

Adam ŻUCHOWSKI

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA, INSTYTUT AUTOMATYKI PRZEMYSŁOWEJ

Przybliżona metoda oceny odporności pewnej klasy układów nieliniowych

Prof. dr hab. inż. Adam ŻUCHOWSKI



Profesor zwyczajny zatrudniony w Instytucie Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej. Ze szkolnictwem wyższym związany zawodowo od 1955 roku (Politechnika Wroclawska, Politechnika Szczecińska). Jest współtwórcą polskiej szkoły miernictwa dynamicznego; posiada w dorobku około 300 publikacji. W kwietniu 2005 roku upłynęło 50 lat jego działalności naukowej, w tym 47 lat publikacji artykułów naukowych w czasopiśmie Pomiary Automatyka Kontrola. Szczegółowa charakterystyka działalności Profesora zamieszczona jest w PAK 4/2005, str. 3, oraz w PAK 10/2005, str. 30.

Streszczenie

Oceny odporności układów liniowych rozumianej jako dopuszczalny obszar zmian parametrów gwarantujących stabilność (ewentualnie z określonym zapasem) dokonuje się wykorzystując bądź tzw. wielomiany Charitonowa [1], bądź kryterium stabilności Neumarka, nazywane też metodą D-powierzchni [2]. Precyzyjna ocena odporności układów nieliniowych jest problemem otwartym. Zaproponowano przybliżoną metodę takiej oceny dla pewnej klasy układów nieliniowych z wykorzystaniem kryterium Neumarka.

Słowa kluczowe: układy nieliniowe, odporność, funkcja opisująca, kryterium Neumarka.

The approximate method of estimation of robustness for certain class of non-linear systems

Abstract

The so-called Kharitonov's polynomials [1] and Neumark's criterion (known as D - decomposition method) [2] can be treated as classic tools for estimation of linear system robustness, if estimation procedures are aimed at determination of allowed areas of changes of system parameters without losing of system stability or violating of requirements for assumed system stability margin. The problem of precise estimation of robustness for non-linear systems is still open one. The approximate method of estimation of robustness for certain class of non-linear systems is proposed in the paper. The presented method uses Neumark's criterion.

Keywords: non-linear systems, robustness, Neumark's criterion, describing function.

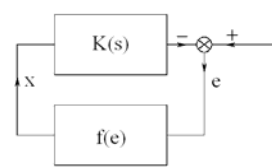
1. Wstęp

Rozpatrzmy układ regulacji automatycznej pokazany na rys. 1 złożony z gałęzi liniowej o transmitancji $K(s)$ rzędu n , oraz gałęzi nieliniowej o nieliniowości statycznej $x = f(e)$ i odpowiadającej jej funkcji opisującej $J(E)$, gdzie E jest amplitudą sygnału $e(t) = E \cdot \sin(\omega \cdot t)$. Przy wykorzystaniu linearyzacji harmonicznej układu [4] równanie charakterystyczne można przedstawić w znanej postaci:

$$1 + J(E) \cdot K(j\omega) = 0 \quad (1)$$

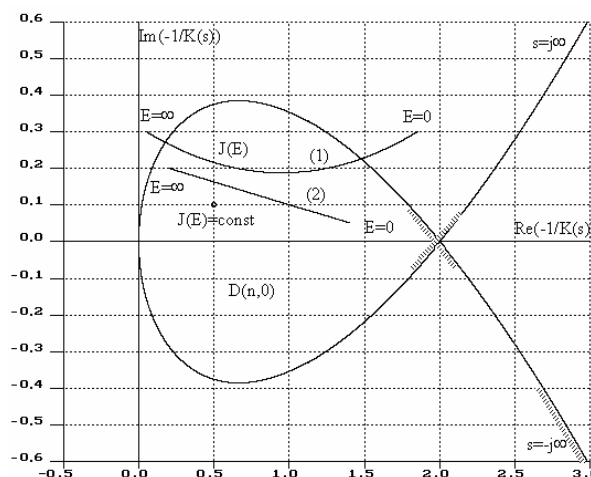
skąd oczywiście:

$$J(E) = \frac{-1}{K(j\omega)}$$



Rys. 1. Schemat rozpatrywanej klasy układów regulacji automatycznej
Fig. 1. The structure of class of considered control systems

