

Mykhaylo DOROZHOVETS¹, Zygmunt L. WARSZA

¹POLITECHNIKA RZESZOWSKA

Wyznaczanie niepewności typu A pomiarów o skorelowanych rezultatach obserwacji

Prof. dr hab. inż. Mykhaylo DOROZHOVETS

Jest absolwentem (1975) Katedry Techniki Informatyko-Pomiarowej Politechniki Lwowskiej, tytuł doktora nauk technicznych uzyskał w 1986 r. a w 2001 r. obronił pracę habilitacyjną. Obecnie jest zatrudniony na stanowisku profesora w Zakładzie Metrologii i Systemów Pomiarowych Politechniki Rzeszowskiej. W pracy naukowo-badawczej zajmuje się zagadnieniami pomiarów tomograficznych, problemami przetwarzania sygnałów pomiarowych oraz analizą i oceną niedokładności wyników pomiarów.



e-mail: michdor@prz.edu.pl

Dr inż. Zygmunt L. WARSZA

Ukończył Miernictwo El. (1959) i doktorat (1967) w Politechnice Warszawskiej, powołany na docenta w 1970 r. przez CK za dorobek równoważny habilitacji. Autor lub współautor dwu monografii (z techniki hallotronowej oraz nowej klasy mostków dwuprądowych), kilkudziesięciu publikacji (kilkanaście zagranicznych), wielu prac badawczo-konstrukcyjnych i kilkunastu patentów. Specjalizował się w wielu dziedzinach pomiarów wielkości elektrycznych, magnetycznych i nieelektrycznych.



e-mail: zlw@op.pl

Streszczenie

Omówiono zasięg i ograniczenie zasad wyznaczania parametrów niepewności pomiarów wg zaleceń międzynarodowych zawartych w publikacji nazywanej akronimem GUM [1, 2]. Podano propozycję rozszerzenia zakresu stosowania obliczeń niepewności wyznaczanej metodą typu A obejmującą uwzględnienie w pomiarach wpływu skorelowania skorygowanych obserwacji. Polega ona na wprowadzeniu efektywnej liczby obserwacji. Jest ona mniejsza od rzeczywistej i oblicza się ją z funkcji autokorelacji. Proponowane rozszerzenie metody obliczeń niepewności typu A zilustrowano przykładem liczbowym zawierającym też jako poprzedzające operacje usunięcie trendu z „surowych” wartości obserwacji i sprawdzenie wybranego typu rozkładu.

Słowa kluczowe: niepewność typu A, autokorelacja, rozkład prawdopodobieństwa.

Evaluation of the uncertainty type A of autocorrelated measurement observations

Abstract

Principles of the estimation of uncertainty parameters introduced by the international guide named by acronym GUM [1] are given and their scope and limitations are discussed. Proposals of expanding the application range of the uncertainty evaluated by the type A method to the measurement in the case of correlated observations are presented. Effective number of observations is introduced, smaller than real one. It is calculated from the autocorrelation function of corrected observations. Proposed method has been illustrated by the numerical example included also as the beginning operations the linear trend elimination from uncorrected observation results and testing the chosen type of distribution.

Keywords: type A uncertainty, autocorrelation, random distribution.

1. Wstęp

Metoda wyznaczania wyniku pomiarów i opisu jego niedokładności poprzez niepewność została ujednoczona w skali międzynarodowej w publikacji ISO znanej pod akronimem GUM [1, 2]. Służby Miar i akredytowane laboratoria od kilku lat stosują już te zalecenia. Rozpowszechniają się też one coraz bardziej w praktyce pomiarowej w monitoringu procesów przemysłowych, badaniu materiałów i urządzeń oraz w eksploatacji. Wszystkie zawarte w GUM operacje stanowią procedurę odtwarzania zbioru możliwych wartości wielkości mierzonej x z wartości sygnałów lub odczytów obserwacji pomiarowych. Przebiega ona w kierunku odwrotnym niż sygnał w początkowej części toru pomiarowego. Realizacja może odbywać się:

- w dalszej, zwykle skomputeryzowanej części toru pomiarowego, w sposób niejawni i praktycznie na bieżąco (on line) poprzez operacje na otrzymywanych kolejno wartościach sygnałów poszczególnych obserwacji.

- poza systemem pomiarowym (off line), na drodze obliczeń z wartości wyników obserwacji (odczytów), zwykle obecnie skomputeryzowanych.

