

**Stefan KUBISA**

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA, INSTYTUT AUTOMATYKI PRZEMYSŁOWEJ, ZAKŁAD METROLOGII

## Sześć podejść do oceny miary niedokładności pomiaru – od determinizmu po symulację Monte Carlo

Prof. dr hab. inż. Stefan KUBISA

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Szczecińskiej. Od ukończenia studiów w 1963 r. nauczyciel akademicki na macierzystym Wydziale, od 2001 r. na stanowisku profesora zwyczajnego. Od 1990 r. członek Komitetu Metrologii i Aparatury Naukowej PAN. Zainteresowania naukowe: algorytmy przetwarzania w pomiarach mocy i energii elektrycznej, immitancji i wybranych wielkości mechanicznych, zaawansowane metody analizy dokładności pomiaru.



e-mail: kubisa@ps.pl

### Streszczenie

Przedstawiono syntezę sześciu podstawowych podejść do oceny miary niedokładności pomiaru, w szczególności do obliczeń tzw. niepewności pomiaru – od podejścia deterministycznego po najbardziej uniwersalne podejście naturalne – symulację Monte Carlo. Przedstawiono też zarys sposobu generowania liczb pseudolosowych o trzech rozkładach prawdopodobieństwa rzadziej stosowanych w analizie dokładności pomiaru.

**Słowa kluczowe:** błąd pomiaru, niepewność pomiaru, symulacja Monte Carlo, generowanie liczb losowych.

### Six Approaches to Evaluation of Measurement Inaccuracy Measure – from Determinism to Monte Carlo Simulation

#### Abstract

Synthesis of six essential approaches to evaluation of measurement inaccuracy measure, especially to calculation of so-called measurement uncertainty, from a deterministic approach to the most versatile and natural one – Monte Carlo simulation, is presented. A sketch of a generation method of pseudo-random numbers with three, rarely used distributions, is presented as well.

**Keywords:** measurement error, measurement uncertainty, Monte Carlo simulation, random numbers generation.

## 1. Wstęp

Ten artykuł stanowi uzupełnienie treści artykułu [1], który poprzedził wygłoszenie referatu pod tym samym tytułem na XXXVIII Międzyuczelnianej Konferencji Metrologów w Białobrzegach nad Zalewem Zegrzyńskim w pierwszych dniach września 2006 r. W artykule [1] nie znalazła się zaprezentowana w referacie propozycja usystematyzowania podejść do oceny miary niedokładności pomiaru. Prezentuje ją niniejszy artykuł.

## 2. Problemy terminologiczne

Terminologia stosowana w rozważaniach dotyczących oceny niedokładności jest dyskusyjna. Dyskusję budzi już to, czy bardziej adekwatny jest termin „niedokładność”, czy też „dokładność” pomiaru. Zdaniem autora „niedokładność” lepiej oddaje immanentną właściwość pomiaru polegającą na tym, że wynik pomiaru nie odzwierciedla dokładnie stanu mierzonej cechy w obiekcie badanym. „Dokładność” jest terminem przeciwstawnym, a głównym argumentem za jego stosowaniem jest mniejsza długość wyrazu.

Bardziej istotne jest rozróżnianie terminów „błąd pomiaru” i „miara błędów pomiaru”, często mylonych, czy też utożsamianych ze sobą. Błąd pomiaru, oznaczany w [1] i dalej symbolem  $\Delta_C$  (indeks C od „całkowity” lub od angielskiego *combined* = złożony),

definiowany jest prostą, a trafiającą w sedno formułą: *błąd = to, co wiadomo – to, co jest naprawdę*. Po dekompozycji i wyeliminowaniu za pomocą poprawki składników o znanych wartościach [1], błąd  $\Delta_C$  okazuje się (w sytuacji, gdy równanie pomiaru jest liniowe lub nie nadmiernie nieliniowe) sumą składników o charakterze losowym:

$$\Delta_C = \Delta_A + \Delta_{B,1} + \Delta_{B,2} + \dots + \Delta_N$$

lub ogólniej

$$\Delta_C = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_N = \sum_{j=0}^{N+1} \Delta_j, \quad (1)$$

przy czym symbolem  $\Delta_A$  oznaczono błąd, którego miarą – według [2] – jest niepewność obliczana metodą typu A, czyli metodą statystyczną. Błąd ten w [1] i dalej nazywa się błędem typu A. Odpowiednio błędy  $\Delta_{B,1}, \Delta_{B,2}, \dots$ , których miarami – według [2] – są niepewności obliczane metodą typu B, czyli metodą heurystyczną, nazywa się błędami typu B.

Równanie (1) ma zastosowanie także w pomiarach pośrednich, opisanych ogólną zależnością funkcyjną  $q = f(x_1, x_2, \dots, x_j)$ , jeżeli uzasadnione jest stosowanie przybliżonego prawa propagacji błędów w postaci <sup>1)</sup>:

$$\Delta q \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\substack{x_{1e}, \\ x_{2e}, \\ \dots \\ x_{je}}} \cdot \Delta x_1; \quad \Delta_2 q \approx \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{\substack{x_{1e}, \\ x_{2e}, \\ \dots \\ x_{je}}} \cdot \Delta x_2; \quad \dots; \quad \Delta_j q \approx \frac{\partial f}{\partial x_N} \Big|_{\substack{x_{1e}, \\ x_{2e}, \\ \dots \\ x_{je}}} \cdot \Delta x_j, \quad (2)$$

bo wtedy:

$$\Delta_C q = \Delta_0 q + \Delta_1 q + \dots + \Delta_N q = \sum_{j=0}^J \Delta_j q. \quad (3)$$

Losowość składnika  $\Delta_A$  w równaniu (1) wynika z definicji. Składniki typu B – systematyczne w danym konkretnym pomiarze, ale nieznanne co do wartości, traktuje się jako losowe w populacji generalnej pomiarów rozpatrywanego rodzaju. Konsekwentnie więc błąd  $\Delta_C$  traktuje się jako zmienną losową.

Najpowszechniej stosowaną miarą błędów pomiaru, a zatem miarą niedokładności pomiaru jest długość przedziału, w którym błąd mieści się albo *na pewno* – przy podejściu deterministycznym, albo z pewnym, dostatecznie wysokim prawdopodobieństwem – przy podejściu probabilistycznym. Najczęściej przyjmuje się, że rozkład prawdopodobieństwa błędów jest symetryczny względem zera i połowę długości przedziału błędów przy deterministycznym podejściu do oceny niedokładności nazywa się błędem granicznym (obecnie raczej niepewnością graniczną), a przy podejściu probabilistycznym – niepewnością rozszerzoną [2]. Naszkicowany dychotomiczny podział podejść do sposobu określania miary niedokładności pomiaru na podejście deterministyczne i podejście probabilistyczne jest zasadniczy, ale mało subtelny. Dalej wyróżnia się sześć podejść: 1° ściśle deterministyczne, 2° probabilistyczno-deterministyczne, 3° pseudoprobabilistyczne, 4° przybliżone probabilistyczne, 5° ściśle i 6° naturalne. Klasyfikacja ta nie wyczerpuje zapewne wszystkich możliwości, ale mieszczą się w niej wszystkie ważniejsze sposoby oceny miary niedokładności pomiaru.

<sup>1)</sup> W oznaczeniach błędów przyjęto tu zasadę: Jeżeli nie budzi wątpliwości, do jakiej wielkości odnosi się symbol błędów, to błąd oznacza się symbolem  $\Delta$  z odpowiednim indeksem, jak we wzorze (1). W przeciwnym przypadku po symbolu  $\Delta$  z indeksem umieszcza się symbol wielkości, jak we wzorach (2) i (3).

