Przemysław ORŁOWSKI
POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA, INSTYTUT AUTOMATYKI PRZEMYSŁOWEJ

Modelowanie niepewności w opisie matematycznym układu dynamicznego

Dr inż. Przemysław ORŁOWSKI

Uzyskał dyplomy magistra inżyniera elektronika oraz magistra inżyniera elektryka w roku 1999 na Wydziale Elektrycznym Politechniki Szczecińskiej. Stopień naukowy doktora nauk technicznych uzyskał na tym samym Wydziale w roku 2002. Obecnie adiunkt w Instytucie Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej. Główne kierunki badań naukowych to analiza i synteza układów sterowania, w szczególności układy dyskretne, układy niestacjonarne i układy niepewne.

e-mail: orzel@ps.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono źródła i typy zaburzeń oraz niepewności występujących w układach dynamicznych, oraz szczegółowo opisano sposoby wprowadzania jej do modelu matematycznego układu. W ramach niniejszej pracy przeanalizowano sześć struktur niepewności: addytywną, w sprzężeniu zwrotnym wokół obiektu oraz multiplikatywną i w sprzężeniu zwrotnym zarówno na wejściu jak i wyjściu układu.

Słowa kluczowe: analiza niepewności, układy niepewne, model matematyczny, układy dynamiczne.

Uncertainty modelling for mathematical models of dynamical systems

Abstract

Mathematical modelling of uncertainty in dynamical systems is presented in the paper. Sources of uncertainties and perturbations are analysed. Perturbations are classified in four different classes. Uncertainty can be modelled using six different perturbation structures in the model: additive, subtractive, pre-, post- multiplicative, pre- and post- divisional. Properties of all analyzed structures are derived as well as upper bounds for analyzed perturbations.

Keywords: uncertainty analysis, uncertain systems, mathematical modeling, dynamical systems.

1. Wprowadzenie

Niepewność jest pojęciem używanym nie tylko w zakresie nauk technicznych ale również w wielu dziedzinach, m.in. takich jak: statystyka, ekonomia, finanse, ubezpieczenia, psychologia, filozofia. Odnosi się ono najczęściej do: wykonanych pomiarów wielkości fizycznych, przewidywań lub oczekiwań przyszłych wartości parametrów, zachowań i zdarzeń oraz do niewiadomych [1]. W zależności od tego w jakim kontekście jest ono używane definicje mogą się nieznacznie różnić. Przykładowo w metrologii używa się pojęcia ***niepewności pomiaru*** określającej liczbę, która jest pewną miarą zmiennej losowej charakteryzującej obserwację lub estymator.

Niepewność decyzji lub ***niepewność systemu*** oznacza sytuację w której wybranie danego wariantu lub danego sterowania pociąga za sobą możliwość wystąpienia różnych konsekwencji, przy czym nie jest możliwe określenie rozkładu prawdopodobieństwa tych zdarzeń. Z kolei ***parametr niepewny*** charakteryzuje ograniczony zbiór dopuszczalnych wartości łącznie z nieokreślonym rozkładem prawdopodobieństwa w tym zbiorze, (np. $x_\Delta \in \langle 1,2 \rangle$) alternatywnie używa się również pojęcia ***parametru przedziałowego*** [2] a w przypadku zbioru parametrów uwikłanych w pewną strukturę również pojęć ***macierzy przedziałowej*** i ***wielomianu przedziałowego*** [2].

W ogólności ***niepewność*** występuje wówczas gdy spełnione są łącznie dwa warunki: ograniczony zbiór wielkości dopuszczalnych (np. parametrów, konsekwencji) i nieokreślony rozkład prawdopodobieństwa w tym zbiorze. W przypadku gdy zbiór jest nieograniczony a rozkład prawdopodobieństwa nieznany wielkość będzie ***nieokreślona*** alternatywnie można też użyć pojęcia ***niepewności nieograniczonej***. Jeżeli natomiast rozkład prawdopodobieństwa jest znany wówczas wielkość będzie opisana tym rozkładem, a niepewność może być traktowana podobnie jak w metrologii, tj. jako pewna miara zmiennej losowej.