Ustalając wartości parametrów transmitancji gałęzi liniowej można na płaszczyźnie zmiennej zespolonej odwzorować granice obszaru pierwiastków stabilnych i niestabilnych zmieniając w zależności $\frac{-1}{K(j\omega)}$ pulsację w granicach $(-\infty, \infty)$ i kreskując odpowiednio „lewą” stronę linii kreślonej przy rosnącej wartości pulsacji tak, jak to pokazano na rys. 2. Można w ten sposób wyznaczyć obszar o największej liczbie stabilnych pierwiastków liniowego równania (1), tj. równania w sytuacji gdy $J(E) = \text{const}$. i w oparciu o np. kryterium Hurwitza sprawdzić, czy jest to obszar stabilny $D(n,0)$ lokując wartość $J(E) = \text{const}$. w dowolnym punkcie tego obszaru. Warto zaznaczyć, że obszar ten obejmuje pewną część płaszczyzny zmiennej zespolonej, a więc parametr $J(E)$ może przyjmować zespolone wartości.



Rys. 2. Wzajemne usytuowanie stabilnego obszaru $D(n,0)$ i wykresów funkcji opisującej $J(E)$

Fig. 2. The stability area $D(n,0)$ in relation to describing functions $J(E)$

W zlinearyzowanym równaniu (1) funkcja zmiennej zespolonej $J(E)$ przyjmuje na ogół wartości zespolone zależne od amplitudy E sygnału sinusoidalnego $e(t)$ i przy zmianach wartości E punkt $J(E)$ „wędruje” po płaszczyźnie. Jeśli zakres tej wędrówki przy zmianach E w przedziale $(0, \infty)$ ogranicza się do obszaru stabilnego odwzorowania $\frac{-1}{K(j\omega)}$ granicy pierwiastków stabilnych - przypadek 1, to w przybliżeniu odpowiada to stabilności układu nieliniowego tzw. totalnej, a więc niezależnej od wielkości odchylenia układu od stanu równowagi. Jeżeli natomiast wykres $J(E)$ przecina ten obszar - przypadek 2 zachodzi w przybliżeniu stan stabilności globalnej, w pewnym obszarze dopuszczalnych odchyleń od równowagi. Postać funkcji opisującej $J(E)$ jest zależna od

typu nieliniowości statycznej $f(e)$ i tym samym można określić – w przybliżeniu – obszar dopuszczalnych zmian parametrów czło- nu nieliniowego $f(e)$ jeśli uda się powiązać funkcję $f(e)$ z po- stacią funkcji $J(E)$, tj. rozwiązać odpowiednie zadanie odwrotne, gdyż funkcję opisującą wyznacza się w stosunkowo prosty sposób przy znanej funkcji $f(e)$.

Jeśli zmienić wartość któregoś z parametrów transmitancji ga- łączy liniowej – zmienia się obszar stabilny $D(n,0)$ i analizę można wykonać także i pod tym kątem.

2. Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego: wyznaczenie $f(e)$ przy zadanym $J(E)$

Dla nieliniowości statycznej $f(e)$ funkcję opisującą określają znane zależności:

$$J(E) = \frac{C_1(E) + j \cdot C_2(E)}{E} \tag{2}$$

gdzie:

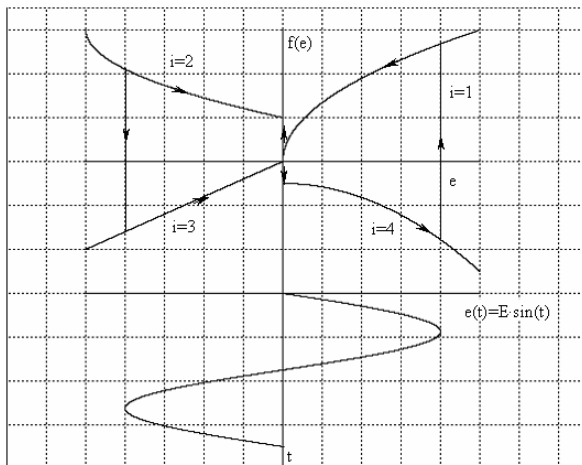
$$C_1(E) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(E \cdot \sin t) \cdot \sin t \cdot dt$$

$$C_2(E) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(E \cdot \sin t) \cdot \cos t \cdot dt$$

Rozwiązanie ogólne zagadnienia odwrotnego podane np. w [3] wydaje się zbyt skomplikowane, by mogło mieć tu praktyczne znaczenie, wiele podręczników, w tym również [3], [4] podaje natomiast bogate zestawienia funkcji opisujących dla rozmaitych nieliniowości, a nawet ogólniejsze zależności przy aproksymacji nieliniowości linią łamaną, co jednak nie rozwiązuje sprawy.

Przypuśćmy, że nieliniowość $f(e)$ jest określona w postaci sumy składników $|e|^q$ dla różnych wartości dodatnich $q > 0$ ze współczynnikami proporcjonalności $a_{q,i}$ różnymi dla różnych ćwiartek $i = 1, 2, 3, 4$ wykresu $f(e)$ (rys. 3) zgodnie z zależnością:

$$f(e) = \sum_q a_{q,1} \cdot |e|^q \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 + \operatorname{sgn} e) \cdot (1 - \operatorname{sgn} e) + \sum_q a_{q,2} \cdot |e|^q \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 - \operatorname{sgn} e) \cdot (1 - \operatorname{sgn} e) + \sum_q a_{q,3} \cdot |e|^q \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 - \operatorname{sgn} e) \cdot (1 + \operatorname{sgn} e) + \sum_q a_{q,4} \cdot |e|^q \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 + \operatorname{sgn} e) \cdot (1 + \operatorname{sgn} e) \tag{3}$$



Rys. 3. Wykres funkcji $f(e)$ z rozbiem na poszczególne ćwiartki $i = 1, 2, 3, 4$ płaszczyzny $e, f(e)$
 Fig. 3. Function $f(e)$ for four ($i = 1, 2, 3, 4$) quadrants of plane $e, F(e)$

Ponieważ dla $e(t) = E \cdot \sin t$ obowiązują wzory [5]:

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} E^q |\sin t|^q \cdot \sin t \cdot dt = E^q \cdot \frac{2^q}{\pi} \cdot \frac{\Gamma^2\left(1 + \frac{q}{2}\right)}{\Gamma(2 + q)} = E^q \cdot R(q)$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} E^q |\sin t|^q \cdot \cos t \cdot dt = E^q \cdot \frac{1}{\pi \cdot (q + 1)} = E^q \cdot I(q) \tag{4}$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} E^q \cdot |\sin t|^q \cdot dt = E^q \cdot R(q - 1)$$

zatem uwzględniając odpowiednie znaki zależności (4) dla kolej- nych ćwiartek okresu czasu $0..2\pi$ otrzyma się:

$$J(E) = \sum_q E^{q-1} \cdot \{R(q) \cdot (a_{q,4} + a_{q,1} - a_{q,2} - a_{q,3}) + j \cdot I(q) \cdot (a_{q,4} - a_{q,1} - a_{q,2} + a_{q,3})\} \tag{5}$$

Ostatni z wzorów (4) pozwala obliczyć składową stałą w przebie- gu sygnału $x(t)$:

$$\bar{x} = \sum_q E^q \cdot R(q - 1) \cdot (a_{q,4} + a_{q,1} + a_{q,2} + a_{q,3}) \tag{6}$$

Ponieważ jej istnienie komplikuje posługiwanie się metodą funkcji opisującej wygodnie jest przyjąć $\bar{x} = 0$, co prowadzi do warunku

$$a_{q,4} + a_{q,1} + a_{q,2} + a_{q,3} = 0 \tag{7}$$

który upraszcza nieco wzór (5).