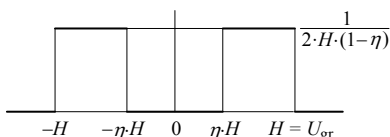
### 3. Sześć podejść do oceny niedokładności pomiaru

#### 3.1. Podejście ściśle deterministyczne

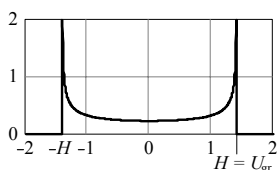
Podejście ściśle deterministyczne zakłada, że błąd pomiaru  $\Delta_C$  (i każdy jego składnik  $\Delta_i$  zawiera się (na pewno!) w symetrycznym względem zera przedziale o długości połówkowej zwanej błędem granicznym (lub obecnie raczej niepewnością graniczną)  $U_{gr}$ :

$$\begin{aligned} \Delta_A \in [-U_{A,gr}, U_{A,gr}], \quad \Delta_{B,i} \in [-U_{B,i,gr}, U_{B,i,gr}]; \quad i = 0, 1, \dots, N, \\ \Delta_C \in [-U_{C,gr}, U_{C,gr}] \end{aligned} \quad (4)$$

Oznacza to założenie, że rozkłady prawdopodobieństwa błędów są ograniczone, jak np. rozkład jednostajny, bi-jednostajny (rys. 1), typu U (rys. 2) itp. Kłopot sprawia błąd typu A, któremu przypisuje się rozkład normalny, a więc rozkład nieograniczony. Rozkład ten obcina się zatem, przyjmując zwyczajowo  $U_{A,gr} = 3 \cdot \sigma$ , czyli tzw. przedział trójsigmaowy. Takiej wartości  $U_{A,gr}$  odpowiada, jak wiadomo, prawdopodobieństwo nieco ponad 99,7%, że błąd  $\Delta_A$  zawiera się w przedziale niepewności. Uzasadnia się dalej, że 99,7% to prawdopodobieństwo tak wysokie, że, praktycznie biorąc, równe 1. Rzeczywiście można je uznać za wysokie jako prawdopodobieństwo prawdziwości zdania  $\Delta_A \in [-U_{A,gr}, U_{A,gr}]$ , ale jednocześnie jest to prawdopodobieństwo nader niskie jako np. prawdopodobieństwo bezwypadkowej podróży z domu do pracy. Jest w tym wszystkim trochę „magii liczb”: z jednej strony wyrażenie  $3 \cdot \sigma$  opiera się o „magiczną” liczbę 3, a z drugiej 99,7 – to prawie 100.



Rys. 1. Rozkład bi-jednostajny gdy  $0 < \eta < 1$  lub jednostajny gdy  $\eta = 0$   
Fig. 1. Bi-rectangular distribution when  $0 < \eta < 1$  or rectangular when  $\eta = 0$



Rys. 2. Rozkład typu U  
Fig. 2. Type U distribution

Wartość odchylenia standardowego  $\sigma$  jest raczej nieznaną. Estymuje się ją odchyleniem empirycznym  $s$ , wobec czego normalny rozkład błędów typu A trzeba reprezentować w obliczeniach rozkładem Studenta. Jako niepewność graniczną przyjmuje się wtedy  $U_{A,gr} = k_S \cdot s$ , a współczynnik rozszerzenia  $k_S$  określa się na podstawie liczby stopni swobody i zakładanego prawdopodobieństwa  $p$  prawdziwości zdania  $\Delta_A \in [-U_{A,gr}, U_{A,gr}]$ . Zwykle zakłada się  $p = 99\%$ , co znów wynika z „magii liczb” (99 to prawie 100). Nie ma zresztą żadnych ściśle teoretycznych przesłanek dla określenia wartości prawdopodobieństwa  $p$  – dobiera się ją arbitralnie, a „magia liczb” stanowi psychologiczne wsparcie tego działania.