Dla każdego ograniczonego zbioru wielkości definiuje się ***wartość nominalną*** lub ***macierz nominalną***. W ogólności ***wartość nominalną*** definiuje się jako wielkość w odniesieniu do której pewna rzecz została nazwana lub do której w ogólności się odnosi [1]. Tak zdefiniowana wartość nominalna nie musi zawsze odzwierciedlać rzeczywistych cech danej rzeczy. Jedynym wymogiem formalnym w przypadku parametrów przedziałowych jest aby ***wartość nominalna*** zawierała się wewnątrz danego przedziału. Jeżeli są dostępne informacje odnośnie danej zmiennej losowej można przyjąć że ***wartość nominalna*** jest równa wartości oczekiwanej. W przypadku gdy dany jest jedynie przedział, bez określonego rozkładu prawdopodobieństwa, wówczas pojęcia ***wartości nominalnej*** używa się zazwyczaj w odniesieniu do wielkości zdefiniowanej jako średnia arytmetyczna kresu dolnego i górnego przedziału ograniczonego tj. $x = 0,5 \cdot \left(\sup\left(x_\Delta\right) + \inf\left(x_\Delta\right) \right)$, gdzie sup i inf są odpowiednio kresem górnym i dolnym dla pewnego ograniczonego parametru niepewnego x_Δ. W analogiczny sposób można wyznaczyć punkt nominalny w przestrzeni ograniczonej. Przyjęta definicja nie wymaga znajomości parametrów rozkładu, jest często stosowana w automatyce, gdzie zazwyczaj bada się wpływ niepewności parametrów układu na jego własności jako całości i ma ona na celu minimalizację normy ograniczonego z***aburzenia*** wiążącego w określony sposób wartość nominalną z niepewnością.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie wyników w zakresie modelowania niepewności w postaci zaburzeń w układach dynamicznych, metod ich wprowadzania i ograniczania, oraz źródeł powstawania.

2. Źródła niepewności

Własności modelu matematycznego układu często pokrywają się z własnościami układu fizycznego jedynie w przybliżeniu. Uproszczenia czynione przy projektowaniu układów sterowania są potencjalnymi źródłami niepewności i zawodności modelu. Najczęściej uproszczenia te są uzasadnione, lecz zawsze powinny być poprzedzone wcześniejszą analizą problemu. Zjawiska które prowadzą do takiego stanu rzeczy można podzielić na pięć następujących grup:

a) niedokładność wyznaczenia parametrów – stałe i parametry układu są często wyznaczane w drodze eksperymentu lub pomiarów dokonywanych przyrządami o skończonej dokładności; niemożność dokładnego wyznaczenia parametrów może wynikać też z istoty samego zjawiska, np. nieokreśloność położenia i pędu wynikająca z zasady Heisenberga,
b) niemożność wyznaczenia parametrów – w pewnych przypadkach parametrów nie można wyznaczyć w ogóle, szczególnie w systemach ekonomicznych, medycynie [3], jak również dla zjawisk, które są niepowtarzalne w swej naturze,
c) zmienność parametrów – modele niestacjonarne i nieliniowe dają możliwość uwzględnienia deterministycznych zmian parametrów, niemniej nie można w ten sposób uwzględnić zmian parametrów, szumów i zakłóceń o charakterze niedeterministycznym,

d) celowe pominięcie pewnych parametrów lub własności układu – dla każdego rzeczywistego systemu, uzyskanie większej dokładności jest związane ze zwiększaniem wymiarów przestrzeni stanu, często przyjmuje się wiele uproszczeń, takich jak np. pominięcie wpływu temperatury otoczenia, ciśnienia w układach fizycznych, powiązań i sympatii międzynarodowych w systemach ekonomicznych, czy samopoczucia pacjenta w medycynie,
e) nieliniowości, linearyzacja równań stanu – uproszczenia modelu matematycznego układu polegające na pomijaniu mniej istotnych własności, linearyzacji układu itp. są często warunkiem koniecznym, umożliwiającym nie tylko wykorzystanie analitycznych metod syntezy sterowania układu ale również zapewnienie efektywności metod numerycznych.

