NIELINIOWY MODEL LINII NOŚNEJ DLA WIRNIKA W PRZEPŁYWIE OSIOWYM

dr inż. **Piotr STRZELCZYK**
Politechnika Rzeszowska

W artykule przedstawiono pewną modyfikację modelu linii nośnej w zastosowaniu do śmigieł i wirników nośnych pracujących przepływie osiowym. W odróżnieniu od tradycyjnej teorii linii nośnej model ten nie zawiera ograniczeń ze względu na kąty natarcia i wartości prędkości indukowanych. Jest to możliwe dzięki przedstawieniu charakterystyki nośności w formie iloczynu dwóch funkcji:

$$Cz = a_0 f(Ma, \alpha) \sin(\alpha - \alpha_0)$$

Opis ten pozwala na linearyzację całkowego równania linii nośnej, o ile znany jest kształt śladu wirowego w przypadku nieznanej formy śladu wirowego jego kształt wyznacza się iteracjnie korzystając z prawa Biota-Savarta, natomiast w przypadku wirników słabo obciążonych prędkości indukowane mogą być wyznaczone za pomocą tzw. asymptotycznych współczynników Lerbsa. W prezentowanej pracy przedstawiono porównanie wyników obliczeń z dostępnymi danymi doświadczalnymi.

SPIS WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

$a_0 = \left(\dfrac{dC_z}{d\alpha}\right)_{\substack{\Lambda\to\infty \\ \alpha^{(0)}=0}}$	pochylenie charakterystyki nośności profilu dla kąta zerowej siły nośnej [1/rad]
B	ilość łopat
c	cięciwa [m]
C_x	współczynnik oporu profilowego
C_z	współczynnik siły nośnej
$C_{Ps} = \dfrac{P_s}{\rho n_s^2 D^4}$	współczynnik ciągu
$C_N = \dfrac{N}{\rho n_s^3 D^5}$	współczynnik mocy
D	średnica śmigła [m]
i, j	indeksy
$i_a = v_x \dfrac{4\pi(r_c - r_v)}{\Gamma}$	osiowy współczynnik indukcji Lerbsa
$i_\theta = v_\theta \dfrac{4\pi(r_c - r_v)}{\Gamma}$	obwodowy współczynnik indukcji Lerbsa
$J = \dfrac{V_\infty}{n_s D}$	posuw śmigła
n_s	obroty na sekundę [1/s]
r	promień bieżący [m]
R	promień wierzchołka łopaty [m]
$S(\xi_c) = \dfrac{a_0 \chi \bar{c}(\xi_c)}{2}$	parametr kształtu łopaty
v_x	osiowa prędkość indukowana [m/s]
v_θ	obwodowa prędkość indukowana [m/s]
V_∞	prędkość przepływu niezaburzonego [m/s]
$W = \sqrt{(V_\infty + v_x)^2 + (\Omega r - v_\theta)^2}$	prędkość względna [m/s]
$\alpha^{(0)}$	kąt natarcia, mierzony od linii zerowej siły nośnej [°]
$\beta^{(0)}$	lokalny kąt nastawienia łopaty mierzony od linii zerowej siły nośnej [°]
Γ	cyrkulacja [m^2/s]
$\chi = \dfrac{Cz}{a_0 \sin\alpha^{(0)}}$	sprawność profilu
δ_n	azymut łopaty o numerze n [°]
ϕ	lokalny kąt napływu lub kąt pochylenia linii wirowej [°]
$\eta = x/R$	bezwymiarowa współrzędna w kierunku osiowym
ϑ	azymut elementu wirowego odniesiony do łopaty nr 1 [°]
ρ	gęstość ośrodka [kg/m^3]
$\xi = r/R$	promień bezwymiarowy
ψ	kąt pochylenia elementu wirowego [°]
Ω	prędkość kątowa śmigła [rad/s]

UWAGA

wielkości liniowe ubezwymiarowiono, dzieląc je przez R, prędkości przez ΩR, cyrkulację przez ΩR^2.