Jeżeli odsunąć na bok przedstawione zastrzeżenia odnośnie sensu niepewności granicznej, to zgodnie z (4) niepewność graniczna  $U_{C,gr}$ , odnosząca się do błędów pomiaru  $\Delta_C$ , jest sumą niepewności odnoszących się do składników błędów:

$$U_{C,gr} = U_{A,gr} + \sum_i U_{B,i,gr} \quad (5)$$

Zaletą wyrażenia (5) jest prostota, która sprawia, że jest ono w praktyce wykorzystywane przy wstępnej analizie dokładności pomiaru, zwłaszcza w procesie opracowywania metody pomiarowej i instrumentacji układu pomiarowego. Natomiast ideę podejścia ściśle deterministycznego obecnie zarzuca się, bo nie odpowiada ona do współczesnym poglądom na charakter obserwowanych zjawisk – poglądom preferującym podejście probabilistyczne.

#### 3.2. Podejście probabilistyczno-deterministyczne

To podejście różni się od podejścia deterministycznego tylko tym, że w miejsce niepewności granicznych wstawia się niepewności rozszerzone, określone przy zakładanym prawdopodobieństwie (poziomie ufności)  $p$ . Jeżeli rozkłady prawdopodobieństwa błędów  $\Delta_A$  oraz  $\Delta_{B,i}$  dane są funkcjami różniczkowej gęstości  $G_A(\Delta_A)$  oraz  $G_{B,i}(\Delta_{B,i})$ , to wspomniane niepewności rozszerzone  $U_A$  oraz  $U_{B,i}$  są rozwiązaniami równań:

$$\int_{-U_A}^{U_A} G_A(\Delta_A) \cdot d\Delta_A = p, \quad \int_{-U_{B,i}}^{U_{B,i}} G_{B,i}(\Delta_{B,i}) \cdot d\Delta_{B,i} = p; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

i to stanowi element probabilistyczny podejścia. Elementem deterministycznym jest zaś to, że niepewność rozszerzoną  $U_C$ , odnoszącą się do błędów pomiaru  $\Delta_C$ , oblicza się jako sumę niepewności odnoszących się do składników błędów:

$$U_C = U_A + \sum_i U_{B,i}; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

Rozróżnienie między podejściem probabilistyczno-deterministycznym a ściśle deterministycznym ma charakter bardziej porządkowy, niż praktyczny, ponieważ w przypadku rozkładów ograniczonych – jednostajnego, bi-jednostajnego i typu U i przy wysokiej wartości poziomu ufności  $p$  (np.  $p \geq 90\%$ ) niepewność rozszerzona jest tylko w nieistotnym stopniu mniejsza od niepewności granicznej:

$$\frac{U}{U_{gr}} = \begin{cases} p(1-\eta) + \eta & \text{dla rozkładu bi-jednostajnego} \\ \cos((\pi/2) \cdot (1-p)) & \text{dla rozkładu typu U} \end{cases} \quad (8)$$

Tak na przykład przy  $p = 95\%$  dla rozkładu jednostajnego (bi-jednostajnego o  $\eta = 1$ ) jest  $U/U_{gr} = 0,95$ , dla rozkładu bi-jednostajnego o  $\eta = 1/2$  jest  $U/U_{gr} = 0,975$ , a dla rozkładu typu U jest  $U/U_{gr} \approx 0,997$ .

Metoda obliczeń niepewności rozszerzonej  $U_C$  wg wzorów (6) i (7) nazywana jest dalej *metodą sumy zwykłej*.