W szczególnych przypadkach występują w praktyce pomiary o dominującej jednej z wyznaczanych według GUM niepewności, tj.:

- $u_A(x)$ obliczanej tylko metodami statystycznymi – np. w badaniu szumów, wahań parametrów napięcia sieci, parametrów środowiska, przepływów niestacjonarnych lub innych obiektów o parametrach silnie przypadkowo zmiennych,
- $u_B(x)$ wyznaczanej w inny sposób – np. pomiary w obwodach prądu stałego, pomiary parametrów RLC itp.

W tej publikacji omówiono wyznaczanie niepewności $u_A(x)$ dla skorelowanych obserwacji.

2. Zasady obliczania niepewności typu A

Pierwszą czynnością poprzedzającą obliczanie niepewności $u_A(x)$ jest identyfikacja i wyeliminowanie z wyników obserwacji wpływów oddziaływań systematycznych. Trzeba wziąć pod uwagę, że zależnie od długości czasu zbierania obserwacji pomiarowych ta sama składowa niepewności może występować jako zdeterminowana lub jako losowa np. wywołana wahaniami temperatury otoczenia w krótkim lub długim czasie zbierania obserwacji pomiarowych [4, 5]. Wszystkie pozostałe składowe wywołujące niepewność pomiarów, niezależnie od przyczyny ich powstania i charakteru oddziaływania, traktuje się już łącznie w jednolity sposób – tj. według zasad statystyki.

Według zaleceń GUM niepewność standardową $u_A(x)$ mierzonej wartości x wyznacza się jako eksperymentalne odchylenie standardowe serii n wyników obserwacji pomiarowych o wartościach q_i skorygowanych przez poprawki. Stosuje się następujący cykl obliczeń:

Wartość średnia:

$$\bar{x} = \bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i \quad (1)$$

gdzie: $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ - skorygowane wartości obserwacji, n - liczba - obserwacji.

Ocena wariancji próbki i jej odchylenia standardowego eksperymentalnego:

$$s^2(q_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2 \quad (2)$$

$$s(q_i) = \sqrt{s^2(q_i)} \quad (3)$$

Niepewność standardowa typu A:

$$u_A(x) = s(\bar{q}) = \frac{s(q_i)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2} \quad (4)$$

Niepewność A jest odchyleniem standardowym eksperymentalnym skorygowanych obserwacji próbki i stanowi estymatę średniej całej populacji.

Teoretyczne założenia powyższej metody obliczeń są następujące:

- 1) wyniki obserwacji nie są skorelowane (są niezależne statystycznie) i o jednakowej wadze
- 2) dla rozkładu prawdopodobieństwa, który odwzorowuje z zadanym poziomem istotności ich populację, parametry $\bar{x} \equiv \bar{q}$, $s(q_i)$ dają się wyznaczyć i stanowią ocenę niedokładności.

W obliczeniach niepewności standardowej $u_A(x)$ i rozszerzonej $U(x)$ należy też brać pod uwagę niepewność ich wyznaczenia. Przy próbie o ograniczonej liczbie n niezależnych statystycznie obserwacji pomiarowych o rozkładzie normalnym wykorzystuje się rozkład Studenta. W [1] (tabela E.1) podano, że względna

niepewność wyznaczenia $u_A(x)$ zależy w przybliżeniu od $\sqrt{\frac{2}{n-1}}$,

a więc wzrasta znacznie, nawet do kilkudziesięciu %, przy małej liczbie n .

Warto tu podkreślić, że podany w Przewodniku GUM sposób wyznaczania parametrów niepewności $u_A(x)$ jest praktycznie tożsamy ze stosowanym wcześniej dla pozornych błędów przypadkowych. Jedynie terminologia jest inna.

Z samego zbioru wartości obserwacji pomiarowych nie można bezpośrednio, tj. bez dodatkowej kalibracji, wyeliminować bieżących wpływów oddziaływań stałych w danej serii pomiarów, lecz o nieznanach wartościach. Mogą być one inne w każdej z serii obserwacji pozyskiwanych w pełnym okresie badań obiektu oraz okresie eksploatacji przyrządu, w tym wskutek zmian warunków pomiaru i parametrów wewnętrznych. Przy pojawieniu się nierozpoznanego trendu nawet w przybliżeniu liniowego, jeżeli nie zastosuje się jego korekcji, to wartość średnia z wyników obserwacji będzie obciążona przesunięciem o nieznaną wartość, a obserwacje nie będą opisane procesem stacjonarnym (o parametrach statystycznych stałych podczas zbierania obserwacji). Wartość średnia nie ulegnie zmianie jedynie dla składowych oscylacyjnych o liczbie okresów w próbie będących wielokrotnością okresu ΔT próbkowania równomiernego. Jeśli jednak nie są one wyeliminowane, to powiększają niepewność $u_A(x)$.

