

Anna SZLACHTA, Mykhailo DOROZHOVETS
POLITECHNIKA RZESZOWSKA, ZAKŁAD METROLOGII I SYSTEMÓW POMIAROWYCH

Niepewność pomiaru kąta przesunięcia fazowego algorytmów wykorzystujących aproksymację liniową

Dr inż. Anna SZLACHTA

Absolwentka Wydziału Elektrycznego Politechniki Rzeszowskiej – specjalność aparatura elektroniczna (1995). W 2006 r. uzyskała tytuł doktora nauk technicznych, w dyscyplinie naukowej elektrotechnika, specjalność metrologia elektryczna i elektroniczna. Zajmuje się zagadnieniami analizy i przetwarzania sygnałów pomiarowych, w szczególności w zakresie pomiarów kąta przesunięcia fazowego sygnałów zakłóconych.



e-mail: annasz@prz.edu.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono wyniki obliczeń matematycznych i badań symulacyjnych w celu oceny niepewności wyniku pomiaru przesunięcia fazowego metodą warunkowego uśredniania sygnałów dla algorytmów wykorzystujących aproksymację liniową. Omówiono wpływ doboru algorytmu na dokładność uzyskanych wyników wyznaczenia kąta przesunięcia fazowego.

Słowa kluczowe: przesunięcie fazowe, uśrednianie warunkowe, sygnały opóźnione, modele, sygnały zakłócone, niepewność pomiaru.

Uncertainty of phase angle measurement of algorithms based on linear approximation

Abstract

The results of mathematical calculations and simulations for determination of phase measurement uncertainty using conditional averaging of signal method based on algorithms with linear approximation have been presented in the paper. The influence of algorithm selection on accuracy of obtained results has been also discussed.

Keywords: phase angle, conditional averaging, delayed signals, models, noised signals, measurement uncertainty.

1. Wprowadzenie

Rozwój teorii i techniki pomiarowej metodami elektrycznymi, oprócz powiększania zbioru wielkości mierzonych i rozszerzenia zakresów pomiarów, dotyczy głównie poprawy szybkości i dokładności pomiarów. W pomiarach przesunięcia fazowego sygnałów zakłóconych uśrednianie jednopunktowe ze względu na małą ilość informacji statystycznej wymaga dla uzyskania wymaganej dokładności wydłużenia czasu pomiaru. Metoda pomiaru przesunięcia fazowego z uwzględnieniem warunkowego uśredniania wykorzystuje informację statystyczną zawartą w całym sygnale opóźnionym i zakłóconym [1]. Na podstawie charakterystyk statystycznych, bazujących na warunkowym uśrednianiu, wyznaczany jest poszukiwany kąt przesunięcia fazowego według różnych algorytmów oraz ich niepewności standardowe. W artykule porównane zostały dwa algorytmy służące do wyznaczenia kąta przesunięcia fazowego na podstawie aproksymacji liniowej zbioru zarejestrowanych wartości chwilowych sygnału opóźnionego [6].

2. Warunkowe uśrednianie sygnałów

Dla modeli sygnałów bez zakłóceń $x(t) = A_x \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_x)$ i $y(t) = A_y \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_y)$ w przedziale zmienności fazy: $-\pi \div \pi$ warunkową wartość oczekiwaną sygnału $y(t+\tau)$ przy warunku $x(t)=0$, można opisać zależnością:

$$E(y|_{x=0}) = -A \sin(\omega_0 \tau + \varphi) \quad (1)$$

Prof. dr hab. inż. Mykhailo DOROZHOVETS

Jest absolwentem (1975) Katedry Techniki Informatyko-Pomiarowej Politechniki Lwowskiej, tytuł doktora nauk technicznych uzyskał w 1986 r. a w 2001 r. obronił pracę habilitacyjną. Obecnie jest zatrudniony na stanowisku profesora w Zakładzie Metrologii i Systemów Pomiarowych Politechniki Rzeszowskiej. W pracy naukowo-badawczej zajmuje się zagadnieniami pomiarów tomograficznych, problemami przetwarzania sygnałów pomiarowych oraz analizą i oceną niedokładności wyników pomiarów.



e-mail: michdor@prz.edu.pl

gdzie $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ jest przesunięciem fazowym pomiędzy sygnałami $x(t)$ i $y(t)$.