#### 3.3. Podejście pseudoprobabilistyczne

Metoda sumy zwykłej daje nadmierną wartość niepewności rozszerzonej  $U_C$ . Wartość ta prowadzi do prawdopodobieństwa  $P$  prawdziwości zdania  $\Delta_C \in [-U_C, U_C]$  wyższego, niż poziom ufności  $p$  zakładany przy obliczaniu niepewności  $U_A$  i  $U_{B,i}$  wg (6). Pogładowo kwituje się to stwierdzeniem: *Mало prawdopodobne jest zdarzenie tworzące podstawę dla metody sumy zwykłej, a polegające na tym, że wszystkie składniki błędów pomiaru mają jednocześnie skrajne wartości jednego znaku*. I wyprowadza się stąd, bez głębszego uzasadnienia, wniosek: *Skoro suma zwykła daje wartość nadmierną, to sumujemy geometrycznie*. Taka jest geneza *metody sumy geometrycznej*, która korzysta z wartości niepewności rozszerzonych  $U_A$  oraz  $U_{B,i}$ , obliczonych wg. (6), ale poddaje je sumowaniu geometrycznemu:

$$U_C = \sqrt{U_A^2 + \sum_i U_{B,i}^2}; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Metoda sumy geometrycznej daje w pełni poprawny wynik, prowadzący do prawdopodobieństwa  $P$  prawdziwości zdania  $\Delta_C \in [-U_C, U_C]$ , równego założonemu poziomowi ufności  $p$  tylko wtedy, gdy wszystkie składniki błędu pomiaru mają rozkłady normalne.

### 3.4. Przybliżone podejście probabilistyczne

Przybliżone podejście probabilistyczne bazuje na tezie centralnego twierdzenia granicznego (CTG) rachunku prawdopodobieństwa, że rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych dąży do rozkładu normalnego. Zgodnie z [2] oblicza się więc odchylenie standardowe (złożoną niepewnością standardową  $u_C$  wg terminologii [2]) rozkładu błędu pomiaru  $\Delta_C$  z prawa składania odchyłeń standardowych niezależnych zmiennych losowych:

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + \sum_i u_{B,i}^2}; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

przy czym niepewność standardową  $u_A$  typu A identyfikuje się z odchyleniem empirycznym  $s$  obliczonym z  $n$  obserwacji ( $u_A = s$ ), a niepewności standardowe  $u_{B,i}$  typu B – z odchyleniami standardowymi  $\sigma_{B,i}$  wyszczególnionych w (1) błędów  $\Delta_{B,i}$  ( $u_{B,i} = \sigma_{B,i}$ ). Związki odchyłeń standardowych z innymi parametrami rozkładów są znane, np.:

$$\sigma = \begin{cases} (H/\sqrt{3}) \cdot \sqrt{1+\eta+\eta^2} & \text{dla rozkładu bi-jednostajnego} \\ H/\sqrt{2} & \text{dla rozkładu typu U.} \end{cases} \quad (11)$$

Podstawowy sposób obliczeń niepewności rozszerzonej  $U_C$  przy przybliżonym podejściu probabilistycznym polega na mnożeniu złożonej niepewności standardowej  $u_C$  przez współczynnik rozszerzenia  $k_C$  równy odpowiednio 2 lub 3:

$$U_C = k_C \cdot u_C; \quad k_C = \begin{cases} 2 & \text{dla } p = 95\% \\ 3 & \text{dla } p = 99\% \end{cases} \quad (12)$$

Wartości 2 i 3 są zaokrągleniami w górę współczynników rozszerzenia wynikających z rozkładu normalnego. Dokładniejsze wartości współczynnika rozszerzenia oblicza się przyjmując, że rozkład błędu pomiaru  $\Delta_C$  jest rozkładem Studenta o tzw. efektywnej liczbie stopni swobody  $\nu_{\text{eff}}$  [2]. Liczba  $\nu_{\text{eff}}$  wyznaczana jest na podstawie liczby  $\nu$  stopni swobody, związanej z obliczeniami niepewności standardowej typu A i na podstawie raczej arbitralnych założeń dotyczących niepewności określenia niepewności standardowych typu B. Podstawy teoretyczne takiego podejścia wyjaśnia J. Jaworski w przypisach do swojego tłumaczenia *Przewodnika* [2]. Teoria wywodzi się z rozważań o rozkładzie normalnym, a więc jej stosowanie do innych rozkładów nie jest w pełni uprawnione.