W każdej z serii obserwacji pomiarowych można zidentyfikować oddziaływania systematyczne progresujące (trend) i periodyczne, ale wymaga to zastosowania odpowiedniego przetwarzania sygnałów lub procedur obliczeniowych „off line”, takich jak metoda regresji, filtracja cyfrowa, przekształcenie FFT itp.

Szersze zastosowanie zaleceń Przewodnika natrafia na ograniczenia w wielu rodzajach pomiarów stosowanych w badaniach, naukowych i technicznych oraz w przemyśle i eksploatacji. Niedostatkami zaleceń Przewodnika jest między innymi nie branie pod uwagę kolejności i wzajemnej zależności obserwacji (odczytów). Uniemożliwia to wyznaczenie niepewności wielu pomiarów, w których wielkość mierzona, zmiany parametrów obiektu mierzonych i toru pomiarowego oraz wielkości wpływające trzeba modelować procesami stochastycznymi stacjonarnymi i niestacjonarnymi jako opisem najbliższym rzeczywistości [5].

Pomimo wprowadzenia pojęcia niepewność jako miary niedokładności pomiarów, opisy metrologiczne właściwości przyrządów i przetworników nadal w dominującym stopniu należy opierać na błędach granicznych podstawowych, podawanych dla znamionowych warunków pracy oraz błędach granicznych dodatkowych dla dopuszczalnych odchyłek parametrów, gdyż nie można przewidzieć wszystkich sytuacji, które mogą wystąpić przy stosowaniu tych przyrządów w praktyce pomiarowej.

Istniejące przepisy metrologiczne nie nadążają za potrzebami praktyki pomiarowej. Rozszerzenie zakresu stosowania pojęcia niepewność wymaga rozwinięcia metod zawartych w Przewodniku. Takie prace prowadzi wiele ośrodków na świecie, w tym we współpracy międzynarodowej. W tej publikacji omawia się propozycję rozszerzenia metody obliczeń niepewności typu A na pomiary o skorelowanych obserwacjach. Wynikła ona z praktyki i jest dla niej przeznaczona. Ilustruje się ją przykładem liczbowym.

Rozważa się proces pomiarowy w całości, tj. wejście - wielkość mierzona, wyjście - wynik pomiarów. Przyjmuje się, że wartość rzeczywista wielkości mierzonej jest dostępna na wejściu toru pomiarowego i nie wyodrębnia się, ani nie lokalizuje miejsca występowania wpływów od poszczególnych oddziaływań i zakłóceń oraz od zmian parametrów wewnętrznych. Nie rozważa się też niedokładności pomiarów spowodowanej nieadekwatnością modelu obiektu badanego.

3. Wpływ autokorelacji pomiędzy wartościami wyników obserwacji

Współczesna technika umożliwia wykonywanie pomiarów cyfrowych z równomierną, stałą lub praktycznie dowolnie nastawianą częstością. Aby uzyskać większą liczbę pomiarów w ograniczonym czasie badań lub skrócić ten czas nawet celowo stosuje się gęstsze próbkowanie. Tymczasem rezultaty kilku sąsiednich obserwacji mogą być pomiędzy sobą skorelowane. Należy to sprawdzić i uwzględnić w oszacowaniu niedokładności, tym bardziej, że są zjawiska losowe intensywne przy małych częstotliwościach, np. szum $1/f$.

W krajowych i europejskich instrukcjach metrologicznych przeznaczonych do szerokiego stosowania w praktyce [1–4] i w podstawowych publikacjach o wyznaczaniu niedokładności pomiarów, np. [5–7, M1] nie uwzględniano dotychczas wpływu autokorelacji pomiędzy obserwacjami pomiarowymi na niepewność wyniku pomiaru zakładając, że obserwacje są niezależne. Drugi z autorów na wielu seminariach metrologicznych od lat sygnalizował taką konieczność osobom zajmującym się niepewnością i przepisami metrologicznymi, ale pozostało to bez skutku.