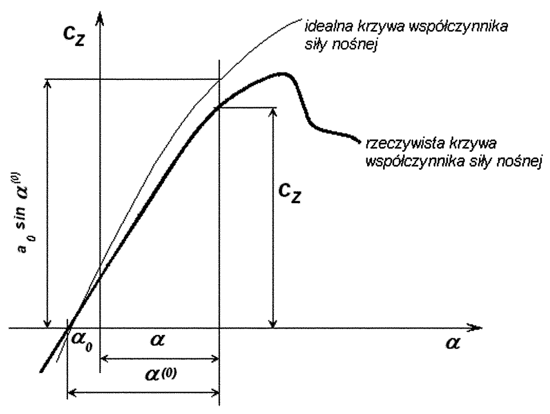
1. WSTĘP

Model linii nośnej w swych różnych postaciach [1], [2], [3], [4], [7], [10] nadal znajduje.zastosowanie do analizy osiągów jak również projektowania śmigieł. Wiąże się to głównie.z jego wzgledną prostotą, jak również z możliwością wykorzystania profilowych charakterystyk do wyznaczania siły nośnej i oporu profilowego elementu łopaty. U podstaw większości z tych modeli leży założenie o liniowości charakterystyki nośności profilu, oraz założenie o małości prędkości indukowanych w porównaniu z osiową prędkością napływu i prędkością obwodową elementu łopaty. Niektóre z modeli teoretycznych [1], [6] nie zawierają tego założenia, lecz wykorzystują schemat analogiczny do *„1/4--3/4”* Weissingera-Pistolessiego [8]. Z takiej postaci modelu wynika liniowa charakterystyka elementu łopaty. Inne modele, w tym oryginalna teoria Lerbsa [7]. które dopuszczają dowolne wartości prędkości indukowanych przy równoczesnym założeniu liniowości charakterystyki nośności profilu $C_Z = f(\alpha)$ prowadzą do skomplikowanych postaci równania całkowego linii nośnej. Prezentowany niżej model linii nośnej dla śmigła nie zawiera ograniczeń formalnych ze względu na wartości prędkości indukowanych. Uzyskane równanie linii nośnej jest równaniem liniowym.

2. MODEL TEORETYCZNY WIRNIKA

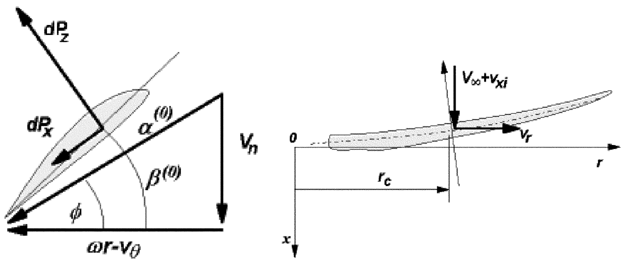
Podany niżej model teoretyczny wykorzystuje pewną, nieliniową postać charakterystyki nośności profilu. Przyjęto, że krzywa $C_Z = f(\alpha)$ opisana jest przez iloczyn dwóch funkcji: $\chi_p(\alpha^{(0)})$ i $\sin \alpha^{(0)}$:

$$\begin{aligned} C_Z &= a_0 \chi_p \sin \alpha^{(0)} \\ a_0 &= \left(dC_Z / d\alpha \right)\Big|_{\Lambda \to \infty, C_Z = 0} \end{aligned} \tag{1}$$



Rys. 1. Charakterystyka nośności elementu łopaty

przy czym wartość funkcji $\chi_p(\alpha^{(0)})$ wyznacza się na podstawie znajomości doświadczalnej.charakterystyki.profilu. Charakterystyke tę przedstawiono schematycznie na rysunku 1. Założono również, że kąt linia ugięcia łopaty (wynikająca np. ze względów konstrukcyjnych), lub kąt stożka wirnika jest mały.