W praktyce stosowania przybliżonego podejścia probabilistycznego często zapomina się o ważnych założeniach CTG: 1° liczba składników dąży do nieskończoności, 2° żaden ze składników nie dominuje. Zbyt niedoskonałe spełnienie wymienionych założeń powoduje, że przybliżone podejście probabilistyczne daje wynik o wątpliwej wartości.

### 3.5. Podejście ścisłe

Rozkład prawdopodobieństwa  $G_C(\Delta_C)$  błędu pomiaru  $\Delta_C$  jest spotłem rozkładów składników:

$$G_C(\Delta_C) = G_A(\Delta_A) * G_{B,1}(\Delta_{B,1}) * G_{B,2}(\Delta_{B,2}) * \dots * G_{B,N}(\Delta_{B,N}), \quad (13)$$

a niepewność rozszerzona  $U_C$  – rozwiązaniem równania:

$$\int_{-U_C}^{U_C} G_C(\Delta_C) \cdot d\Delta_C = p. \quad (14)$$

Równania (13) i (14) stanowią podstawę metody ścisłej obliczania niepewności rozszerzonej pomiaru, a początkowe trudności obliczeniowe można uznać za pokonane dzięki specjalistycznemu oprogramowaniu komputerowemu, np. [3].

### 3.6. Podejście naturalne

Rozpatrywaną sytuację, gdy błąd pomiaru jest sumą składników o charakterze losowym wyraża równanie (1), które w syntetycznej formie ma postać:

$$\Delta_C = \sum_{j=0}^J \Delta_j. \quad (15)$$

Podejście naturalne polega zatem na symulacji Monte Carlo, czyli na:

- $M$ -krotnym generowaniu  $(J+1)$ -elementowych wektorów niezależnych pseudolosowych wartości  $\Delta_j$  o rozkładach  $G_j(\Delta_j)$ ,
- obliczaniu  $M$  sum elementów tych wektorów, czyli  $M$  symulowanych wartości błędu  $\Delta_C$ ,
- wyznaczaniu empirycznego rozkładu wartości  $\Delta_C$ .

Przy dużej liczbie  $M$  (np. rzędu  $10^6$ ) rozkład empiryczny dobrze przybliża rozkład prawdopodobieństwa  $G_C(\Delta_C)$  błędu pomiaru i pozwala obliczyć wiarygodną wartość niepewności rozszerzonej  $U_C$  dla założonego poziomu ufności  $p$ .

Przypomnijmy jak w [1], że symulacja Monte Carlo nie ogranicza postaci równania pomiaru – nie musi być ono liniowe jak (15). Ogólny algorytm obliczeń, szczegółowo omówiony w [4], umożliwia nie tylko obliczenie niepewności rozszerzonej, ale także wyznaczenie niesymetrycznych granic tzw. przedziału ufności w przypadku niesymetrycznego rozkładu prawdopodobieństwa błędu pomiaru.

Symulacja Monte Carlo w granicy, tj. przy  $M \rightarrow \infty$ , dawałaby dokładny wynik obliczeń, pod warunkiem jednak zastosowania doskonałych generatorów liczb losowych. Niedoskonałości tych generatorów i skończona liczność  $M$  próby tworzą barierę dokładności symulacji.

Generowanie pseudolosowych wartości  $\Delta_j$  o rozkładach  $G_j(\Delta_j)$  nie stanowi problemu, jeśli dysponuje się odpowiednimi generatorami. Komputerowe aplikacje matematyczne oferują zwykle generatory o rozkładzie jednostajnym i normalnym. Aplikacja **mathcad** oferuje także kilkanaście innych generatorów, a wśród nich, ważny dla rozpatrywanych tu zagadnień, generator o standaryzowanym rozkładzie Studenta o dowolnej dodatniej, także ułamkowej, liczbie stopni swobody.