W rzeczywistych układach zakłócenia losowe zawarte są w obydwu analizowanych sygnałach $x(t)$ i $y(t)$. Dla jednakowych poziomów charakterystyk widmowych nieskorelowanych zakłóceń w obydwu sygnałach miary czasowego rozrzutu detekcji zera w obydwu kanałach będą równe: $\sigma_{\Delta t_x} = \sigma_{\Delta t_y} = \sigma_{\Delta t}$. W związku z tym, przypadkowa wariancja odcinka czasu, odpowiadającego przesunięciu fazowemu pomiędzy badanymi sygnałami, wyniesie $2\sigma_{\Delta t}^2$. Dla uzyskania analogicznej sytuacji w modelowaniu przetwarzania sygnałów można dla uproszczenia analizy przyjąć założenie, że sygnał odniesienia nie zawiera szumu, zakłócony jest jedynie sygnał opóźniony $y(t)$ według modelu $z(t) = y(t) + n(t)$ gdzie: $n(t)$ – zakłócenie $N(0, \sqrt{2} \sigma_n)$ niezależne od $x(t)$ i $y(t)$ z odpowiednio zwiększoną dwa razy wariancją [1, 2].

Zasada warunkowego uśredniania wartości amplitudowych sygnałów sinusoidalnych polega na

- ✓ warunkowej rejestracji sygnałów $y(t)$ przy warunku $x(t)=0$ (m - realizacji),
- ✓ uśrednieniu koherentnym wartości chwilowych sygnałów (n - próbek z m - realizacji),
- ✓ wyznaczeniu czasu τ_0 na podstawie aproksymacji liniowej $u_1 = a_1 + b_1 t$ uśrednionych wartości amplitudowych (k - próbek),
- ✓ obliczeniu wartości kąta przesunięcia fazowego φ oraz niepewności otrzymanego wyniku.

Interesującym kierunkiem badań jest wykorzystanie do pomiaru kąta przesunięcia fazowego charakterystyki uśredniania warunkowego modułu sygnału opóźnionego $|Z(t)|_{x=0}$. Zastosowanie operacji nieliniowej umożliwia otrzymanie ekstremalnej charakterystyki przetwarzania. Otrzymana charakterystyka pozwala na wyznaczenie czasu τ_0 jako minimum modułu warunkowej wartości oczekiwanej. Jest to możliwe z wykorzystaniem pierwszej pochodnej, lub też na podstawie wyznaczania prostych aproksymujących w odpowiednio dobranym przedziale [3].

3. Wyznaczenie standardowej niepewności pomiaru kąta przesunięcia fazowego

Kąt przesunięcia fazowego wyznaczany jest ze wzoru [1]:

$$\varphi_x = \varpi_0 \cdot t_x = 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t_x \quad (2)$$

wówczas standardowa niepewność $u(\varphi_x)$ pomiaru φ_x :

$$u(\varphi_x) = \sqrt{(2\pi f_0)^2 u^2(t_x) + (2\pi t_x)^2 u^2(f_0)} \quad (3)$$

Podczas badań przyjęto, że niepewność częstotliwości, $u(f_0)$ jest znikoma mała i można ją pominąć.

W opracowanej metodzie warunkowego uśredniania wartości chwilowych sygnałów wyznaczenie kąta przesunięcia fazowego opiera się na obliczeniu czasu τ_0 proporcjonalnego do czasu t_x (rys. 1).

Istnieje kilka możliwych zasad pomiaru kąta przesunięcia fazowego na podstawie wyznaczenia czasu τ_0 . W przypadku, gdy rozpatrywany jest model modułu wartości oczekiwanej, czas τ_0 przypada na minimum wyznaczanej funkcji $|Z(t)|_{x=0}$.

3.1. Aproksymacja dwoma liniami

Czas t_x może być wyznaczony jako miejsce przecięcia prostych aproksymujących.

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1 t \\ y_2 = b_0 + b_1 t \end{cases} \quad (4)$$

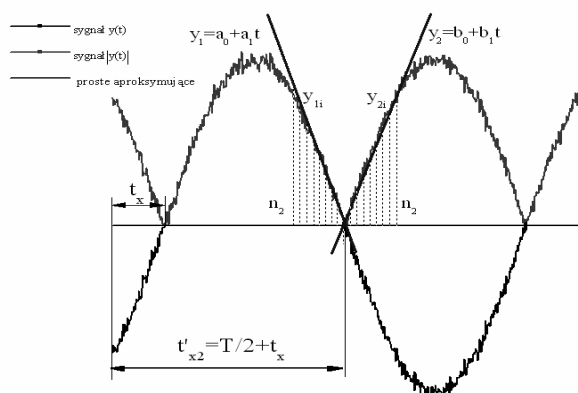
o współczynnikach odpowiednio a_0, a_1, b_0, b_1 , wyznaczane są z n_2 liczby próbek dla każdej prostej.

