaczących, w rezultacie prowadząca do uproszczenia układu.

Rozwinięcie proponowanej metody wraz z przykładem zastosowań do analizy stabilności będzie przedmiotem drugiej części artykułu.

6. Literatura

- [1] L. A. Zadeh, (1950). Frequency analysis of variable networks. Proceedings of the Institute of Radio Engineers. 38, 291-299.
- [2] L. A. Zadeh, (1961). Time varying networks. Proceedings of the Institute of Radio Engineers. 49, 1488-1503.

- [3] G.H. Golub, Van Loan, C.F. (1983). Matrix Computations. Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland.
- [4] P.A. Bello (1963). Characterisation of randomly time-variant linear channels. IEEE Trans. Comm. Syst., 11, 360-393.
- [5] M. Coates (1998). Time-frequency modelling. University of Cambridge. Ph.D. Thesis
- [6] L. Debnath, Ed. (2001). Wavelet Transforms and Time-Frequency Signal Analysis. Birkhauser. Boston.
- [7] W. Kozek (1992). Time-frequency signal processing based on the Wiegner-Weyl framework. Signal Processing 29, 77-92.
- [8] W. Kozek (1997). On the generalized transfer function calculus for underspread LTV channels. IEEE Trans. Signal Proc. 45, 219-223.
- [9] P. Orłowski (2005). Analiza częstotliwościowa układu zmiennego w czasie - algorytm i przykłady. XV Krajowa Konferencja Automatyki, Warszawa 27-30.VI.2005.
- [10] P. Orłowski (2006). Properties of the frequency SVD-DFT method for discrete LTV systems based on first order examples. 4th International Scientific – Technical Conference Process Control 13-16.06.2006, Kouty nad Desnou, proceedings on CD-ROM.
- [11] P. Orłowski (2004). Selected problems of frequency analysis for time-varying discrete-time systems using singular value decomposition and discrete Fourier transform. Journal of Sound and Vibration. Vol. 278, pp. 903-921.

Artykuł recenzowany

INFORMACJE

Uchwała Programowa XXXI Walnego Zjazdu Delegatów SIMP

1. ZG SIMP w nowej kadencji winien zwrócić szczególną uwagę na wzrost liczby młodych członków w oddziałach SIMP, tj. uczniów i studentów oraz członków do lat 40-tu. Zaktywizować działania SIMP w zakresie pozyskiwania ludzi młodych poprzez propagowanie wiedzy o SIMP, organizację konferencji, narad i konkursów, a także organizację imprez integracyjnych, w tym kulturalnych i sportowych.
2. Należy wprowadzić podział zysku pomiędzy ZG SIMP a oddziałem w proporcjach 50% : 50% uzyskanego z działalności gospodarczej agend SIMP i z wpływów z tytułu umowy franszyzy.
3. Należy kontynuować działania zmierzające do uzyskiwania na zasadach ustawowych uprawnień zawodowych przez inżynierów mechaników.
4. Zobowiązać ZG SIMP do dalszej pracy nad statutem i uzgodnienia ewentualnych zmian przed kolejnym WZD.
5. Zaleca się ZG SIMP przeprowadzenie kontroli przez biegłego rewidenta całokształtu dokumentacji księgowo-finansowej SIMP, przynajmniej jeden raz w kadencji.
6. Zaleca się ZG SIMP podjęcie działań w kierunku zmiany modelu kształcenia w średnich szkołach technicznych, który pozwalałby przygotować do zawodu w pełni kwalifikowanego technika mechanika.
7. Zaleca się ZG SIMP podjęcie działań w kierunku zmiany modelu kształcenia w wyższych uczelniach technicznych, tj. wprowadzić zasadę odbywania minimum półrocznego stażu kształconych studentów w zakładach pracy, który kończyłby się zaprezentowaniem i obroną pracy stażowej.
8. Podjąć kroki, aby działalność gospodarcza prowadzona przez dyrektora Zamku w Rydzynie obejmowała wszystkie sfery centrum konferencyjnego i domu pracy twórczej, tj. hotel, gastronomię, wynajem sal, pełne usługi konferencyjne i szkoleniowe, tak aby zyski z tej działalności czerpał SIMP.
9. Należy zwrócić szczególną uwagę na uprawnienia zawodowe rzeczoznawców - przedsięwziąć działania dla lepszego wykorzystania ich wiedzy i potencjału dla gospodarki i przemysłu.
10. Uzupełnić regulamin walnych zebrań o procedurę uproszczoną dla kół o małej liczebności członków.
11. Na wniosek Przewodniczącego Głównej Komisji Rewizyjnej SIMP – Zjazd udziela absolutorium ustępującemu Zarządowi Głównemu, za okres kadencji 2002 – 2006 r.
12. Należy uporządkować członkostwo w sekcjach n-t, tzn. członkiem sekcji może być tylko czynny i płacący składki członek SIMP lub czynny członek innego stowarzyszenia działającego w ramach Federacji SNT NOT.
13. Należy wyraźnie zdefiniować zależności pomiędzy oddziałem a agendami gospodarczymi, działającymi na jego terenie oraz ująć te zależności w schemacie organizacyjnym, regulaminach : ZG, Komisji Rewizyjnej, Sądu Koleżeńskiego SIMP, SIMP, łącznie z uzgodnieniami z oddziałem dotyczącymi powoływania i odwoływania dyrektora jednostki działalności gospodarczej.
14. Należy wyraźnie opisać w statucie logo SIMP i określić zasady jego stosowania.
15. Stowarzyszenie powinno zadbać o utrzymanie kontaktu z członkami SIMP kończącymi studia oraz zadbać o ich dalszy rozwój zawodowy w kraju.
16. Należy jednoznacznie określić w statucie SIMP minimalną liczbę członków konieczną dla zawiązania koła oraz minimalną ilość jednostek podstawowych, tj. kół, sekcji naukowo-technicznych itp. wymaganych dla istnienia oddziału.
17. Przewidzieć w budżecie ZG SIMP kwoty na promocję SIMP w mediach.. Zapraszać przedstawicieli mediów do udziału w szczególnie ważnych wydarzeniach w życiu Stowarzyszenia, tj. zjazdach, konferencjach, sympozjach itp.
18. Należy lepiej organizacyjnie przygotować kolejny WZD (np. charakterystyki kandydatów do ZG, osiągnięcia kandydatów na członków honorowych itp.).
19. Akceptuje się Deklarację Programową SIMP i upoważnia Radę SIMP do dalszego jej udoskonalania.
20. XXXI Walny Zjazd Delegatów SIMP składa podziękowanie dyrekcji Zamku w Rydzynie za zapewnienie miłej atmosfery i właściwych warunków dla przeprowadzenia obrad zjazdu.

Sekretarz Generalny SIMP
-/ Kazimierz Łasiewicki

PREZES SIMP
-/ Andrzej Ciszewski