Rys. 2. Siły i prędkości w układzie współrzędnych związanym z elementem łopaty

Cyrkulacja wokół elementu łopaty określona jest wzorem:

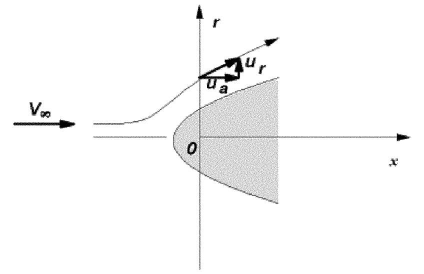
$$\Gamma(r) = \frac{1}{2} W c C_z \tag{2}$$

Składowa normalna wektora prędkości do osi łopaty wektora wynosi:

$$V_n = V_\infty \tilde{u}_a + v_x + \frac{dx}{dr}\left(v_r + V_\infty \tilde{u}_r \right) \tag{3}$$

a składowa obwodowa, dla danego przekroju wynosi:

$$V_t = \omega r - V_\theta \tag{4}$$



Rys. 3. Zaburzenie pola prędkości generowane przez kadłub

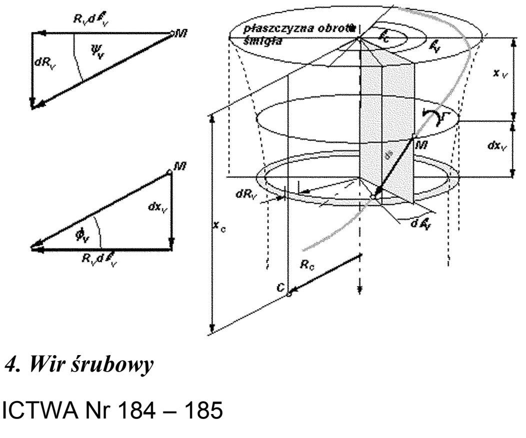
We wzorach (2) i (3) uwzględniono nominalne, osiowosymetryczne pole prędkości wytwarzane przez kadłub/gondolę, w płaszczyźnie obrotu śmigła (rys. 3).

Uwzględniając zależności geometryczne pomiędzy składowymi wektora prędkości przedstawionymi na rysunku 2, korzystając z (1...4), po ubezwymiarowieniu otrzymujemy zależności:

$$\begin{aligned} &\bar{\Gamma}(\xi_c) = \bar{\Gamma}_0(\xi_c) - S(\xi_c) \cdot \\ &\cdot \left[\bar{V}_\theta \sin \beta^{(0)} + \bar{V}_x \cos \beta^{(0)} + \bar{V}_r \frac{dx}{d\xi} \cos \beta^{(0)} \right] \end{aligned} \tag{5}$$

a wielkość:

$$\begin{aligned} &\bar{\Gamma}_0(\xi_c) = S(\xi_c) \cdot \\ &\cdot \left[\xi_c \sin \beta^{(0)} - \lambda \left(\tilde{u}_a + \tilde{u}_r \frac{d\bar{x}}{d\xi} \right) \cos \beta^{(0)} \right] \end{aligned} \tag{6}$$



Rys. 4. Wir śrubowy

to „cyrkulacja Drzewieckiego”, tj. taka jaką otrzymalibyśmy pomijając prędkości indukowane przez ślad wirowy. Prędkości indukowane wyznaczamy na podstawie prawa Biota-Savarta zapisanego we współrzędnych cylindrycznych. Wówczas cyrkulację dla zadanego przekroju c przedstawić w postaci sumy:

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}(\xi_c)=\overline{\Gamma}_0(\xi_c)-\frac{\overline{S}(\xi_c)}{4\pi}\int_{\xi_0}^{1}\frac{d\overline{\Gamma}}{d\xi_v}\sum_{n=1}^{B}\cdot\\ \cdot\int_0^{\infty}\Bigg(\frac{\left(L_x(n,\xi_v,\xi_c,\phi_v,\psi_v)+\right)}{M(n,\xi_v,\xi_c,\phi_v)}+\\ +\frac{\left(\frac{d\overline{x}}{d\xi}\right)_c L_r(n,\xi_v,\xi_c,\phi_v,\psi_v)\cos\beta^{(0)}}{M(n,\xi_v,\xi_c,\phi_v)}+\\ +\frac{L_\vartheta(n,\xi_v,\xi_c,\phi_v,\psi_v)\sin\beta^{(0)}}{M(n,\xi_v,\xi_c,\phi_v)}\Bigg)d\vartheta_v d\xi_v\end{aligned}\tag{7}$$

gdzie funkcje: L_x, L_υ, M określono poniżej:

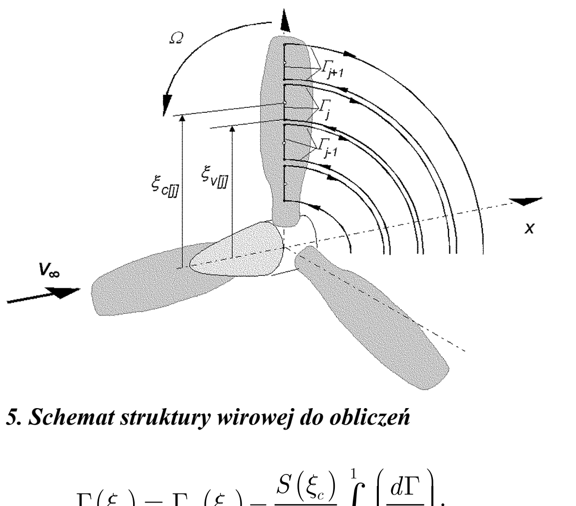
$$\begin{aligned}L_x=\xi_v\big[\xi_v-\xi_c\cos(\vartheta_v+\delta_n)-\\ -\xi_c tg\psi_v\sin(\vartheta_v+\delta_n)\big]\end{aligned}\tag{8a}$$

$$\begin{aligned}L_\vartheta=\xi_v\big[(\xi_v-\xi_v\cos(\vartheta_v+\delta_n))tg\phi_v-\\ -\overline{x}_v\left(\sin(\vartheta_v+\delta_n)+tg\psi_v\cos(\vartheta_v+\delta_n)\right)\big]\end{aligned}\tag{8b}$$

$$M=\left[\overline{x}_v^2+\xi_c^2+\xi_v^2-2\xi_c\xi_v\cos(\vartheta_v+\delta_n)\right]^{3/2}\tag{8c}$$

Wyrażenie pod sumą należy scałkować numerycznie. Oznaczenia parametrów opisujących kształt śladu wirowego objaśniono na rysunku 4.

Jeżeli ograniczymy się do przypadku wirów tworzących prawidłowe linie śrubowe (nie uwzględniamy kontrakcji strumienia śmigłowego), to przy założeniu, że kąt stożka wirnika jest do pominięcia możemy posłużyć się asymptotycznymi rozwiązaniami podanymi przez Lerbsa [2],[7] dla wielokrotnych, półnieskończonych śrubowych linii wirowych.



Rys. 5. Schemat struktury wirowej do obliczeń

$$\begin{aligned}\Gamma(\xi_c)=\Gamma_0(\xi_c)-\frac{S(\xi_c)}{4\pi}\int_{\xi_0}^{1}\left(\frac{d\Gamma}{d\xi_v}\right)\cdot\\ \frac{i_a(B,\xi_v,\xi_c,\phi_v)\cos\beta^{(0)}+i_t(B,\xi_v,\xi_c,\phi_v)\sin\beta^{(0)}}{\xi_c-\xi_v}d\xi_v\end{aligned}\tag{9}$$

W celu wyznaczenia rozkładu obciążeń, jak również osiągów łopatę śmigła modelowano układem wirów podkowiastych jak na rysunku 5. Powyższe pozwoliło na sprowadzenie zagadnienia do rozwiązania układu równań liniowych (10)

$$\left[A_{ij}\right]\left\{\Gamma_j\right\}=\left\{B_i\right\}\tag{10}$$

gdzie i-ta współrzędna wektora wyrazów wolnych ma postać:

$$B_{(i)}=\Gamma_{0(i)}\tag{11}$$

a element macierzy wpływu ma postać:

$$A_{(i,j)}=\begin{cases}S_{(i)}\left[P_{(i,j)}-P_{(i,j+1)}\right] & dla\quad i\neq j\\ 1+S_{(i)}\left[P_{(i,j)}-P_{(i,j+1)}\right] & dla\quad i=j\end{cases}\tag{12}$$

przy czym współczynnik $P_{(i,j)}$ obliczany jest na podstawie poniższego wyrażenia:

$$\begin{aligned}P_{(i,j)}=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{i_a\left(\xi_{c(i)},\xi_{v(j)},\phi_{v(j)}\right)\cos\beta_{(i)}^{(0)}+}{\xi_{c(i)}-\xi_{v(j)}}\\ \frac{+i_t\left(\xi_{c(i)},\xi_{v(j)},\phi_{v(j)}\right)\sin\beta_{(i)}^{(0)}}{\xi_{c(i)}-\xi_{v(j)}}\end{aligned}\tag{13}$$