Liczbę pseudolosową  $\xi$  o rozkładzie  $F(\xi)$  można wygenerować wg wzoru:

$$\xi = \text{ICF}(\zeta) = \sigma \cdot \text{icf}(\zeta), \quad (16)$$

przy czym  $\zeta$  jest liczbą pseudolosową o rozkładzie jednostajnym w przedziale (0; 1),  $\text{ICF}(\zeta)$  – (Inverse Cumulative Function) funkcją odwrotną dystrybuanty funkcji  $F(\xi)$ ,  $\text{icf}(\zeta)$  – standaryzowaną funkcją odwrotną dystrybuanty, a  $\sigma$  – odchyleniem standardowym zmiennej losowej  $\xi$ .

W tabelicy 1 zestawiono wzory i wykresy standaryzowanej funkcji różniczkowej gęstości prawdopodobieństwa i funkcji odwrotnej dystrybuanty dla spotykanego w obliczeniach niepewności pomiaru rozkładu typu U oraz dla rodziny rozkładów bi-jednostajnych i rodziny rozkładów trapezowych. Elementy każdej z rodzin różnią się między sobą parametrem  $\eta$ , który może przyjmować wartości z przedziału (0; 1). Skrajne wartości  $\eta$  prowadzą do szczególnych rozkładów, mających własne nazwy i zastosowania. I tak:

- Rozkład bi-jednostajny przy  $\eta = 0$  staje się rozkładem jednostajnym, a przy  $\eta = 1$  – rozkładem typu  $2\delta$  (dwie połówkowe dystrybucje  $\delta$ -Diraca przesunięte względem 0 odpowiednio o  $\sigma$  i  $-\sigma$ ), noszącym też nazwę rozkładu dwupunktowego.
- Rozkład trapezowy przy  $\eta = 0$  staje się rozkładem trójkątnym, a przy  $\eta = 1$  – rozkładem jednostajnym.

Tab. 1. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa i funkcje odwrotne dystrybuanty dla trzech wybranych rozkładów prawdopodobieństwa  
 Tab. 1. Density functions and inverse cumulative functions for three selected probability distributions

Rozkład	bi-jednostajny (bi-rectangular)	trapezowy (trapezoidal)	typu U (U-type)
Funkcja gęstości prawdopodobieństwa	$br(x, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot (1-\eta) \cdot A} & \text{dla }  x  \in [\eta \cdot A, A] \\ 0 & \text{dla }  x  \notin [\eta \cdot A, A] \end{cases}$ <p>przy czym <math>A = \sqrt{\frac{3}{1+\eta+\eta^2}}</math></p>	$tr(x, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{A \cdot (1+\eta)} & \text{dla }  x  \in [0, \eta \cdot A] \\ \frac{A- x }{A^2 \cdot (1-\eta^2)} & \text{dla }  x  \in (\eta \cdot A, A] \\ 0 & \text{dla }  x  \notin [0, A] \end{cases}$ <p>przy czym <math>A = \sqrt{\frac{6}{1+\eta^2}}</math></p>	$tu(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{2 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}} & \text{dla } x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \end{cases}$
Wykres funkcji gęstości prawdopodobieństwa			
Funkcja odwrotna dystrybuanty	$\xi(\zeta, \eta) = A \cdot \begin{cases} 2 \cdot (1-\eta) \cdot \zeta - 1 & \text{dla } \zeta \in [0, 0.5] \\ 1 - 2 \cdot (1-\eta) \cdot (1-\zeta) & \text{dla } \zeta \in (0.5, 1] \end{cases}$	$\xi(\zeta, \eta) = A \cdot \begin{cases} \sqrt{2 \cdot \zeta \cdot (1-\eta^2)} - 1 & \text{dla } \zeta \in \left[0, \frac{1-\eta}{2 \cdot (1+\eta)}\right] \\ (1+\eta) \cdot \left(\zeta - \frac{1}{2}\right) & \text{dla } \zeta \in \left[\frac{1-\eta}{2 \cdot (1+\eta)}, \frac{1+3 \cdot \eta}{2 \cdot (1+\eta)}\right] \\ 1 - \sqrt{2 \cdot (1-\zeta) \cdot (1-\eta^2)} & \text{dla } \zeta \in \left[\frac{1+3 \cdot \eta}{2 \cdot (1+\eta)}, 1\right] \end{cases}$	$\xi(\zeta) = -\sqrt{2} \cdot \cos(\pi \cdot \zeta) \text{ dla } \zeta \in [0, 1]$
Wykres funkcji odwrotnej dystrybuanty			