Rezygnując z ułamkowych wartości potęg q i przyjmując dla kolejnych ćwiartek płaszczyzny $e, f(e)$ zależność:

$$f(e) = \sum_{r=0}^{r=n} a_{r,i} \cdot e^r, \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{8}$$

otrzyma się warunki braku składowej stałej $\bar{x} = 0$:

$$a_{2k,4} + a_{2k,1} + a_{2k,2} + a_{2k,3} = 0$$

$$a_{2k+1,4} + a_{2k+1,1} - a_{2k+1,2} - a_{2k+1,3} = 0 \tag{9}$$

oraz po ich uwzględnieniu funkcję opisującą:

$$J(E) = \frac{2}{\pi} \cdot \left\{ \frac{1}{E} \cdot (a_{0,4} + a_{0,1}) + \frac{2}{3} \cdot E \cdot (a_{2,4} + a_{2,1}) + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot E^3 \cdot (a_{4,4} + a_{4,1}) + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot E^5 \cdot (a_{6,4} + a_{6,1}) + \dots \right\} + \left\{ \frac{1}{2} \cdot (a_{1,4} + a_{1,1}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot E^2 \cdot (a_{3,4} + a_{3,1}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot E^4 \cdot (a_{5,4} + a_{5,1}) + \dots \right\} + j \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left\{ \frac{1}{E} \cdot (a_{0,4} + a_{0,3}) + (a_{1,4} - a_{1,3}) + \frac{E}{3} \cdot (a_{2,4} + a_{2,3}) + \frac{E^2}{4} \cdot (a_{3,4} - a_{3,3}) + \frac{E^3}{5} \cdot (a_{4,4} + a_{4,3}) + \frac{E^4}{6} \cdot (a_{5,4} - a_{5,3}) + \dots \right\} \tag{10}$$

Podane zależności (3), (5) oraz (8), (10) pozwalają na proste powiązanie postaci $f(e)$ z postacią funkcji opisującej. I tak – jeśli dla przykładu

$$J(E) = a_1 - \frac{3}{4} \cdot a_3 \cdot E^2 - j \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{a_0}{E}$$

to

$$f(e) = a_1 \cdot e - a_3 \cdot e^3 - a_0 \cdot \text{sgn}(\dot{e}) \quad (11)$$

W obu rozpatrywanych zależnościach zarówno części rzeczywiste jak i urojone funkcji opisującej zmieniają się w granicach $(0, \pm\infty)$ można jednak wprowadzić funkcje $f(e)$ powiązane w prosty sposób z funkcjami opisującymi zmiennymi w węższych granicach.

Dla $f(e) = \frac{2}{\pi} \cdot B \cdot \text{arctg}(k \cdot e) - B_1 \cdot a \cdot e \cdot \exp(-a \cdot |e|) \cdot \text{sgn}(\dot{e})$ otrzymuje się przybliżoną (z dużą dokładnością) postać funkcji opisującej:

$$J(E) \cong 0.811 \cdot B \cdot \text{arctg}(0.72 \cdot k \cdot e) - j \cdot \frac{0.62 \cdot B_1 \cdot a}{1 + 0.46 \cdot (a \cdot E) + 0.36 \cdot (a \cdot E)^2}$$

a można operować także np. sumami odpowiednich składników.

3. Przykłady przybliżonej oceny odporności

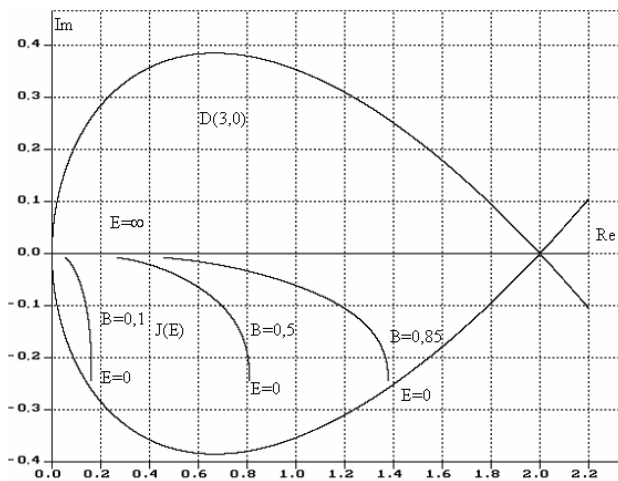
Założymy, że liniowa gałąź układu posiada transmitancję o postaci:

$$K(s) = \frac{1}{s \cdot (1 + s)^2}$$

i tym samym odwzorowanie granicy pierwiastków stabilnych i niestabilnych $s = j\omega$, dla $\omega = -\infty \dots \infty$ posiada postać:

$$\frac{-1}{K(j\omega)} = 2 \cdot \omega^2 - j \cdot \omega \cdot (1 - \omega^2)$$

a obszar $D(3,0)$ [6] pokazano na rys. 4.

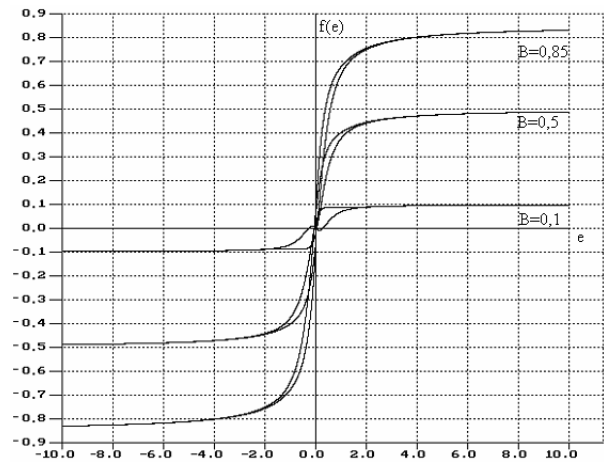


Rys. 4. Obszar $D(3,0)$ i wykresy funkcji opisującej $J(E)$ dla przykładu 1
Fig. 4. The area $D(3,0)$ and describing functions $J(E)$ referring to example 1

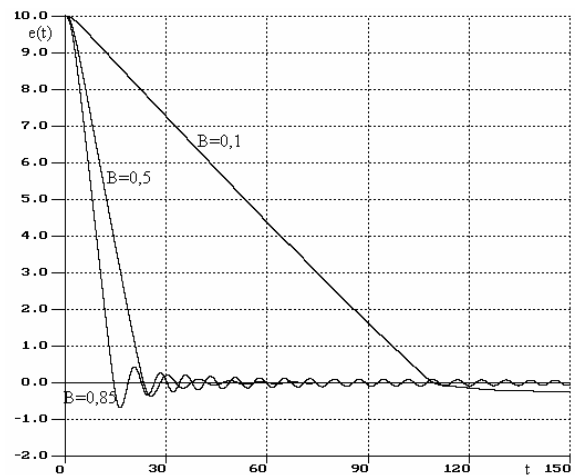
W pierwszym przykładzie przyjmujemy postać funkcji opisującej (12). Jej wykresy na tle obszaru $D(3,0)$ dla $k = 2.777$, $B_1 = 0.1$, $a = 4$, oraz $B = 0.1, 0.5$ i 0.85 pozwalają wnioskować, że układ z transmitancją gałęzi liniowej $K(s)$ i odpowiednią nieliniowością $f(e)$ przy zmianach parametru B w granicach $0.1 \dots 0.85$ okaże się stabilny totalnie. Odpowiednie wykresy charakterystyk $f(e)$ pokazano na rys. 5, a przebiegi $e(t)$ na rys. 6 potwierdzają ten wniosek.

W drugim przykładzie przy identycznej transmitancji gałęzi liniowej przyjmujemy dla funkcji opisującej $J(E)$ i charakterystyki

statycznej $f(e)$ gałęzi nieliniowej zależności (11) przy $a_1 = 1.5$, $a_0 = 0.1$, oraz a_3 zmiennym w granicach od -0.01 do 0.02 .