a parametr kształtu łopaty (zależny od obrysu i zastosowanego profilu):

$$S_{(i)}=\frac{a_{0(i)}\chi_{(i)}\overline{c}_{(i)}}{2}\tag{14}$$

Rozwiązanie układu (10) wymaga znajomości wartości współczynnika dla każdego przekroju, a także kąta skoku linii śrubowej tworzonej przez wiry swobodne. Wynika stąd konieczność wielokrotnego rozwiązywania układu równań (11) dla kolejnych przybliżeń χ i ϕ_v, przy czym proces ten jest szybko zbieżny. Kąt skoku wyznaczamy na podstawie wzoru:

$$\phi_{v(j)}=arctg\frac{\lambda+\overline{v}_{x(j)}}{\xi_{(j)}-\overline{v}_{t(j)}}\tag{15}$$

po ostatecznym obliczeniu rozkładu cyrkulacji, można wyznaczyć współczynniki mocy i ciągu na podstawie znanych wartości współczynników oporu i siły nośnej:

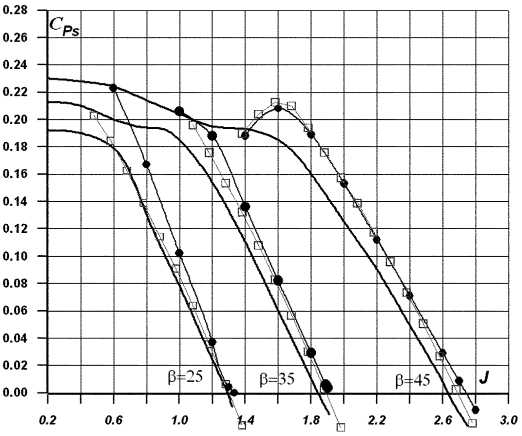
$$C_{Ps}=\frac{\pi^2}{8}B\int_{\xi_0}^{1}\overline{W}^2\overline{c}\left(C_Z\cos\phi_c-C_X\sin\phi_c\right)d\xi\tag{16}$$

$$C_N=\frac{\pi^3}{8}B\int_{\xi_0}^{1}\overline{W}^2\overline{c}\left(C_Z\sin\phi_c+C_X\cos\phi_c\right)\xi d\xi\tag{17}$$

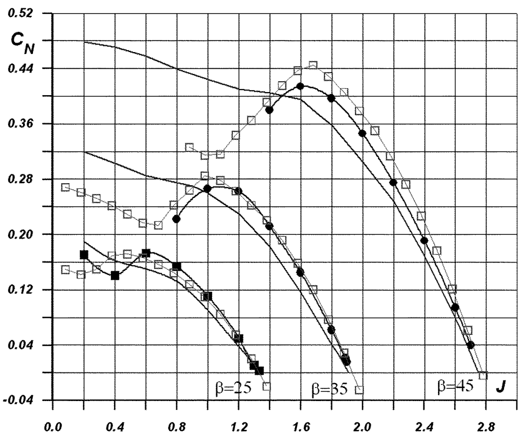
3. WYNIKI OBLICZEŃ

Obliczone, zewnętrzne charakterystyki aerodynamiczne śmigła zostały przedstawione na rysunkach 6 i 7 w zestawieniu z danymi doświadczalnymi [6] Uzyskane krzywe wykazują zgodność pochylenia charakterystyki dC_{Ps}/dJ z danymi doświadczalnymi w zakresie dużych posuwów względnych, tj. dla śmigła lekko i umiarkowanie obciążonego. Punkty przegięcia doświadczalnej charakterystyki ciągu, odpowiadające pojawieniu się lokalnych oderwań w okolicy wierzchołka łopaty występują w pobliżu wartości posuwów odpowiadających maksimum obliczeniowej charakterystyki ciągu. Ponadto występuje pewne przesunięcie obliczeniowego punktu.przejścia śmigła w stan hamulca. Podobną własność wykazują również obliczeniowe charakterystyki mocy, z tym jednak, że przewidywany punkt przejścia w stan wiatrakowania zgadza się bardzo dobrze z danymi doświadczalnymi. Przebiegi obliczeniowych charakterystyk mocy dla kątów 35 i 45 stopni mają jakościowo ten sam charakter jak krzywa mocy dla kąta nastawienia 25 stopni, jednak ze względu na przejrzystość rysunku 7 nie pokazano ich części w zakresie małych posuwów.