Konieczność uwzględniania wpływu autokorelacji w liczeniu niepewności u_A zauważono też w NIST (USA). Już po przygotowaniu tej pracy natrafiono na opracowywaną równolegle publikację N. F. Zhanga [8] na ten temat.

Gdy składowe deterministyczne są pomijalnie małe, bądź zostały wyeliminowane przez poprawki, zakłada się, że przebieg można w przybliżeniu opisać procesem stacjonarnym w okresie zbierania obserwacji i sprawdza się jego rozkład. Wyznacza się następnie unormowaną funkcję autokorelacji $\rho(k) \equiv \rho_k$ [4, 5, M2]. Dla ciągu n równomiernie pozyskanych obserwacji q_i wartości funkcji ρ_k opisuje wzór [M1, M2]:

$$\rho_k = \frac{1}{n-k} \frac{\sum_{i=1}^{n-k} (q_i - \bar{q})(q_{i+k} - \bar{q})}{s^2(q_i)} \quad (5)$$

gdzie: k – liczba okresów próbkowania między równomiernie pobranymi obserwacjami pomiarowymi.

Dla procesów stacjonarnych funkcja ρ_k jest symetryczna. Dokładność jej wyznaczenia maleje wraz ze wzrostem k i według [12] nie należy przekraczać np. wartości $k=n/4$.

3.1. Niepewność standardowa skorelowanych obserwacji

Niepewność standardową próbki n skorelowanych obserwacji pomiarowych q_i wyprowadza się z wariancji D wartości średniej funkcji liniowej skorelowanych n zmiennych losowych (18.5-22) z [M4].

$$D\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i q_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (6)$$

Dla n równomiernie próbkowanych obserwacji w próbie przy $a_0=0$, $a_i=1$ (jednakowe wagi) odchylenie standardowe wszystkich z nich jest jednakowe, tj. $\sigma_i = \sigma_j = \sigma$, gdyż pochodzą z tej samej populacji generalnej. W praktyce pomiarowej oblicza się estymatę standardowego odchylenia wartości średniej populacji na

podstawie wyników obserwacji z próbki przy zamianie σ na $s(q_i)$ według (2) i (3). Odchylenie standardowe średniej wynosi:

$$s(\bar{x}) = \sqrt{s^2(\bar{q})} = \frac{s(q_i)}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \rho_k} = \frac{s(q_i)}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + D_\rho} \quad (7)$$

gdzie: $\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \rho_k \equiv D_\rho$; k - odległość pomiędzy obserwacjami.

Z porównania (7) i (4) wynika:

$$s(\bar{x}) = s(\bar{q})_{GUM} \cdot \sqrt{1 + D_\rho} \quad (8)$$

Standardowe odchylenie wartości średniej skorelowanych obserwacji jest większe od wartości obliczonej wg GUM $\sqrt{1 + D_\rho}$ razy. Końcową część (7) można jeszcze dalej przekształcić otrzymując postać podobną do (4):

$$s(\bar{x}) = \frac{s(q_i)}{\sqrt{\frac{n}{1 + D_\rho}}} = \frac{s(q_i)}{\sqrt{n_{eff}}} \quad (9)$$

gdzie: $\frac{n}{1 + D_\rho} = n_{eff}$ - liczba obserwacji nieskorelowanych równoważnych liczbie obserwacji skorelowanych o unormowanej funkcji autokorelacji ρ_k .

Z (7) i (9) wynikają zapisane łącznie postacie nowego uogólnionego wzoru na niepewność standardową typu A $u_A(x) \equiv s(\bar{x})$ przy skorelowanych obserwacjach q_i :

$$u_A(x) = \sqrt{\frac{s^2(q_i)}{n} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \rho_k \right]} = \sqrt{\frac{s^2(q_i)}{n} (1 + D_\rho)} = \frac{s(q_i)}{\sqrt{\frac{n}{1 + D_\rho}}} \quad (10)$$

gdzie: $D_\rho = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \rho_k$ - człon uwzględniający korelację wyników obserwacji.

Wzór ten M. Dorożowicz przedstawił po raz pierwszy na Międzynarodowym Seminarium Metrologów w Politechnice Rzeszowskiej w 2006 r.

Jeżeli wyniki obserwacji są silnie skorelowane ($\rho_k \rightarrow 1$) to z (10):

$$D_\rho \rightarrow \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cdot 1 = n-1 \quad (11)$$

Wówczas: $n_{eff} \rightarrow 1$.