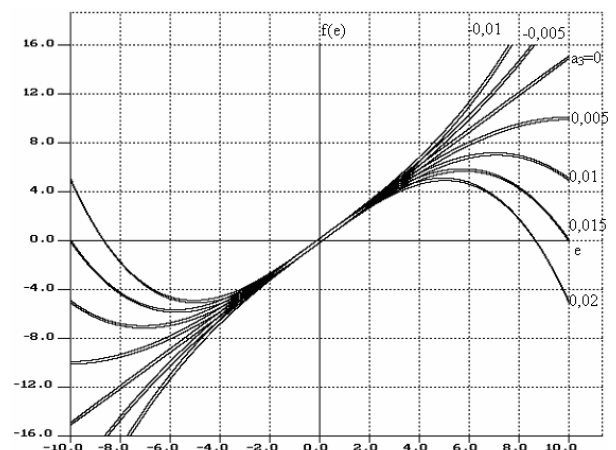


Rys. 5. Wykresy charakterystyk $f(e)$ gałęzi nieliniowej układu dla przykładu 1
Fig. 5. The nonlinear loop characteristics $f(e)$ considered in example 1

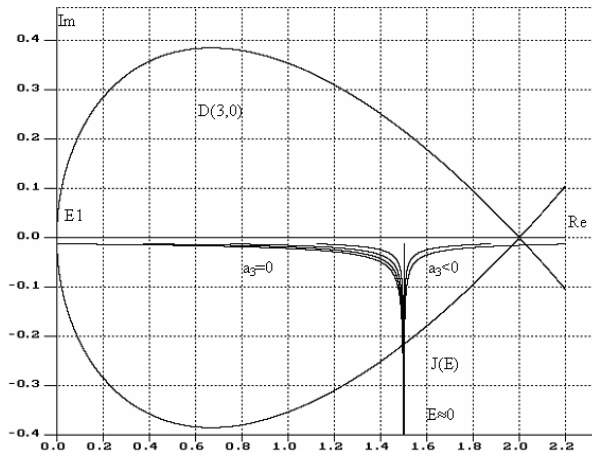


Rys. 6. Przebiegi $e(t)$ przy warunkach początkowych $e(0)=10$, $\dot{e}(0)=0$, $\ddot{e}(0)=0$ dla $B=0.1, 0.5, 0.85$ w przykładzie 1
Fig. 6. Errors $e(t)$ obtained in example 1 for initial conditions $e(0) = 10$, $\dot{e}(0)=0$, $\ddot{e}(0)=0$ and $B = 0.1, 0.5, 0.85$ respectively

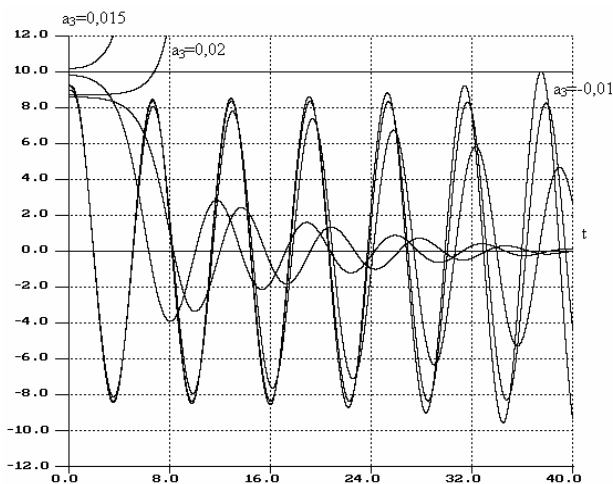
Odpowiednie wykresy $f(e)$ pokazano na rys. 7, a wzajemne usytuowanie wykresów funkcji opisującej i obszaru $D(3,0)$ na rys. 8.