W celu porównania metody linii nośnej z uproszczonymi metodami wirowymi zostały wykonane obliczenia rozszerzoną metodą Witoszyńskiego [8]. W obliczeniach zastosowano te same charakterystyki.profilowe. Jak widać, przy większych katach nastawienia łopat, metoda linii nośna daje wyniki niemal identyczne z [8], natomiast ta ostatnia jest o wiele dokładniejsza w zakresie małych kątów nastawienia łopaty. Metoda ta charakteryzuje się również dużo mniejszą złożonością. Warto zauważyć również, że obie metody charakteryzuje pojawianie się deficytu ciągu i mocy w zakresie dużych kątów nastawienia łopat. Jak widać, na podstawie przedstawionego tu przykładu do wyznaczania charakterystyk zewnętrznych śmigieł o konwencjonalnej geometrii na ogół wystarczające są uproszczone metody wirowe.

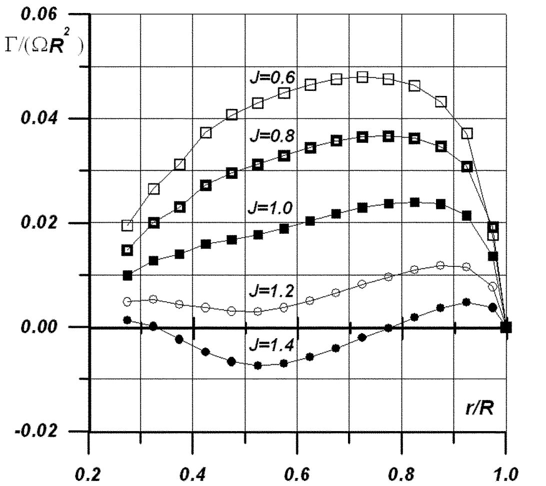


Rys. 6. Charakterystyki ciągu dla śmigła czterołopatowego. Kółka opisywana metoda, prostokąty udoskonalona metoda Witoszyńskiego

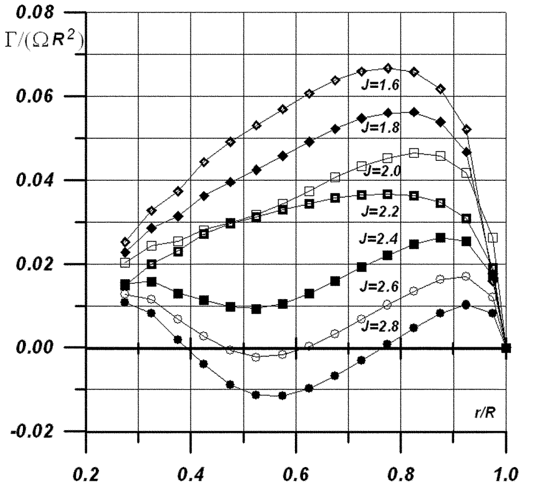


Rys. 7. Charakterystyki mocy.dla śmigła czterołopatowego. Kółka opisywana metoda, prostokąty udoskonalona metoda Witoszyńskiego

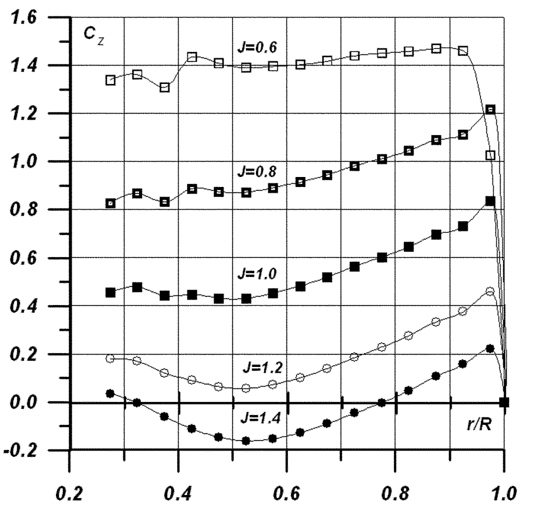
Na rysunku 8 i 9 zilustrowano rozkłady cyrkulacji.na łopatach dla różnych wartości posuwów. Krzywe te, wyznaczone dla kątów nastawienia 25 i 45 stopni.są.jakościowo podobne. Natomiast jakościowe różnice widoczne są dla przebiegów współczynnika siły nośnej w funkcji promienia i posuwu.