#### 4. Podsumowanie

Zaletą podejść:

- 1) ściśle deterministycznego (5) – rozdz. 3.1.,
- 2) probabilistyczno-deterministycznego (7) – rozdz. 3.2.,
- 3) pseudoprobabilistycznego (9) – rozdz. 3.3.,
- 4) przybliżonego probabilistycznego (10), (11), (12) – rozdz. 3.4., jest prostota obliczeń. Podejścia 1) i 2) nie różnią się istotnie między sobą i dają nadmierną wartość niepewności rozszerzonej – za wyjątkiem mało realnego przypadku składania błędów o rozkładach 2δ. Podejście 3) daje często wartość zbyt małą, choć w szczególnych przypadkach (np. przy składaniu błędów opisanego rozkładem Studenta o  $\nu > 2$  z błędem o rozkładzie jednostajnym [5]) – wartość nieco nadmierną. Podejście 4), tak w opisanej tu wersji podstawowej, jak i wersji opartej o tzw. efektywną liczbę stopni swobody, daje zarówno wartości zbyt małe, jak i nadmierne, przy czym trudno sformułować regułę, która tym rządzi.

Podejścia:

- 5) ściśle (13), (14) – rozdz. 3.5.,
  - 6) naturalne – rozdz. 3.6.,
- dają *dokładne* (*dokładne* w hipotetycznych przypadkach dokładnych danych o rozkładach prawdopodobieństwa błędów) wartości niepewności rozszerzonej, ale są na tyle złożone obliczeniowo, że wymagają specjalistycznego oprogramowania i wydajnego komputera – jeżeli czas obliczeń ma być zadowalająco krótki. Bariera czasu obliczeń szybko znika wobec intensywnego rozwoju techniki komputerowej.

W bliskiej przyszłości najbardziej perspektywiczne wydaje się podejście naturalne – symulacja Monte Carlo, ponieważ nie stwarza ono żadnych zasadniczych ograniczeń, a w szczególności nie wymaga, by równanie pomiaru było liniowe lub praktycznie liniowe.

#### 5. Literatura

- [1] Kubisa S: Analiza dokładności pomiaru dawniej i dziś, Pomiary, Automatyka, Kontrola, Nr 9bis., 2006, s. 13 – 18.
- [2] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, BIPM, 1995. (Wydanie polskie: Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik, tłum. J. M. Jaworski, Główny Urząd Miar, 1999).
- [3] Korczyński M. J., Hetman A.: Calculation of Expanded Uncertainty, Joint IMEKO TC-1 & MKM Conference 2002, Wroc'aw, 8 – 12 September 2002, ISBN 83-7085-647-0 pp. 107 – 114
- [4] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Supplement 1. Numerical Methods for the Propagation of Distributions, Projekt dokumentu Międzynarodowego Biura Miar z 16. 03. 2004.
- [5] Kubisa S: Niepewność pomiaru. Problem adekwatnych interpretacji i założeń, Podstawowe Problemy Metrologii, Prace Komisji Metrologii Oddziału PAN w Katowicach, Konferencje Nr 11, Ustroń, 14 – 17 maj 2006, s. 9 – 16