Jeżeli wyniki obserwacji nie są skorelowane ($\rho_k \rightarrow 0$), $k=0$ i wówczas:

$$D_\rho \rightarrow \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cdot 0 = 0 \quad (12)$$

Stąd: $n_{eff} \rightarrow n$. Otrzymuje się wzór taki, jak podany w [1].

Efektywna liczba stopni swobody przy skorelowanych wynikach obserwacji:

$$v_{eff} = n_{eff} - 1 = \frac{n}{1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \rho_k} - 1 \quad (13)$$

Dalej postępuje się jak dotychczas według zaleceń GUM.

W praktyce za nieskorelowane można traktować obserwacje pozyskiwane z badania sygnału losowego, gdy minimalny okres ΔT pomiędzy próbkami jest większy od połowy zastępczej szerokości funkcji autokorelacji ρ_k (szerokości prostokąta o wysokości 1 i polu takim jak pod tą krzywą). Dla krótszych okresów należy korzystać z powyższych wzorów, pełniejszych niż podane w [1], uwzględniających autokorelację. W tym celu konieczna jest znajomość czasu pozyskania każdej obserwacji, liczonego względem początku cyklu pomiarowego lub jej kolejnego numeru przy równomiernym próbkowaniu.

Do wyznaczenia przebiegu sygnału nieograniczonego czasowo i o częstotliwościowym paśmie szerokości: $0 - B$, zgodnie ze znanym warunkiem Nyquista potrzeba minimum dwa pomiary w trakcie okresu o najwyższej częstotliwości. Zaś maksymalna liczba niezależnych statystycznie obserwacji dla całkowitego czasu T równomiernego pobierania wszystkich próbek wynosi:

$$n_{eff\ max} = 2BT \quad (14)$$

i nie zwiększy się przy wyższej częstotliwości próbkowania. Przebieg sposobu postępowania prowadzącego do wyznaczenia n_{eff} ilustruje przykład 1.

3.2. Przykład obliczenia niepewności typu A przy skorelowanych obserwacjach

Woltomierzem cyfrowym o 4,5 znakach odczytu zmierzono napięcie na wyjściu pewnego badanego układu próbkując je w regularnych odstępach czasu. Uzyskano próbkę w postaci serii $n=121$ wyników obserwacji v_i o następujących wartościach w [V]:

1.2200	1.2080	1.2186	1.2263	1.2497	1.2725	1.2981
1.2731	1.2500	1.2286	1.2181	1.2183	1.2162	1.2247
1.2253	1.2108	1.2409	1.2529	1.2696	1.2577	1.2397
1.2300	1.2341	1.2562	1.2449	1.2378	1.2203	1.1920
1.2056	1.2092	1.2198	1.2227	1.2210	1.2134	1.2064
1.2138	1.2154	1.2220	1.2352	1.2479	1.2385	1.2277
1.2206	1.2320	1.2466	1.2679	1.2412	1.2279	1.1897
1.2123	1.2291	1.2498	1.2450	1.2343	1.2356	1.2420
1.2239	1.2101	1.2057	1.2044	1.2011	1.1940	1.1941
1.1836	1.1956	1.2002	1.2159	1.2142	1.1963	1.1840
1.1726	1.1657	1.1553	1.1726	1.1932	1.2146	1.1983
1.1904	1.1736	1.1874	1.2003	1.1950	1.1911	1.1754
1.1594	1.1748	1.1799	1.1817	1.1816	1.1907	1.1937
1.1982	1.1956	1.1977	1.1868	1.1684	1.1455	1.1648
1.2019	1.2126	1.2086	1.1885	1.1760	1.1729	1.1706
1.1692	1.1921	1.2036	1.2229	1.1996	1.1810	1.1609
1.1314	1.0975	1.0704	1.0845	1.0954	1.1146	1.1172
1.1148	1.1263					

Należy wyznaczyć najlepszą wartość wyniku pomiaru średniego napięcia tej serii obserwacji oraz ocenę niedokładności wyniku w postaci średniego odchylenia standardowego.