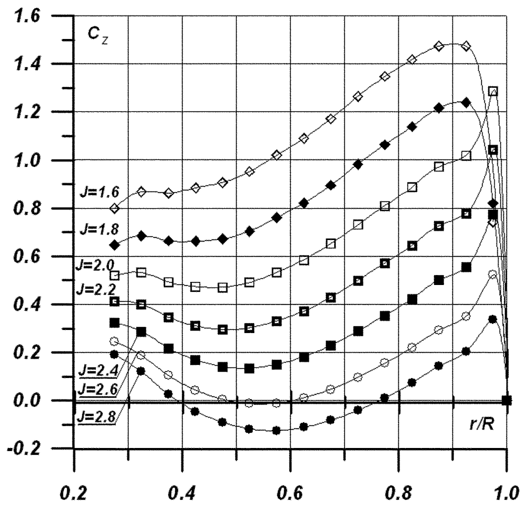
Rys. 8. Rozkłady cyrkulacji dla kąta nastawienia $\beta_{0.75}$ = 25°



Rys. 9. Rozkłady cyrkulacji dla kąta nastawienia $\beta_{0.75}$ = 45°



Rys. 10. Rozkłady.współczynnika siły nośnej dla kąta nastawienia $\beta_{0.75}$ = 25°



Rys. 11. Rozkłady.współczynnika siły nośnej dla kąta nastawienia $\beta_{0.75} = 45°$

W pobliżu wierzchołka łopaty dla kąta nastawienia *45* stopni i dużych posuwów widoczne jest ostre maksimum współczynnika siły nośnej. Dla mniejszych posuwów maksimum współczynnika siły nośnej przesuwa się do środka łopaty. Jest to związane z początkiem oderwania w obszarze wierzchołka łopaty. Dla kąta *25* stopni interesującą własnością jest.praktycznie stały rozkład współczynnika siły nośnej dla posuwu $J = 0,6$. Oznacza to prawdopodobnie, że śmigło to było projektowane dla zbliżonej wartości posuwu.

4. WNIOSKI

W pracy przedstawiono model linii nośnej dla śmigła wykorzystujący pewną szczególną postać charakterystyki nośności profilu. Przyjęta postać tej charakterystyki prowadzi do znacznego uproszczenia postaci równania linii, bez konieczności uciekania się do założeń o małych wartościach prędkości indukowanych. Wykorzystując prezentowaną metodę wykonano obliczenia lokalnych i globalnych charakterystyk aerodynamicznych śmigła NACA 5868-9 Cl-Y.

Stwierdzono poprawny charakter uzyskanych rozwiązań, w konfrontacji z danymi doświadczalnymi dla małych i umiarkowanych obciążeń dysku roboczego. Dla małych posuwów występuje deficyt ciągu i mocy („przeciągnięcie obliczeniowe"). Wynika to prawdopodobnie z faktu, że w warunkach przeciągnięcia łopaty przepływ staje się silnie trójwymiarowy (duże wartości radialnej składowej prędkości), a oddziaływanie siły Coriolisa na warstwę przyścienną może opóźniać oderwanie warstwy przyściennej [5],[10]. W obecnej wersji modelu zaniedbano również kontrakcję strugi. Wyniki prezentowane w tym tekście były uzyskane dla śmigła izolowanego, bez uwzględnienia wzajemnej interferencji śmigło-gondola. Sprzężenie to jest tym silniejsze, im.mniejszy jest posuw, a wiec i obciążenie dysku roboczego. Fakt nie uwzględnienia tego oddziaływania wynika przede wszystkim stąd, że nieznana jest dokładna geometria gondoli silnika.