Wartości amplitudowe są średnią obliczoną przy warunku $x(t)=0$. Do obliczenia współczynników prostych aproksymujących wykorzystane są jedynie wartości w odpowiednio dobranych zakresach napięcia. Kąt przesunięcia fazowego z przedziału $(0 - T/2)$ wyznaczany jest po uwzględnieniu poprawki, rozpatruje się wówczas drugie minimum funkcji – rys.1. Czas drugiego minimum jest opóźniony o $T/2$ od poszukiwanej wartości kąta przesunięcia fazowego:

$$t'_x = T/2 + t_x. \quad (5)$$

Rozwiązaniem układu równań 4 jest czas t_x :

$$t_x = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1}. \quad (6)$$



Rys. 1. Aproksymacja liniowa dwoma prostymi – algorytm 2
Fig. 1. Two lines approximation – algorithm 2

W celu wyznaczenia estymatora wariancji czasu należy wyznaczyć estymatory wariancji współczynników prostych aproksymujących. Estymator wariancji współczynnika a_0 oblicza się ze wzoru:

$$S_{a_0}^2 = \frac{S_{y_1}^2}{n_2} \frac{\bar{t}_1^2}{t_1^2 - t_1}, \quad (7)$$

gdzie:

$$S_{y_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (a_0 + a_1 t_{1i} - y_{1i})^2}{n_2 - 2}. \quad (8)$$

Wartość średnią czasu obserwacji wyznacza się ze wzoru:

$$\bar{t}_1 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} t_i, \quad (9)$$

natomiast wartość średniokwadratową:

$$\bar{t}_1^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} t_i^2. \quad (10)$$

Estymator wariancji współczynnika a_1 wyznacza się ze wzoru:

$$S_{a_1}^2 = -\frac{S_{y_1}^2}{n_2} \frac{1}{\bar{t}_1^2 - t_1}. \quad (11)$$

Natomiast estymator wariancji wzajemnej współczynników a_0 i a_1 :

$$S_{a_0 a_1}^2 = \frac{S_{y_1}^2}{n_2} \frac{\bar{t}_1}{t_1^2 - t_1}. \quad (12)$$

Odpowiednio dla drugiej prostej estymator wariancji współczynnika b_0 wyznacza się ze wzoru:

$$S_{b_0}^2 = \frac{S_{y_2}^2}{n_2} \frac{\bar{t}_2^2}{t_2^2 - t_2}, \quad (13)$$

gdzie estymator prostej y_2 ma odpowiednio postać:

$$S_{y_2}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (b_0 + b_1 t_{2i} - y_{2i})^2}{n_2 - 2}. \quad (14)$$

Estymator wariancji współczynnika b_1 można wyznaczyć ze wzoru:

$$S_{b_1}^2 = \frac{S_{y_2}^2}{n_2} \frac{1}{t_2^2 - t_2}. \quad (15)$$

Natomiast estymator wariancji wzajemnej współczynników b_0 i b_1 oblicza się ze wzoru:

$$S_{b_0 b_1}^2 = -\frac{S_{y_2}^2}{n_2} \frac{\bar{t}_2}{t_2^2 - t_2}. \quad (16)$$

Model matematyczny niepewności wyznaczenia czasu t_x zależy od współczynników a_0, a_1, b_0, b_1 prostych aproksymujących y_1 i y_2 wg zależności:

$$\Delta t_{x_2} = \frac{\Delta a_0}{b_1 - a_1} - \frac{\Delta b_0}{b_1 - a_1} - \frac{a_0 - b_0}{(b_1 - a_1)^2} \Delta b_1 + \frac{a_0 - b_0}{(b_1 - a_1)^2} \Delta a_1. \quad (17)$$

Stąd estymator wariancji wyznaczenia czasu t_{x2} :

$$S_{\Delta t_{x_2}}^2 = \frac{S_{a_0}^2}{(b_1 - a_1)^2} + \frac{S_{b_0}^2}{(b_1 - a_1)^2} + \frac{(a_0 - b_0)^2}{(b_1 - a_1)^4} S_{b_1}^2 + \frac{(a_0 - b_0)^2}{(b_1 - a_1)^4} S_{a_1}^2 + 2 \frac{a_0 - b_0}{(b_1 - a_1)^3} S_{a_0 a_1}^2 + 2 \frac{a_0 - b_0}{(b_1 - a_1)^3} S_{b_0 b_1}^2. \quad (18)$$