Rozwiązanie:

A. Usunięcie trendu

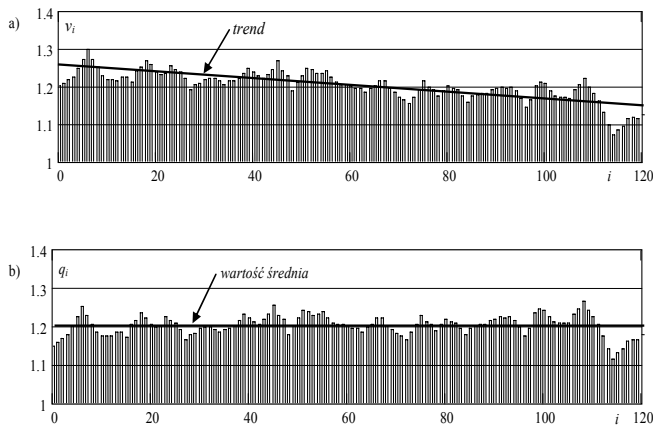
Na rys.1a przedstawiono „surowe” wartości obserwacji v_i w kolejności ich pozyskania. Widać tendencję zmniejszania się wraz z czasem (wzrostem numeru obserwacji i próbki). Są one obarczone trendem.

Sporządzono też podany na rys. 2a histogram „surowych” wyników obserwacji zawartych w próbce. Na osi x odłożono kolejne numery j przedziałów wartości obserwacji ($j=1, \dots, 8$), a na osi y częstość empiryczną $w_j = n_j/n$ (gdzie: n_j - liczba pomiarów

w przedziale j , n – liczba wszystkich pomiarów). Szerokość przedziałów wyznacza się z zależności:

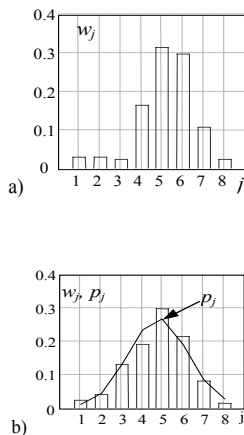
$$h = \frac{\max(v_i) - \min(v_i)}{m} = \frac{1,2709 - 1,1244}{8} = 0,018325$$

gdzie: $m=8$ liczba przedziałów.



Rys. 1. Zbiór kolejno otrzymanych wartości obserwacji pomiarowych badanego napięcia: a) - wyniki „surowe z trendem”, b) - po usunięciu trendu liniowego

Fig. 1. Set of the successively obtained measurement observations of tested voltage: a) - „rough” results, b) - after trend elimination



Rys. 2. Histogramy próbki: a) surowych wyników z rys 1a, b) po usunięciu trendu z rys 1a.

Fig. 2. Histogram of the sample: a) of “rough” results given on fig 1a, b) after trend elimination

Otrzymano kształt histogramu odbiegający od rozkładu normalnego. Również funkcja autokorelacji tych obserwacji obliczona według (5) i podana dalej w tekście na rys. 3a wykazuje istnienie trendu.

Stosując powszechnie znaną metodę najmniejszych kwadratów, opisaną np. w [M1], wyznaczono liniowe równanie trendu. Przyjmując jego wartość równą zeru dla środka próbki i stosując zależność

$$q_i = v_i - 1,2027 (n-60)$$

otrzymano skorygowane wartości obserwacji, które przedstawiono na rys. 1b. Należy wyznaczyć dla nich najlepsze oceny wyniku pomiaru i marę ich rozproszenia. Sporządzono nowy histogram podany na rys. 2b. Jego kształt jest podobny do rozkładu normalnego. Nie widać też, by w obserwacjach występowały składowe periodyczne. Ich wykrywaniu i eliminacji poświęci się inną publikację.

B. Sprawdzenie zgodności z rozkładem normalnym

Sprawdzenie wykonano przy wykorzystaniu kryterium χ^2 [M1-M4]. Wartość χ^2 wyznacza się ze wzoru:

$$\chi^2 = n \sum_{j=1}^m \frac{(w_j - p_j)^2}{p_j} \quad (15)$$

gdzie: p_j - prawdopodobieństwo dla przedziału j według rozkładu normalnego.