Metodą która umożliwia uwzględnienie nieznanych, lecz w pewnym zakresie możliwym do oszacowania w/w czynników jest wprowadzenie zaburzeń do modelu matematycznego układu. Pojawienie się niepewności może być zarówno działaniem celowym jak na przykład zamiana nieliniowości występującej w układzie na niepewność bądź też wynikiem nieuzasadnionych uproszczeń lub założeń (dostatecznej długości próbki, rozdzielczości kwantowania, częstotliwości próbkowania, wzajemnej niezależności podukładów, pomijalnie słabych sprzężeń wzajemnych, nieznacznych szumów pomiarowych, szumów kwantowania i szumów układu, nienasycania się sygnałów).

3. Model matematyczny układu dynamicznego

Jednym z bardziej ogólnych modeli układu dynamicznego jest opis w przestrzeni zmiennych stanu, w przypadku czasu ciągłego układ zaburzony jest opisany równaniami.

$$\dot{\mathbf{x}}_\Delta(t) = \mathbf{A}_\Delta \mathbf{x}_\Delta(t) + \mathbf{B}_\Delta \mathbf{u}(t), \tag{1}$$

$$\mathbf{y}_\Delta(t) = \mathbf{C}_\Delta \mathbf{x}_\Delta(t) + \mathbf{D}_\Delta \mathbf{u}(t), \tag{2}$$

oraz w przypadku dyskretnym

$$\mathbf{x}_\Delta(k+1) = \mathbf{A}_\Delta \mathbf{x}_\Delta(k) + \mathbf{B}_\Delta \mathbf{u}(k), \tag{3}$$

$$\mathbf{y}_\Delta(k) = \mathbf{C}_\Delta \mathbf{x}_\Delta(k) + \mathbf{D}_\Delta \mathbf{u}(k), \tag{4}$$

gdzie $\left\{\mathbf{x}_\Delta(k), \mathbf{x}_\Delta(t) \in \mathbf{R}^n\right\}$ jest zaburzonym stanem, $\left\{\mathbf{u}(k) \in \mathbf{R}^m\right\}$ sterowaniem, $\left\{\mathbf{y}_\Delta(k), \mathbf{y}_\Delta(t) \in \mathbf{R}^p\right\}$ zaburzonym wyjściem oraz $\mathbf{A}_\Delta \in \mathbf{R}^{n\times n}, \mathbf{B}_\Delta \in \mathbf{R}^{n\times m}, \mathbf{C}_\Delta \in \mathbf{R}^{p\times n}, \mathbf{D}_\Delta \in \mathbf{R}^{p\times m}$ są macierzami układu. W układach rzeczywistych zawsze występuje niezerowe opóźnienie pomiędzy wejściem i wyjściem, zatem $\mathbf{D}_\Delta = \mathbf{0}$ i czynnik $\mathbf{D}_\Delta \mathbf{u}(t)$ lub $\mathbf{D}_\Delta \mathbf{u}(k)$ może być w powyższych równaniach pominięty.

Układ będzie nazywany ***stabilnym*** jeżeli wszystkie wartości własne macierzy $\mathbf{A}_\star$ będą leżeć: w otwartej lewej półpłaszczyźnie dla układu ciągłego (1)–(2) oraz wewnątrz okręgu jednostkowego dla układu dyskretnego (3)-(4).

Prowadzone w dalszej części pracy rozważania opierają się normie euklidesowej l_2 określonej w następujący sposób

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_i x_i^2} \tag{5}$$

$$\|\mathbf{A}\| = \sigma_{\max}(\mathbf{A}) = \sqrt{\lambda_{\max}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)} = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1}\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \tag{6}$$

$$\sigma_{\min}(\mathbf{A}) = \sqrt{\lambda_{\min}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)} = \inf_{\|\mathbf{x}\|=1}\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \tag{7}$$

gdzie $\mathbf{x}$ jest wektorem, $\mathbf{A}$ jest macierzą, $\sigma_{\min}(\mathbf{A}), \sigma_{\max}(\mathbf{A})$ oznaczają odpowiednio minimalną i maksymalną wartość szczególną rozkładu według wartości szczególnych SVD, natomiast λ oznacza wartość własną macierzy. W formie przyjętej konwencji zmienne skalarne są w pracy oznaczone literami małymi pochyłymi, wektory – litery małe, wytłuszczone, macierze – wielkie litery, wytłuszczone. Indeks Δ przy zmiennej oznacza parametr niepewny, ta sama zmienna bez indeksu – jej wartość nominalną, Δ - zaburzenie, δ - oszacowanie dla zaburzenia.