Rys. 7. Wykresy charakterystyk $f(e)$ gałęzi nieliniowej układu dla przykładu 2
Fig. 7. Characteristics $f(e)$ of nonlinear loop referring to example 2



Rys. 8. Obszar $D(3,0)$ i wykresy funkcji opisującej $J(E)$ dla przykładu 2
 Fig. 8. The area $D(3,0)$ and describing functions $J(E)$ referring to example 2



Rys. 9. Przebiegi $e(t)$ w przykładzie 2 dla $a_3 = -0.01, 0.015, 0.02$ przy warunkach początkowych bliskich granicy stabilności
 Fig. 9. Signals $e(t)$ obtained in example 2 for $a_3 = -0.01, 0.015, 0.02$ and initial conditions located in neighborhood of stability boundary

W tym przypadku zarówno przy bardzo małych, jak i odpowiednio dużych wartościach amplitudy E wykres funkcji opisującej wykracza poza granice obszaru $D(3,0)$, więc układ wykazuje jedynie stabilność globalną, a jego zachowanie ilustrują wykresy przebiegów $e(t)$ pokazane na rys. 9 w przybliżeniu odpowiadające przewidywaniom.

4. Podsumowanie

Metoda – choć przybliżona – wydaje się przydatna w praktyce. W gruncie rzeczy jest ona odpowiednikiem klasycznej metody funkcji opisującej w badaniu stabilności układów nieliniowych, ale „manipulowanie” wykresem funkcji opisującej względem obszaru $D(n,0)$ i wnioskowanie o dopuszczalnych obszarach zmian parametrów członu nieliniowego $f(e)$ wydaje się korzystniejsze, jeśli znane jest powiązanie funkcji opisującej z postacią $f(e)$, a więc rozwiązanie zadania odwrotnego, zwłaszcza – że wykres $D(n,0)$ można utworzyć także dla zadanego zapasu stabilności $s = j\omega - p$.

5. Literatura

- [1] Busłowicz M.: Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach. Dział Wyd. Politechniki Białostockiej, Seria Rozpraw Naukowych Nr 48, Białystok 1997.
- [2] Busłowicz M.: Analiza odporności liniowych obrotów elektrycznych odpornej stabilności liniowych obwodów elektrycznych o niepewnych parametrach. Przegląd Elektryczny 11/2006, str. 112-116.
- [3] Gibson J. E.: Nieliniowe układy sterowania automatycznego. WNT Warszawa 1968
- [4] Popow E. P., Paltow I.P.: Przybliżone metody badań nieliniowych układów automatycznych. WNT Warszawa 1964.
- [5] Rzyk I.M., Gradsztajn I.S.: Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów, PWN Warszawa 1964.
- [6] Węgrzyn S.: Podstawy automatyki. PWN Warszawa 1963.

Artykuł recenzowany

INFORMACJE

Doktorat honorowy



Prof. dr hab. inż. Stanisław Adamczak Dziekan Wydziału Mechatroniki i Budowy Maszyn Politechniki Świętokrzyskiej otrzymał doktorat honorowy Sumskiego Uniwersytetu Państwowego w Sumach (Ukraina), przyznanego przez Senat Uczelni, jako uznanie za aktywną międzynarodową współpracę z wieloma uczelniami technicznymi w Europie, a w szczególności za długoletnie kontakty naukowe z Wydziałem Matematyczno-Fizycznym,

reprezentowanym przez Kierownika Katedry Mechaniki i Dynamiki Maszyn prof. Władimira A. Marcinkowskiego.

Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn Politechniki Świętokrzyskiej reprezentowany przez zespoły badawcze profesora Bogdana Antoszewskiego i profesora Czesława Kunderę realizuje aktywnie współpracę naukową, która przyczynia się do rozwoju badań dotyczących problemów projektowania, technologii i eksploatacji oraz diagnostyki maszyn wirnikowych, pomp i sprężarek. Uroczystość wręczenia tytułu doktora honorowego odbyła się 24. 11. 2006r w Sumach i zbiegła się z Jubileuszem 80-lecia profesora Władimira A. Marcinkowskiego.