BIBLIOGRAFIA

[1] **Ardito Maretta R. M.:** *Performance of Propeller Embedded in the Flowfield of the Wing.* Journal of Aircraft 1996, vol. 33, No. 5, pp. 919-923.

[2] **Babin W. F., Zavadowskij N. Y., Levkowskij N. Y., Miszkiewicz W. G.:** *Grebnye vinty. Sovremennye metody rasczeta.* Sudostroenije Leningrad 1983, s. 64-76.

[3] **Baskin W. E., Wil'dgrube L. S., Wożdajew E. S., Majkapar G. I.:** *Teoria niesuszczego vinta.* Maszinostroenjie. Moskwa 1973, s. 112-125.

[4] **E Q., Yang G., Li F.:** *Numerical Analysis of the Interference Effect of Propeller Slipstream on Aircraft Flowfield.* Journal of Aircraft 1998, vol. 35, No. 1, pp 84-90.

[5] **Favier D., Ettaouil A. Maresca C.:** *Numerical and Experimental Investigation of Isolated Propeller Wakes in Axial Flight.* Journal of Aircraft 1989, vol. 26, No. 9, pp. 837-846.

[6] **Hartmann E. P., Bierman D.:** *The Aerodynamic Characteristics of Full-Scale Propellers Having 2,3 and 4 Blades of Clark Y and RAF 6 Airfoil Sections.* NACA TR 640, Langley 1940.

[7] **Lerbs H. W.:** *Moderately Loaded Propellers with a Finite Number of Blades and an Arbitrary Distribution of Circulation.* SNAME Transactions 1952, vol. 60, pp. 72-112.

[8] **Strzelczyk. P.:** *Modyfikacja metody Witoszyńskiego: wpływ skończonej liczby łopat.* Prace Istytutu Lotnictwa 1996, nr 3, s. 107-118.

[9] **Schlichting H., Truckenbrodt E.:** *Aerodynamik des Flugzeuges.* T. II s. 49-51.

[10] **Tremmel M., Tauble D.B., Sonnenmeier J. R.:** *Numerical Determination of Circulation for a Swept Propeller.* Journal of Aircraft 2001, vol. 38, No. 6, pp. 1085-1092.

P. Strzelczyk

A NONLINEAR MODEL OF THE LIFITING LINE FOR A ROTOR IN AXIALFLOW

Summary

Introduced is a modification to a lifting line model with application to propellers and main rotors working in axial flow. As a difference from traditional lifting line theory, this model does not contain limitations with respect to angles of attack and induced velocity values. This is possible thanks to the introduction of the characteristic of load-carrying ability in the form of a product of two functions:

$$C_z = a_0 f(Ma, \alpha) \sin(\alpha - \alpha_0)$$

This description allows for a linearization of the integrated lifting line equation, as long as the shape of the vortex trail is known. In the case of an unknown form of vortex trail, its shape is determined iteratively using the Biot-Savart law, however in the case of lightly-loaded rotors, induced velocities can be determined with the help of so-called Lerbs' asymptotic coefficients. In the work presented, the comparison of results of calculations with available experimental data is shown.

П. Стшельчик

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ НЕСУЩЕЙ ЛИНИИ ДЛЯ ВИНТА В ОСЕВОМ ТЕЧЕНИИ

Резюме

В работе представлена нелоторая модифилация модели несущей линии применительного к винтам и несущим винтам работающим в осевом течении. В отличии от традиционного похода к теории несущей линии эта модель не содержит ограничений связанных с углом атаки и величины индуктивных скоростей. Эта вазможно благодаря представленню характеристики несущей способности $C_z = f(\alpha)$ в форме произведения двух фуркций с $\chi_p(\alpha^{(0)})$ и $\sin \alpha^{(0)}$. Это описание позваляет линеаризировать интегральное уравнение несущей линии, если известен вихревой след. В случае неизвестной формы вихревого следа форму вихревой линии определяют путем итерации пользуясь законам Biota-Savarta, а в случае слабонагрузкенных винтов индуктивные скорости могут быть определены с помощью так называемых асимптотических коэффициентов Lerbsa. В настоящей работе представлено сравнение расчетов с доступными экспериментальными данными.