4. Metody ograniczania zaburzeń macierzowych

Zaburzenia macierzowe mogą być ograniczone na wiele sposobów. Poniżej przedstawiono opis czterech metod ograniczania takich zaburzeń. Dla każdej metody podano oszacowanie iloczynu macierzy zaburzenia $\Delta^{\mathrm{T}}\Delta$. Macierz układu $\mathbf{A}$ jest zawsze macierzą kwadratową, niemniej jednak zaburzone mogą być również pozostałe macierze wejścia $\mathbf{B}$ i wyjścia $\mathbf{C}$. Zaproponowane w tym rozdziale oszacowania można stosować również dla macierzy prostokątnych.

4.1. Zaburzenie z ograniczoną normą

Jest to najprostszy typ zaburzenia. Brak jest danych odnośnie jego struktury wewnętrznej, stąd niepewność modelowana przy jego użyciu nosi nazwę ***niepewności niestrukturalnej***. Określona jest jedynie maksymalna wartość normy macierzy zaburzenia $\Delta \in \mathbf{R}^{m\times l}$, tzn.

$$\|\Delta\| \le \delta \tag{8}$$

gdzie δ jest znanym skalarem (oszacowaniem normy). Iloczyn macierzy zaburzenia można oszacować z zależności.

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\Delta^{\mathrm{T}}\Delta\right)\mathbf{x} \le \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\delta^2\mathbf{I}\right)\mathbf{x} \tag{9}$$

gdzie $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową.

4.2. Zaburzenie ograniczone strukturalnie

Ten typ zaburzenia jest opisany przy pomocy struktury tworzonej przez macierz zaburzenia wraz z dodatkowymi macierzami struktury $\mathbf{D}_1$ i $\mathbf{D}_3$. Zależność definiująca ma następującą postać:

$$\Delta = \mathbf{D}_1\mathbf{X}\mathbf{D}_3 \tag{10}$$

gdzie macierze $\mathbf{D}_1 \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $\mathbf{D}_3 \in \mathbf{R}^{n\times l}$ są znane, natomiast $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ jest nieznaną, nieujemnie określoną macierzą diagonalną kwadratową, dla której jest spełniony warunek $\|\mathbf{X}\| \le 1$. Iloczyn macierzy zaburzenia przybiera postać

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\Delta^{\mathrm{T}}\Delta\right)\mathbf{x} &= \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_1\mathbf{X}\mathbf{D}_3\mathbf{x} \\ &\le \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left\|\mathbf{D}_1\right\|^2\mathbf{D}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{D}_3\mathbf{x} \le \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\left\|\mathbf{D}_1\right\|^2\mathbf{D}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_3\right)\mathbf{x}\end{aligned} \tag{11}$$

4.3. Zaburzenie ograniczone wartościowo

Jest innym typem zaburzenia, występującym wówczas, gdy elementy macierzy $\Delta = \left\{d_{ij}\right\}_{n\times n}$ są nieznane, jednak każdy z nich jest ograniczony $\left|d_{ij}\right| \le \delta_{ij},\quad i,j = 1\ldots n$.

Zbiór ograniczeń elementów macierzy Δ tworzy nową macierz $\mathbf{D} = \left\{\delta_{ij}\right\}_{n\times n}$.

Dla dowolnego $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, można zapisać

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\Delta^{\mathrm{T}}\Delta\right)\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(d_{ij}x_j d_{ik}x_k\right) \\ &\le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(d_{ij}^2x_j^2 + d_{ik}^2x_k^2\right) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\bar{d}_{ij}^2x_k^2 = \mathrm{trace}\left(\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\right)\left\|\mathbf{x}\right\|^2\end{aligned} \tag{12}$$

gdzie **D** jest macierzą kwadratową o wymiarze n.