Wyznaczona z (15) wartość χ^2 wynosi:

$$\chi^2 = 121 \sum_{j=1}^8 \frac{(w_j - p_j)^2}{p_j} = 4,888$$

Przyjęto wymagany poziom zgodności $\alpha=0,05$. Oznacza on, że rozbieżność pomiędzy wynikami obserwacji, a założonym rozkładem nie powinna przekroczyć 5%. Z tablicy rozkładu $\chi^2_{v,\alpha}$ [M1] uzyskuje się wartość $\chi^2_{5,0,05}$ dla liczby stopni swobody $v = m - 2 - 1 = 5$ (pierwszy indeks) oraz wymaganego poziomu α (drugi indeks). Wartości obserwacji po usunięciu wpływu trendu liniowego podlegają normalnemu rozkładowi prawdopodobieństwa, gdyż spełniony jest warunek:

$$\chi^2 = 4,888 < \chi^2_{5,0,05} = 11,1$$

Nie ma podstaw by odrzucić hipotezę o normalnym rozkładzie wartości obserwacji i rozkład ten należy przyjąć do dalszych rozważań. Natomiast histogram „surowych” rezultatów obserwacji z rys. 2a nie spełnia tego kryterium, gdyż otrzymuje się:

$$\chi^2 = 34,36 > \chi^2_{5,0,05} = 11,1$$

Najlepszą oceną wyników pomiaru o rozkładzie normalnym jest wartość średnia. Należy ją oszacować wraz z jej niepewnością standardową. Z tych dwu parametrów wyznacza się inne miary niedokładności, w tym niepewność rozszerzoną bezwzględną i względną.

C. Wyznaczenie efektywnej liczby obserwacji i oceny dokładności wyniku skorelowanych pomiarów.

1) Wartość średnia próbki wynosi:

$$\bar{v} = q - \frac{1}{121} \sum_{i=1}^{121} v_i \approx 1,2027$$

Po eliminacji trendu wartość średnia próbki może już być obciążona tylko stałym przesunięciem, ponieważ jego wartość na początku obserwacji nie jest znana. Można to jedynie skorygować poprzez odpowiedni pomiar kalibrujący.

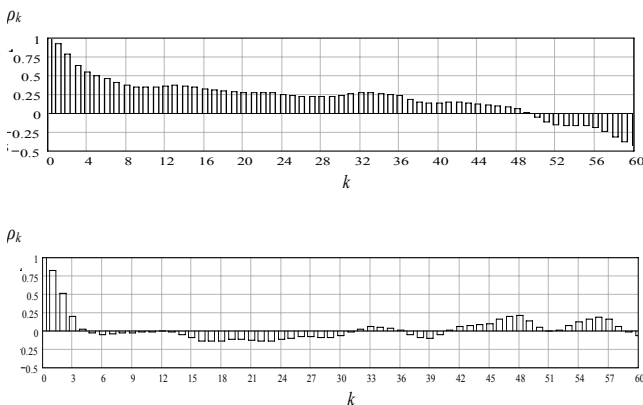
2) Standardowe odchylenie próbki:

$$s(q_i) = \sqrt{\frac{1}{121-1} \sum_{i=1}^{121} (q_i - \bar{q})^2} \approx 0,0264 \cdot$$

3) Wartości unormowanej funkcji autokorelacji ρ_k wyznacza się ze wzoru (5) [M1, M2]. Posługując się oprogramowaniem Mathcad obliczono wartości i przedstawiono na rys. 3a i b. Wartości ρ_k liczone dla dodatnich i ujemnych odległości k są takie same. Dokładność ich wyznaczania dla dużych k jest mała i niezbędne jest gęstsze próbkowanie oraz dłuższe serie pomiarowe niż na rys. 1a.

W przykładzie tym otrzymuje się wartości ρ_k , które przy małych k zmniejszają się wraz ze wzrostem k . Jest to cecha charakterystyczna funkcji autokorelacji procesów losowych, np. opisujących szumy. Dla kilku najkrótszych odległości pomiędzy próbkami, tj. $k=0, 1, \dots, m=8 \ll n=121$ wartości ρ_k liczone z dokładnością do czwartego miejsca po przecinku wynoszą:

1; 0,7757; 0,4612; 0,1934; 0,0869; 0,0478; 0,0353; 0,0259; 0,0072



Rys. 3. Unormowana funkcja autokorelacji obserwacji połowy próbki badanego napięcia: a) – dla wyników „surowych”, b) – po usunięciu liniowego trendu

Fig. 3. Normalized autocorrelation function of observations of the half tested voltage sample: a) - of "fresh" observation results, b) - after excluding the linear trend

4) Człon uwzględniający korelację między obserwacjami wynosi:

$$D_\rho \approx \frac{2}{121} \sum_{k=1}^{121-1} (121-k) \cdot \rho_k \approx 3,2118$$

5) Ekwiwalentna liczba nieskorelowanych obserwacji wynosi:

$$n_{eff} = \frac{n}{1 + D_\rho} = \frac{121}{1 + 3,21175} \approx 29$$

Tak więc podanej w przykładzie próbce zawierającej $n=121$ skorelowanych obserwacji jest równoważna próbka o średniej liczbie tylko 29 nieskorelowanych obserwacji!