Zakładając, że estymatory wariancji prostych y_1 i y_2 są w przybliżeniu sobie równe:

$$S_{y_1}^2 \approx S_{y_2}^2, \quad (19)$$

a także, że wartości średnie czasowe \bar{t}_1 oraz \bar{t}_2 są usytuowane symetrycznie względem chwili czasu t_{x2} :

$$t_{x2} - \bar{t}_1 \cong \bar{t}_2 - t_{x2}, \quad (20)$$

oraz:

$$\bar{t}_1^2 - \bar{t}_1^{-2} \cong \bar{t}_2^2 - \bar{t}_2^{-2}, \quad (21)$$

wówczas zależność (18) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} S_{\Delta x_2}^2 &= \frac{S_{y_2}^2}{n_2} \frac{2}{(b_1 - a_1)^2} \left[\frac{\bar{t}_2^2 - \bar{t}_2^{-2} + (t_{x2} - \bar{t}_2)^2}{\bar{t}_2^2 - \bar{t}_2^{-2}} \right] = \\ &= \frac{2S_{y_2}^2}{n_2(b_1 - a_1)^2} \left[1 + \frac{(t_{x2} - \bar{t}_2)^2}{\bar{t}_2^2 - \bar{t}_2^{-2}} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Ponieważ $\frac{(t_{x2} - \bar{t}_2)^2}{\bar{t}_2^2 - \bar{t}_2^{-2}} \approx 3$ oraz $b_1 \approx -a_1$, $n_2 = \frac{n_1}{2}$, wtedy wyrażenie (22) przyjmuje postać:

$$S_{\Delta x_2}^2 = \frac{2S_{y_2}^2}{\frac{n_1}{2} \cdot 4 \cdot a_1^2} \cdot 4 = \frac{4 \cdot S_{y_2}^2}{n_1 \cdot a_1^2}. \quad (23)$$

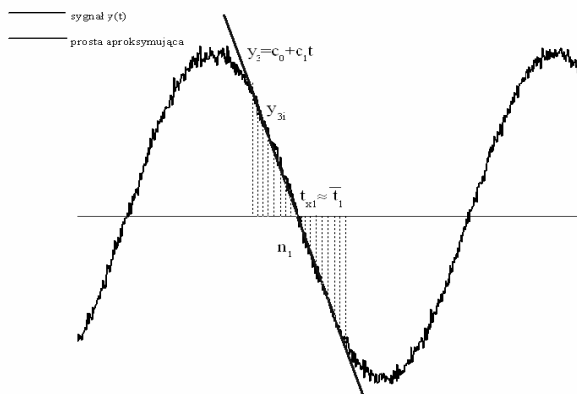
3.2. Aproksymacja jedną prostą

W przypadku aproksymacji jedną linią:

$$y_3 = c_0 + c_1 t \quad (24)$$

ze współczynnikami c_0 , c_1 , wartość kąta przesunięcia jest proporcjonalna do czasu t_{x3} wyznaczonego z rozwiązania równania (24) w chwili $t = 0$ i wynosi:

$$t_{x1} = -\frac{c_0}{c_1}. \quad (25)$$



Rys. 2. Aproksymacja liniowa jedną prostą – algorytm 1
Fig. 2. Single line approximation – algorithm 1

Z równania (24) wynika model matematyczny dla obliczenia niepewności:

$$\Delta t_{x1} = -\frac{\Delta c_0}{c_1} + \frac{c_0}{c_1^2} \Delta c_1. \quad (26)$$

Stąd niepewność standardowa wyznaczania czasu t_{x1} może być obliczona według wzoru:

$$S_{\Delta x_1}^2 = \frac{S_{c_0}^2}{c_1^2} + \frac{c_0^2}{c_1^4} S_{c_1}^2 - 2 \frac{c_0}{c_1^3} S_{c_0 c_1}. \quad (27)$$

Estymatory wariancji współczynników mogą być obliczone ze wzorów:

$$S_{c_0}^2 = \frac{S_{y_3}^2}{n_2} \frac{\bar{t}_1^2}{\bar{t}_1^2 - \bar{t}_1^{-2}}, \quad (28)$$

$$S_{c_1}^2 = \frac{S_{y_3}^2}{n_1} \frac{1}{\bar{t}_1^2 - \bar{t}_1^{-2}}, \quad (29)$$

$$S_{c_0 c_1}^2 = -\frac{S_{y_3}^2}{n_1} \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1^2 - \bar{t}_1^{-2}}, \quad (30)$$

gdzie:

$$S_{y_3}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (c_0 + c_1 t_{1i} - y_{3i})^2}{n_1 - 2} \quad (31)$$

jest estymatorem wariancji prostej y_3 .