Macierz iloczynu macierzy zaburzenia można zatem zapisać

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\Delta^{\mathrm{T}}\Delta\right)\mathbf{x} \le \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{trace}\left(\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\right)\mathbf{I}\right)\mathbf{x}. \tag{13}$$

4.4. Zaburzenie ograniczone parametrycznie

W tym przypadku zaburzenie jest definiowane jako liniowa kombinacja znanych macierzy i nieznanych, ale ograniczonych wartości skalarnych. Definicja jest następująca

$$\Delta = d_1\mathbf{D}_1 + \cdots + d_k\mathbf{D}_k = \sum_{i=1}^{k} d_i\Delta_i \tag{14}$$

gdzie, d_i są ograniczonymi skalarami, takimi że $|d_i| \le \delta_i$, gdzie δ_i jest kresem górnym dla zbioru parametrów d_i a $\mathbf{D}_i$ znanymi macierzami. Macierz iloczynu zaburzenia można zapisać

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\Delta^{\mathrm{T}}\Delta\right)\mathbf{x} &= \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} d_i d_j \mathbf{D}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_j\right)\mathbf{x} \\ &\le \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(d_i^2\mathbf{D}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_i + d_j^2\mathbf{D}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_j\right)\right)\mathbf{x} \le \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(k\sum_{i=1}^{k}\delta_i^2\mathbf{D}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_i\right)\mathbf{x}\end{aligned} \tag{15}$$

5. Metody wprowadzania zaburzeń do układu

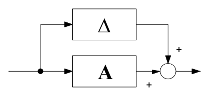
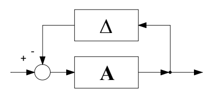
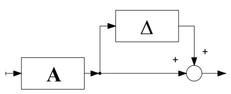
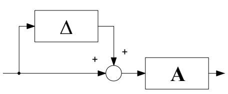
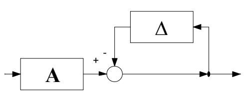
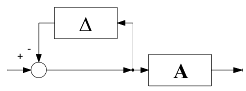
W przypadku skalarnego parametru niepewnego x_Δ z określoną wartością nominalną x zaburzenie Δ przyjmuje najczęściej strukturę addytywną (zaburzenie bezwzględne Δ_a) $x_\Delta = x + \Delta_a$ lub multiplikatywną (zaburzenie względne Δ_m) $x_\Delta = x(1+\Delta_m)$. Zaburzenia Δ_a, Δ_m są ograniczone wartościowo, tzn.

$$\max\left(x_\Delta - x\right) = -\min\left(x_\Delta - x\right) = \max\left(\Delta_a\right) = x \cdot \max\left(\Delta_m\right) \tag{16}$$

W układzie dynamicznym opisanym modelem w przestrzeni stanu może wystąpić wiele parametrów niepewnych. W takiej sytuacji parametry niepewne mogą być uwikłane w formie macierzowej. Zaburzenie Δ macierzy kwadratowej układu **A** można wprowadzić do układu w 6 następujących strukturach pokazanych w tabeli 1: addytywnej wykorzystywanej do modelowania addytywnych błędów modelu oraz niepewnych zer układu [4], w sprzężeniu zwrotnym wokół obiektu (subtraktywnej) najczęściej wykorzystywanej do modelowania niskoczęstotliwościowych błędów obiektu i zmiennych wartości biegunów układu, multiplikatywnej na wyjściu (post-multiplikatywnej) lub wejściu (pre-multiplikatywnej) wykorzystywanej do modelowania uproszczeń dynamiki w zakresie wysokich częstotliwości, zmiennych wartości zer układu i odpowiednio zaburzeń wyjściowych oraz wejściowych, w sprzężeniu zwrotnym na wyjściu (post-divisional) lub wejściu (pre-divisional) służące najczęściej do modelowania uproszczeń dynamiki w zakresie niskich częstotliwości, a także zmiennych wartości biegunów układu.