6) Standardowa niepewność wartości średniej napięcia wynosi

$$u_A(\bar{v}) = \sqrt{\frac{s^2(q_i)}{n_{eff}}} = \frac{s(q_i)}{\sqrt{n_{eff}}} = \frac{0,02636}{\sqrt{29}} \approx 0,0049$$

7) Jeżeli nie uwzględniać korelacji pomiędzy wynikami obserwacji to standardowa niepewność wyniku pomiaru według zaleceń GUM byłaby następująca:

$$u_A(\bar{q}) = \sqrt{\frac{s^2(q_i)}{n}} \approx 0,0024$$

Ta ocena jest zbyt optymistyczna, tj. około 2 razy mniejsza niż przy uwzględnieniu autokorelacji.

8) Liczba stopni swobody:

$$v_{eff} = n_{eff} - 1 = 29 - 1 = 28$$

Przy $n=121$ skorelowanych wynikach obserwacji liczba stopni swobody wynosi zaledwie 28. Uwzględnia się ją przy wyznaczeniu niepewności wyników pomiaru wg rozkładu Studenta.

4. Wnioski

1. Przy ograniczonym czasie zbierania obserwacji, stosowanie w praktyce sposobu zmniejszenia niedokładności pomiarów polegającego na zwiększaniu liczności próbki przez wzrost częstotliwości próbkowania może być zawodne.
2. W celu uniknięcia omyłek przy wyznaczeniu wartości niepewności $u_A(x)$ należy najpierw upewnić się, czy wyniki obserwacji nie mają składowej systematycznej progresującej i periodycznej i czy nie są skorelowane. Z otrzymanych wyników obserwacji należy wyeliminować takie składowe i oszacować funkcję autokorelacji tych wyników. Korelacja niezbyt odległych od siebie obserwacji powoduje istotne zwiększenie niepewności wyniku pomiaru, gdyż zmniejsza się liczba niezależnych pomiarów i to ją trzeba uwzględniać przy szacowaniu niepewności standardowej. Wzory dla niepewności typu A obejmujące taki przypadek, podano w treści wraz z przykładem 1.
3. Istniejące programy komputerowe do obliczania niepewności typu A powinny być uzupełnione przez poprzedzenie ich algorytmami służącymi identyfikacji i eliminacji z „surowych” wyników obserwacji ich składowych progresujących i periodycznych oraz algorytmami do wyznaczania funkcji autokorelacji. Należy też zmodyfikować stosowane wzory, tak, aby uwzględnić w nich efektywną liczbę obserwacji.

5. Literatura

- [1] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, ISO 1992, revised and corrected 1995
- [2] Wyrażanie Niepewności Pomiaru. Przewodnik. Tłum. i komentarz J. Jaworskiego, Wydawnictwo Głównego Urzędu Miar, Alfávero, Warszawa 2002
- [3] International Vocabulary of Basic and General Terms In Metrology. 2nd ed. ISO 1993, wyd. polskie według tłumaczenia J. Dudziewicza, Główny Urząd Miar, Warszawa 1993
- [4] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, Supplement 1. Numerical Methods for the Propagation of Distribution – projekt dokumentu Międzynarodowego Biura Miar 16.03.2004
- [5] Piotrowski J. Kostyrko K.: Wzorcowanie Aparatury Pomiarowej, Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa 2000
- [6] Skubis T.: Podstawy metrologicznej oceny wyników pomiaru. Wyd. Politechniki Śląskiej Gliwice 2004
- [7] Rabinovich S.G.: Measurement Errors and Uncertainties Theory and Practice 3th ed. Springer 2005
- [8] Nien Fan Zhang: Calculation of the uncertainty of the mean of autocorrelated measurements. Metrologia 43 (2006) s.276-281

Uzupełniająca literatura matematyczna

- [M1] Tylor J.R.: Wstęp do analizy błęd pomiarowego. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995 (tłum. oryginału ang.: An Introduction to error analysis. The study of uncertainties in physical measurements Oxford University Press California 1982)
- [M2] Korn G. A., Korn T.M.: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers McGraw-Hill, Co. N. York San Francisco 1968 (tłum. pol.: Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów. PWN Warszawa 1983)