Stąd:

$$S_{\Delta x_1}^2 = \frac{S_{y_3}^2}{n_1 c_1^2} \frac{\bar{t}_1^2 - \bar{t}_1^{-2} + (t_{x1} - \bar{t}_1)^2}{\bar{t}_1^2 - \bar{t}_1^{-2}}. \quad (32)$$

Ponieważ $t_{x1} \approx \bar{t}_1$, dlatego:

$$S_{\Delta x_1}^2 = \frac{S_{y_3}^2}{n_1 c_1^2}. \quad (33)$$

Porównując estymatory wariancji: wyznaczenia czasu t_{x2} korzystając z aproksymacji dwoma prostymi (23) i czasu t_{x1} jedną prostą (33), oraz przyjmując przybliżoną równość współczynników:

$$c_1 \approx a_1, \quad (34)$$

można stwierdzić, że:

$$S_{\Delta x_2}^2 = 4 S_{\Delta x_1}^2. \quad (35)$$

4. Eksperyment pomiarowy

W artykule przedstawiono wyniki symulacji komputerowych i pomiarów fizycznych do obliczania standardowych niepewności pomiaru kąta przesunięcia fazowego dla różnych algorytmów aproksymacji liniowej. Dobór właściwego algorytmu obliczania kąta przesunięcia fazowego w opracowanej metodzie warunkowe uśredniania sygnałów umożliwia zminimalizowanie błędów metody wyznaczania kąta przesunięcia fazowego.

Symulacje komputerowe wykonane zostały w oparciu o program napisany w środowisku Mathcad 12 firmy Mathsoft.

Dla wykonania pomiarów wykorzystane zostało stanowisko do cyfrowej rejestracji i analizy sygnałów pomiarowych zbudowane w Zakładzie Metrologii i Systemów Pomiarowych. W skład stanowiska wchodzi między innymi generator funkcyjny, generator szumu oraz system akwizycji danych (komputer klasy PC z kartą pomiarową NI 6251 wraz z oprogramowaniem). Opracowane stanowisko eksperymentalne spełnia warunki stawiane systemowi pomiarowemu, które wynikają z potrzeby realizacji zasady warunkowego uśredniania amplitudowego sygnałów sinusoidalnych zakłóconych szumem.

Do rozpoczęcia rejestracji sygnału opóźnionego wykorzystano dodatkowe wejścia analogowe karty pomiarowej. W chwili, gdy sygnał $x(t)$ osiąga wartość zero (przejście z wartości ujemnych w dodatnie), następuje początek akwizycji danych pomiarowych. Dane (wartości liczbowe sygnału opóźnionego $y(t)$) są zapisywane, a następnie poddawane operacjom numerycznym w post – procesie.

Eksperymenty zarówno symulacje komputerowe jak i rzeczywiste pomiary wykonane zostały dla różnych wartości współczynnika SNR, który wyraża stosunek sygnał/szum:

$$SNR = \frac{S}{N} = \left(\frac{U_{sk}}{\sigma_n} \right)^2, \quad (36)$$

gdzie: σ_n – odchylenie standardowe szumu, U_{sk} – wartość skuteczna sygnału, $U_m/\sqrt{2}$

Prezentowane w artykule wyniki są przykładowe, dla wartości kąta przesunięcia fazowego $\varphi=180^\circ$. Analizując uzyskane wyniki pomiarów (tab. 1) można zauważyć, że zastosowanie algorytmu II (aproksymacja 2 prostymi) nie daje satysfakcjonujących rezultatów, dokładniejszy jest algorytm I (aproksymacja 1 prostą).