Analiza niepewności w układzie dynamicznym sprowadza się do badania wpływu poszczególnych zaburzeń na własności całego układu. Podstawowym wymaganiem stawianym układom sterowania jest zachowanie stabilności w warunkach niepewności. Układ ciągły jest stabilny, gdy $\underset{i}{\forall}\mathrm{Re}\left(\lambda_i\left(\mathbf{A}\right)\right) < 0$, natomiast układ dyskretny, gdy $\underset{i}{\forall}\left|\lambda_i\left(\mathbf{A}\right)\right| < 1$, gdzie $_i$ są wartościami własnymi macierzy **A** układu. Układ zaburzony będzie stabilny, gdy powyższe warunki będą spełnione dla zaburzonych macierzy układu, tj. $\underset{i}{\forall}\mathrm{Re}\left(\lambda_i\left(\mathbf{A}_\Delta\right)\right) < 0$ dla układu ciągłego i $\underset{i}{\forall}\left|\lambda_i\left(\mathbf{A}_\Delta\right)\right| < 1$ dla układu dyskretnego. Warunkiem podstawowym stabilności układu zaburzonego jest aby układ nominalny był stabilny. Dodatkowe warunki jakie musi spełnić zaburzenie, aby układ niepewny był stabilny dla wszystkich 6 struktur zebrano w tabeli 1, pozostałe macierze wejścia **B** i wyjścia **C** nie mają wpływu na stabilność układu.

Tab. 1. Struktury zaburzeń wraz z warunkami zachowania stabilności
Tab. 1. Perturbation structures with stability-preserving conditions

Nazwa i model matematyczny struktury	Schemat struktury zaburzenia	Warunek zachowania stabilności dla układu a) ciągłego b) dyskretnego
Addytywna $\mathbf{A}_\Delta = \mathbf{A} + \Delta$		a) $\left\|\Delta\right\| < \sigma_{\min}(\mathbf{A})$ b) $\left\|\Delta\right\| < \sigma_{\min}(\mathbf{I}+\mathbf{A})$
W sprzężeniu zwrotnym wokół obiektu $\mathbf{A}_\Delta = (\mathbf{A}^{-1}+\Delta)^{-1}$		a) $\left\|\Delta\right\| < \sigma_{\min}(\mathbf{A}^{-1})$ b) $\left\|\Delta\right\| < \sigma_{\min}(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1})$
Multiplikatywna na wyjściu $\mathbf{A}_\Delta = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{I}+\Delta)$		a) $\left\|\Delta\right\| < 1$ b) $\left\|\Delta\right\| < \sigma_{\min}(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1})$
Multiplikatywna na wejściu $\mathbf{A}_\Delta = (\mathbf{I}+\Delta)\cdot\mathbf{A}$		a) $\left\|\Delta\right\| < 1$ b) $\left\|\Delta\right\| < \sigma_{\min}(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1})$
W sprzężeniu zwrotnym na wyjściu $\mathbf{A}_\Delta = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{I}+\Delta)^{-1}$		a) $\left\|\Delta\right\| < 1$ b) $\left\|\Delta\right\| < \sigma_{\min}(\mathbf{I}+\mathbf{A})$
W sprzężeniu zwrotnym na wejściu $\mathbf{A}_\Delta = (\mathbf{I}+\Delta)^{-1}\cdot\mathbf{A}$		a) $\left\|\Delta\right\| < 1$ b) $\left\|\Delta\right\| < \sigma_{\min}(\mathbf{I}+\mathbf{A})$

Zależności podane w tabeli 1 można łatwo udowodnić. Przykładowo aby udowodnić, że zachodzi

$$\underset{i}{\forall}\mathrm{Re}\left(\lambda_i\left(\mathbf{A}_\Delta\right)\right) < 0 \Leftrightarrow \underset{i}{\forall}\mathrm{Re}\left(\lambda_i\left(\mathbf{A}\right)\right) < 0 \ \wedge\ \left\|\Delta\right\| < \sigma_{\min}\left(\mathbf{A}\right)$$

dla struktury addytywnej zostanie przeprowadzony dowód nie wprost. Jeżeli powyższy warunek miałby nie być spełniony, wówczas musi istnieć zaburzenie Δ, takie że $\underset{i,\Delta}{\exists}\lambda_i\left(\mathbf{A}_\Delta\right) = 0$, zatem

$$\det\left(\mathbf{A}_\Delta\right) = 0 \tag{17}$$

Dla struktury addytywnej zachodzi zależność $\mathbf{A}_\Delta = \mathbf{A} + \Delta$ i istnieje wektor własny $\mathbf{x}_i$ odpowiadający i-tej wartości własnej spełniający równanie $\left(\mathbf{A}+\Delta\right)\mathbf{x}_i = 0$, stąd $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = -\Delta\mathbf{x}_i$, zatem musi być też spełnione następujące równanie dla norm wektorowych: $\frac{\left\|\mathbf{A}\mathbf{x}_i\right\|}{\left\|\mathbf{x}_i\right\|} = \frac{\left\|\Delta\mathbf{x}_i\right\|}{\left\|\mathbf{x}_i\right\|}$ oraz dla dowolnego $\mathbf{x} \ne 0$ $\min_{\mathbf{x}\ne 0}\frac{\left\|\mathbf{A}\mathbf{x}\right\|}{\left\|\mathbf{x}\right\|} \le \max_{\mathbf{x}\ne 0}\frac{\left\|\Delta\mathbf{x}\right\|}{\left\|\mathbf{x}\right\|}$, co można też zapisać $\sigma_{\min}(\mathbf{A}) \le \sigma_{\max}(\Delta)$. Założenie (17) nie będzie spełnione dla warunku $\sigma_{\min}(\mathbf{A}) > \sigma_{\max}(\Delta)$ lub równoważnie $\|\Delta\| < \sigma_{\min}(\mathbf{A})$. W analogiczny sposób można udowodnić pozostałe zależności z tabeli 1. Należy tu podkreślić, że podany warunek jest warunkiem wystarczającym stabilności, nie jest to jednak warunek konieczny i nie spełnienie go nie musi prowadzić do niestabilności.

Dobór odpowiedniej struktury zaburzenia do występującej w układzie niepewności ma w wielu przypadkach decydujący wpływ na możliwość udowodnienia stabilności układu niepewnego. Jeżeli nie jest możliwe spełnienie warunków odnośnie normy zaburzenia, w wielu przypadkach pomocne jest sprowadzenie danej realizacji układu do realizacji zrównoważonej, poprzez zastosowanie przekształcenia macierzy układu do postaci: $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{TAT}^{-1}, \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{TB}, \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{CT}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Tx}$, oraz $\tilde{\Delta} = \mathbf{T}\Delta\mathbf{T}^{-1}$. Jest to standardowa procedura dostępna m.in. w pakiecie Matlab Control Systems Toolbox pod nazwą *balreal* lub *ssbal*. Prowadzi ona do równoważenia norm wektorów składowych kolumnowych i wierszowych macierzy.

W wielu pracach korzysta się przede wszystkim ze struktury addytywnej [5-7] i zaburzenia ograniczonego normą lub parametrycznie. Niemniej w wielu zastosowaniach wygodne jest posłużenie się inną strukturą, lepiej dopasowaną do konkretnego problemu.

6. Przykłady

6.1. Szacowanie normy zaburzenia

Dana jest macierz $\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$. Stąd $\Delta^{\mathrm{T}}\Delta = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1,25 \end{bmatrix}$ oraz $\|\Delta\| = 2,25$. Jakie będzie oszacowanie normy tej macierzy w przypadku gdy przyjąć, że współczynniki tej macierzy są w istocie ograniczeniami wartości bezwzględnych rzeczywistych współczynników ? Jest to przypadek zaburzenie ograniczonego wartościowo (4.3) gdzie **D**=Δ, zatem $\|\Delta\| \le \sqrt{\mathrm{trace}\left(\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\right)} = 2,29$.

6.2. Analiza zaburzenia addytywnego i w sprzężeniu zwrotnym na wejściu dla układu oscylacyjnego

Dane są następujące macierze niepewnego modelu układu dynamicznego

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b/m & -w/m \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{18}$$
$$m_\Delta \in \langle 1,199 \rangle, m = 100, b = 0,01, w = 1000$$

Układ jest klasycznym obiektem oscylacyjnym 2-go rzędu o niepewnej wartości masy. Łatwo można udowodnić, że układ będzie stabilny dla dowolnego m>0.