Tab. 1. Wpływ stosunku sygnał szum na standardową niepewność wyznaczenia φ proponowanych algorytmów (eksperyment pomiarowy)

Tab. 1. Influence of signal/noise ratio on standard uncertainty of proposed algorithms (experimental measurements)

SNR	100	49,98	22,18	12,46	5,57
Algorytm I	0,22°	0,37°	0,59°	0,79°	1,24°
Algorytm II	1,40°	2,02°	3,60°	4,68°	5,91°

Algorytm I okazał się dokładniejszy od algorytmu II również podczas symulacji komputerowych w środowisku Mathcad 12. Wartości odchylenia standardowego błędu wyznaczenia kąta przesunięcia fazowego uzyskane podczas symulacji komputerowych dla obu algorytmów przedstawiono w tabeli 2.

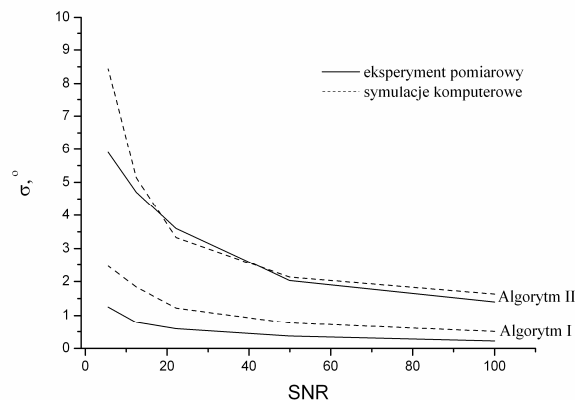
Tab. 2. Wpływ stosunku sygnał szum na standardową niepewność wyznaczenia φ proponowanych algorytmów (symulacje komputerowe)

Tab. 2. Influence of signal/noise ratio on standard uncertainty of proposed algorithms (computer simulation)

SNR	100	49,98	22,18	12,46	5,57
Algorytm I	0,51°	0,77°	1,22°	1,84°	2,46°
Algorytm II	1,63°	2,13°	3,33°	5,14°	8,44°

Wartości niepewności standardowej dla algorytmu II są kilkunastokrotnie większe niż w przypadku algorytmu I. Warto zaznaczyć, iż istnieje duża zbieżność wyników symulacji komputerowych i pomiarów. Rezultaty badań symulacyjnych oraz pomiarów rze-

czywistych dla dwóch algorytmów wykorzystujących aproksymację liniową w metodzie warunkowego uśredniania sygnałów przedstawiono na rysunku 3. Wykres przedstawia standardową niepewność wyznaczenia kąta przesunięcia fazowego według algorytmu I oraz algorytmu II.



Rys. 3. Wykres standardowej niepewności wyznaczenia φ dla zmiennego SNR

Fig. 3. Diagram of standard measurement uncertainty for different values of signal/noise ratio

5. Podsumowanie

W przeprowadzonych badaniach niepewności pomiaru kąta przesunięcia fazowego wg algorytmów wykorzystujących aproksymację liniową udowodniono wpływ doboru algorytmu estymacji kąta przesunięcia na jego dokładność.

Na podstawie obliczeń matematycznych, badań symulacyjnych oraz pomiarów wykazano, większą dokładność algorytmu „I” do wyznaczenia wartości kąta przesunięcia fazowego metodą warunkowego uśredniania sygnałów.

6. Literatura

- [1] Szlachta A., Kowalczyk A.: „Modelowanie warunkowego uśredniania wartości amplitudowych sygnałów w pomiarach przesunięcia fazowego”. XIV Sympozjum Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych, Krynica 19 – 23 września 2004r.
- [2] Szlachta A.: „Conditional averaging of a delayed signal module in measurements of the phase shift of sinusoidally noised voltages”. 5th International Conference on Measurement MEASUREMENT 2005, pp.101-104, Smolenice, SLOVAKIA 2005.
- [3] Szlachta A.: „Zastosowanie modułu sygnału opóźnionego w modelowaniu pomiarów kąta przesunięcia fazowego”. XV Sympozjum Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych, str.309 – 316, Krynica 18 – 22 września 2005r.
- [4] Dorozowec M.: „Podobieństwa i różnice pojęć i metod oszacowania charakterystyk błędów i niepewności wyniku pomiaru”. X MSM „Metody i Techniki Przetwarzania Sygnałów Pomiarach Fizycznych”, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, str. 45-52, Rzeszów 2002
- [5] Turzeniecka D.: „Ocena niepewności wyniku pomiarów”. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1997.
- [6] Szlachta A.: „Zastosowanie warunkowego uśredniania wartości amplitudowych sygnałów w pomiarach kąta przesunięcia fazowego”. Rozprawa doktorska; Rzeszów 2006.