Wprowadzając zaburzenie masy do układu można skorzystać ze struktury w sprzężeniu zwrotnym na wejściu $\Delta_{szw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,99 \end{bmatrix}$ lub addytywnej $\Delta_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,099 & 990 \end{bmatrix}$. Jak łatwo sprawdzić korzystając z tabeli 1 struktura sprzężenia zwrotnego na wejściu gwarantuje stabilność tego układu gdyż $\|\Delta_{szw}\| = 0,99 < 1$, podczas gdy struktura addytywna nie gwarantuje stabilności tego układu ponieważ $\|\Delta_a\| = 990 > \sigma_{\min}(\mathbf{A}) = 10^{-5}$. Stąd wniosek, że bardziej odpowiednią strukturą w tym przypadku jest struktura w sprzężeniu zwrotnym na wejściu, ponieważ nie prowadzi ona do utraty informacji odnośnie stabilności układu.

7. Podsumowanie

Niepewność jest często postrzegana w sposób negatywny, jako rezultat niedoskonałości technik pomiarowych i produkcyjnych. W realiach przemysłowych zwiększanie niepewności wytwarzanych części składowych prowadzi do obniżenia kosztów produkcji. Zachowanie przy tym własności produktu prowadzi do zwiększenia zysku, czyli ma rezultat pozytywny. Na niepewności opiera się funkcjonowanie giełdy papierów wartościowych. Równowaga następuje w wyniku powstania niepewności (ryzyka poniesienia straty) u sprzedających i nadziei na zysk (czyli pozytywnej niepewności) u kupujących.

Niepewność jest zjawiskiem nieodzownie związanym z procesami modelowania, pomiarów i identyfikacji, analizy oraz ewentualnej syntezy układu sterowania. Istnienie niepewności może być zarówno wynikiem niedoskonałości przyrządów pomiarowych czy niemożności wykonania dokładnych pomiarów ale również może być działaniem zamierzonym.

Umiejętne wprowadzenie niepewności do modelu matematycznego układu pozwala nie tylko uwzględnić ją na etapie projektowania, ale również tak dobrać sterowanie aby jej wpływ był możliwie najmniejszy. Podane w pracy metody umożliwiają dobór odpowiedniego zaburzenia do konkretnego problemu. Najczęściej wykorzystywane są: zaburzenie z ograniczoną normą oraz zaburzenie ograniczone parametrycznie. Jakkolwiek oszacowania zostały wyprowadzone dla macierzy, niemniej mogą one być wykorzystywane również dla operatorów. W przypadku posługiwania się operatorem macierzowym układu dyskretnego określonym na skończonym horyzoncie czasowym [8] wszystkie wyniki można przenieść w sposób bezpośredni. Nie mniej istotny jest dobór struktury w której niepewność zostanie uwzględniona w modelu matematycznym układu. Dobór struktury powinien prowadzić nie tylko do przejrzystego modelu ale również powinien zapewnić czytelne wyniki analizy dla całego układu. Struktury multiplikatywne nadają się najlepiej do modelowania uproszczeń dynamiki w zakresie wysokich częstotliwości, struktury w sprzężeniu zwrotnym do uproszczeń w zakresie niskich częstotliwości. Struktura addytywna, wykorzystywana jest do wprowadzania błędów addytywnych modelu, zarówno w zakresie wysokich jak i niskich częstotliwości.

8. Literatura

[1] Wikipedia: Wolna encyklopedia [online]. [dostęp: 30.11.2006]. Dostęp w Internecie: http://wikipedia.org/

[2] Busłowicz M. (1997). Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach. Rozprawy Naukowe Nr 48, Politechnika Białostocka.

[3] Wilson, H. (1999). Spikes, Decisions, and Actions: Dynamical Foundations of Neuroscience. Oxford University Press. Oxford.

[4] Hoary, T. (1996). H^2/H^∞ Theory. Background and Recent Extensions. M.Sc. Dissertation, UMIST, Manchester.

[5] Emirsajłow Z., Orłowski P. (2001). Determination of an Initial State for Uncertain Discrete Time-Varying Systems, Proceedings of the 7th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, Poland 28-31.08.2001, vol. I, pp. 315-319.

[6] Green M., Limebeer, D.J.N. (1995). Linear Robust Control. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[7] Orłowski P. (2000). Deviations estimates for uncertain time-varying discrete-time systems, 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design, Prague, CD-ROM art. 132.

[8] Orłowski P. (2001). Applications of Discrete Evolution Operators in Time-Varying Systems, Proc. of the European Control Conference, Porto, Portugal, pp. 3259-3264.

Artykuł recenzowany